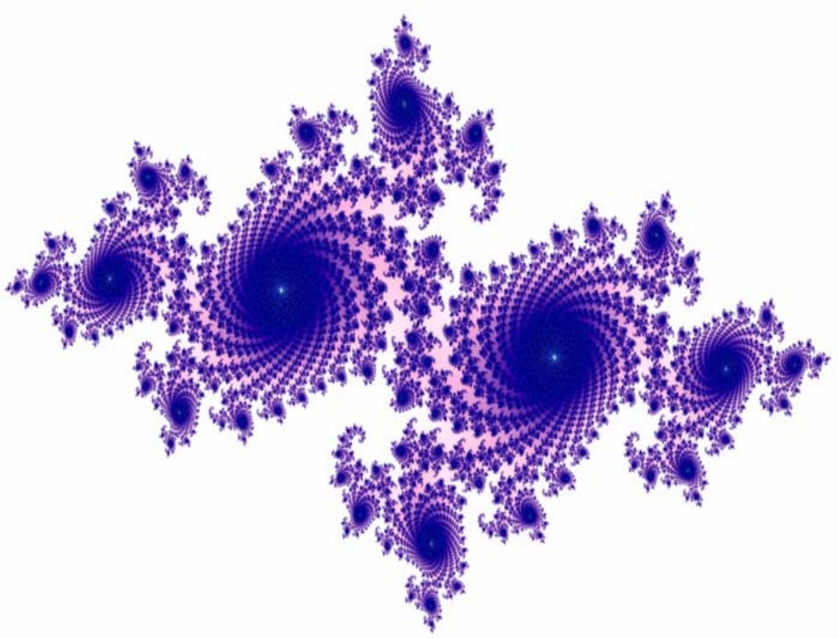
FRACTALES

Matemáticas en la Vida Cotidiana Curso 2005/06 ***Amir Al-Majdalawi Álvarez***

"La filosofía está escrita en ese gran libro que es el Universo, siempre abierto ante nuestros ojos, pero imposible de leer salvo que uno aprenda a comprender el idioma en que está escrito. Ese idioma es el de las matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las que es humanamente imposible entender una sola palabra; sin ellas, vagamos por un laberinto oscuro."

Galileo, 1623



"Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y la corteza de los árboles no es lisa y tampoco los relámpagos viajan en línea recta… La naturaleza no solamente exhibe un grado mayor sino también un nivel diferente de complejidad".

Benoit Mandelbrot, de su libro *"The Fractal Geometry of Nature"*

"La geometría Fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices, y de muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares."

Michael F. Barnsley, de su libro "*Fractals Everywhere*"

ÍNDICE

I. Introducción……………………………………………………………………..4

II. Un poco de historia.………………………………………………………………..6

III. Qué son los fractales…………………………………………………………....9
- Autosimilaridad…………………………………………………………9
- Dimensión fractal o Dimensión de Hausdorff…………………………...…9

IV. Tipos de fractales……………………………………………………………14

V. Algunos fractales interesantes……………………………………...……15
- Curva de Koch y Copo de nieve de Koch……………………………...…15
- Conjunto de Cantor……………………………………………………..…18
- Triángulo de Sierpinski…………………………………………………...…19
- La Curva de Hilbert…………………………………………………………21
- La Alfombra de Sierpinski………………………………………………..…22
- Conjuntos de Julia………………………………………………………...…23
- El Conjunto de Mandelbrot…………………………………………………25
- La Alfombra de Sierpinski…………………………………………………25

VI. Naturaleza Fractal…………………………………………………………………29

VII. Sobre la Teoría del Caos y los Fractales………………………………………..34

- Definición de Caos determinista……………………………..…………34
- Un ejemplo de Caos: el Atractor de Loretz…………………………...…35
- Propiedades del Caos…………………………………………………...…37
- ¿Qué relación tienen los Fractales con el Caos? 39

VIII. Aplicaciones de los fractales……………………………………………...…41
- Modelos de Población……………………………………………………..…41
- Predicciones Meteorológicas…………………………………………………..42
- Visualización de fenómenos Biológicos………………………………………42
- Compresión Fractal de imágenes………………………………………………43
- Música Fractal………………………………………………………………..…44
- El Arte Fractal………………………………………………………………..…44
- Efectos visuales……………………………………………………...…………45
- Antenas Fractales…………………………………………………………...…46

IX. Referencias ……………………………………………………………………48

INTRODUCCIÓN

Desde que el hombre hace uso de razón, y por encima de cualquier religión o creencia mística, existe en él una profunda curiosidad por entender la naturaleza. De este modo, sumando los esfuerzos de las mentes más "despiertas" a lo largo de incontables generaciones, se fueron forjando los cimientos de las ciencias tal y como las conocemos hoy en día.

Cuando nos enfrentamos a un problema por primera vez, cuando queremos comprender cómo funciona una cosa, normalmente hacemos simplificaciones. Es tan sencillo como considerar que, si estudiamos el movimiento de un cuerpo, conviene despreciar la fuerza de rozamiento; que si la Tierra se desplaza alrededor del Sol, ojalá que su trayectoria forme un círculo. Recordemos por un instante el primer dibujo de un atardecer en la playa, que seguro hicimos en nuestra infancia: el Sol, redondo como un plato; las montañas, triángulos casi perfectos; las gaviotas, dos arcos circulares.

Esta forma de comenzar a entenderse con el mundo que nos rodea es muy útil tanto en el ámbito científico como en la vida cotidiana; para qué complicarse más las cosas. Sin embargo, no siempre queda claro cuál es el mejor camino para lograrlo. Por ejemplo, empeñarse en reproducir con todo detalle un paisaje boscoso utilizando tan sólo elementos de la geometría clásica (círculos, triángulos, esferas, etc.) es una tarea ardua y muchas veces improductiva. Cuando se está interesado en descubrir cómo surgieron las formas y estructuras tan diversas y complejas que encontramos en la naturaleza, uno se pregunta si no habrá otras maneras de representarlas.

EUCLIDES (360-300 A.C., Alejandría, Egipto). Padre de la geometríca euclidiana

Las figuras comunes de la geometría clásica o euclidiana no son las más adecuadas para generar formas complejas como la hoja de un helecho o el perfil de una montaña. Su limitación se debe a que tienden a perder su estructura cuando son ampliadas; un arco de círculo se transforma poco a poco en una recta; la superficie de una esfera se hace cada vez más plana. Esto no es precisamente lo que sucede con las formas naturales; por ejemplo, la superficie rugosa de una roca mantiene prácticamente la misma complejidad a varios niveles de amplificación con el microscopio. Si analizamos una parte de la roca, y dentro de ella otra más pequeña, y así sucesivamente, no por ello nos parecerá cada vez más lisa. De la misma manera que con la roca, podríamos fijar la atención en el ramaje de un arbusto: de una rama salen muchas ramas y en cada una de ellas se repite el mismo esquema. La ampliación de una parte del original es muy similar al original mismo.

Si así son las cosas, ¿por qué no imaginar objetos geométricos que posean la misma propiedad pero llevada al extremo? Cuerpos que mantengan prácticamente la misma estructura en cada parte, así como en las partes de todas sus partes. En estas condiciones, al ampliarlos quizá no se conserven exactamente iguales, a lo mejor su ampliación resulta ser una versión distorsionada del original pero el esquema básico permanecerá, independientemente de cuántas veces se amplíen.

Es claro que tales objetos son más complicados que un círculo, un cono o una esfera; sin embargo, podemos servirnos de ellos para simplificar nuestros intentos de reproducir la realidad. Basta hacer a un lado la dificultad de la figura y buscar la facilidad en el método de representación; quizá así descubramos que detrás del nacimiento o la formación de un cuerpo complejo no necesariamente se esconde un mecanismo muy elaborado.

A este tipo de formas geométricas que, entre otras propiedades, contienen una imagen de sí mismas en cada una de sus partes, se le llama ahora *fractales,* y hace ya más de una década que inundaron el mundo científico con un conjunto de nuevas reglas para enfrentarse con el reto de conocer y describir la naturaleza. Su lenguaje se permeó a campos increíblemente diversos de las ciencias naturales y sociales, y ha hecho de las matemáticas un instrumento novedoso para las artes.

Las herramientas de la geometría fractal son, hoy día, elementos insustituibles en el trabajo de muchos físicos, químicos, biólogos, fisiólogos, economistas, etc., pues les han permitido reformular viejos problemas en términos novedosos, y tratar problemas complejos de forma muy simplificada. Las formas fractales, que durante mucho tiempo se consideraron meras "monstruosidades" geométricas e inaplicables divertimentos matemáticos, subyacen en fenómenos y estructuras tan variadas como la distribución de las estrellas del Universo, la ramificación alveolar en los pulmones, la frontera difusa de una nube, las fluctuaciones de precios en un mercado, y aún en la frecuencia de repetición de las palabras de este texto.

Hay fractales en los depósitos y agregados electroquímicos, y en la trayectoria de las partículas de polvo suspendidas en el aire. Fractales escondidos en la dinámica de crecimiento poblacional de colonias de bacterias, y detrás de todo flujo turbulento. Fractales en todas partes; fractales en una lista interminable de objetos reales que son testigos mudos de una interminable obsesión de la naturaleza.

Como entidades geométricas, los fractales tienen características peculiares. Imaginar curvas de longitud infinita que no se extienden en todo el espacio, o concebir un objeto con dimensión *fraccional* es el tipo de cosas que debemos estar dispuestos a enfrentar. Si la realidad es así, lo que debería asustarnos es lo que durante tanto tiempo concebimos como normal.

Los fractales han revolucionado la tecnología de la generación y reproducción de imágenes. Hoy día no sólo se les utiliza para almacenar o trasmitir señales visuales, sino también para simular paisajes. Hojas fractales para un árbol fractal en un bosque, un planeta, una galaxia digna de la más refinada película de ciencia ficción.

Los fractales parecen encontrarse en esa frontera difusa que existe en este mundo entre el caos y el orden; están ahí donde la imaginación apenas llega.

UN POCO DE HISTORIA

Los objetos fractales fueron creados mucho antes de haberse desarrollado formalmente la Geometría Fractal. De hecho, se pueden encontrar y reconocer figuras con características fractales como la del triángulo de Sierpinski, que veremos más adelante, en grabados de tela muy antiguos, y hasta se han hallado grabados japoneses con estas estructuras que datan del año 1400.

Antes de que Newton, Leibniz y colaboradores crearan en el siglo XVII lo que hoy conocemos como Calculus y estudiamos en la facultad como Cálculo, Análisis Matemático o Cálculo Infinitesimal, se conocían funciones con enormes irregularidades y discontinuidades, pero los científicos de aquella época supusieron que esas mismas funciones discontinuas eran muy escasas y que raramente surgirían en sistemas naturales, por lo que las consideraban excepciones a la matemática tradicional y simplemente las dejaban de lado, o si no las ignoraban, realizaban aproximaciones a través de redondeos, lo cual aún hoy en día se continua haciendo con éxito en diferentes sistemas, pero dichos redondeos se vuelven peligrosos en sistemas con una dinámica caótica.

Un grupo de matemáticos comenzó a darse cuenta que en la naturaleza se daban muy frecuentemente este tipo de irregularidades y que no eran excepciones como se suponía. Los primeros que comenzaron a demostrar teóricamente esta problemática fueron Cantor (con su famoso conjunto de Cantor) y Peano. Los fractales fueron concebidos aproximadamente en 1890 por el francés Henrí Poincaré. Sus ideas fueron extendidas más tarde por dos matemáticos también franceses, Gastón Juliá y Pierre Fatuo, hacia 1918. Los trabajos realizados en este campo quedaron detenidos en los años 20. El estudio de los fractales fue renovado a partir de 1974 en IBM y fue fuertemente impulsado por el desarrollo de la computadora digital. El doctor **Mandelbrot** de la Universidad de Yale, que es considerado el **padre de la Geometría Fractal**, realizó incontables experimentos con computadoras. En su honor uno de los conjuntos que él investigó lleva su nombre. En 1980, la publicación de su libro ***La Geometría Fractal de la Naturaleza*** popularizó la geometría fractal a nivel mundial.

En el año 1958, Benoit Mandelbrot ingresa a trabajar en los laboratorios de IBM para hacer un análisis del ruido y perturbaciones eléctricas. Mientras realizaba dichos estudios encontró un patrón en su comportamiento y comenzó a descifrar su estructura. Algo así como jerarquías de fluctuaciones en todas las escalas. En su estudio, se dio cuenta de que esas fluctuaciones no podían ser descritas por la matemática estadística que existía. Mientras seguía adelante con sus tareas empezó a imaginar en qué otros sistemas podría encontrar patrones similares que no pudieran ser descritos con exactitud por la matemática existente y que se comportasen de igual manera. Su visión lo llevó a hacerse una pregunta que para la mayoría de nosotros puede resultar obvia y hasta para muchos otros ser trivial, o en el mejor de los casos sin sentido. Su famosa pregunta fue: ¿Cuánto mide realmente la costa de Inglaterra? *(Mandelbrot 1977, How long is the coast of Great Britain).* Bien, cualquiera que tome un libro de geografía o un mapa va a poder contestar esto sin ningún tipo de problema. Imaginemos que el dato que encontramos es de 2.000 kilómetros. Ahora bien, esos 2.000Km., ¿de donde provienen?, ¿cómo se midieron? Para contestar a esta pregunta se pueden proponer, por ejemplo, tres puntos de vista diferentes:

1. Si medimos las costas de Inglaterra desde un satélite, vamos a ver que sus bordes son suaves, armónicos, con líneas casi rectas y ángulos prácticamente redondeados.
2. Probemos ahora a medir la misma distancia, pero desde un avión que vuela mucho más bajo que el satélite. ¿Qué pasaría en este caso? Ahora que vemos las cosas con más detalle por estar más próximos, nos damos cuenta que los bordes no eran en realidad tan suaves como se había observado anteriormente, sino que notamos muchas más rugosidades.
3. Imaginemos por último un tercer punto de partida, algo extremista, pero igualmente válido. Esta vez no estamos ni en un satélite, ni en el avión; ahora nos encontramos parados sobre la misma costa de Inglaterra con una regla como la que usábamos en la escuela, y nos ponemos a medir roca por roca, rugosidad por rugosidad, detalle por detalle.

Medida de la línea de costa con más y más detalle

Como resulta evidente, podemos asegurar que los resultados de las tres mediciones serán en todos los casos diferentes. Cuanto mayor nivel de detalle tengamos en cuenta a la hora de realizar la medición, mayor será el valor numérico obtenido. Teóricamente, si el nivel de detalle fuese infinito, el valor de la longitud tendería a infinito.

Con este ejemplo propuesto por Mandelbrot podemos extraer una importante conclusión: nuestras mediciones dependerán de la **escala** que utilicemos para medirlas. Y no es para nada una casualidad que estas deducciones se desprendan de los mismos patrones que encontró Mandelbrot en sus estudios sobre flujo electrónico, recordemos: "jerarquías de fluctuaciones en todas las escalas". Esas escalas como Mandelbrot reconoció poseían un patrón, y ese patrón las relacionaba diciendo que si bien no eran iguales a diferentes escalas, si lo eran de manera estadísticamente similar, y ésta es una de las características principales de los fractales que pasaremos a estudiar a continuación.

A pesar de que la historia de los fractales comienza a finales del siglo XIX, gran parte del XX permanece ajena a ellos. En las últimas décadas del siglo, y casi paralelamente a la evolución de la investigación de los sistemas caóticos, los fractales van cobrando un auge creciente, hasta convertirse en un concepto cada vez más extendido en todas las ciencias.

Hoy por hoy, decir Mandelbrot, es sinónimo de 'fractal'. Todos asociamos los fractales a este insigne matemático polaco. No en vano, a él le debemos la creación del concepto 'fractal'. Mandelbrot es considerado el padre de los fractales, y en cierto modo es verdad, no ya por inventarlos, cosa totalmente incierta, sino por aglutinar ciertos estudios matemáticos y físicos en una rama propia de la Matemática y la Física, una rama real, con forma y sentido propios: un nuevo Universo por explorar.

Mandelbrot no inventó los fractales, los fractales estuvieron siempre listos para que alguien tropezara con ellos y diera cuenta de sus secretos. Han sido los compañeros invisibles del ser humano desde el inicio de la creación, como el caos, que viene a ser la mano invisible que mece la cuna.

QUÉ SON LOS FRACTALES

La palabra fractal fue acuñada por Benoit Mandelbrot, quien, al tratar de encontrar nombre para su nueva invención y por casualidad, hojeó el cuaderno de latín de su hijo donde encontró la palabra *fractus*, de la que se deriva la palabra *frangere* – fracturar, romper, hacer fragmentos irregulares. Y así es cómo los fractales recibieron su nombre.

Hasta el momento hemos usado repetidamente la palabra fractal, y aunque ya se ha introducido una idea general sobre qué son los objetos fractales, con razón nos podemos preguntar acerca del significado concreto de esta. El concepto de fractal se puede abordar desde varios puntos de vista, sin embargo se acepta comúnmente que un fractal es un objeto geométrico compuesto de elementos, también geométricos, de tamaño y orientación variable, pero de aspecto similar. Con la particularidad que tienen muchos de los objetos fractales, es que si un objeto fractal lo aumentamos, los elementos que aparecen vuelven a tener el mismo aspecto independientemente de cual sea la escala que utilizamos, y formando parte, como en un mosaico de los elementos mayores, es decir, estos elementos tienen una estructura geométrica recursiva, esta propiedad es conocida con el nombre de autosimilaridad. El que cada elemento de orden mayor esté compuesto, a su vez, por elementos de orden menor, como sucede con las ramas de un árbol es lo que da estructura recursiva a los fractales.

Para representar gráficamente un fractal basta por tanto encontrar la relación o la ley de recursividad entre las formas que se repiten, es decir, encontrar el objeto elemental y la ley de formación y establecer el algoritmo gráfico.

Las dos características fundamentales que poseen los objetos fractales son:

a) **Autosimilaridad:** anteriormente habíamos definido autosimilaridad como la característica que presentan determinados objetos en los cuales los detalles más pequeños que lo componen tienen alguna relación estadística con sus propiedades globales, repitiéndose tales detalles de una manera infinita.

b) **Dimensión Fractal o dimensión de Hausdorff:** es considerado el concepto principal de la Geometría Fractal, ya que los objetos fractales se caracterizan por poseer dimensión fraccionaria. En primer lugar, comenzaremos aclarando los conceptos de *dimensión topológica* y *dimensión fractal*.

Desde el punto de vista topológico sabemos que la circunferencia y un segmento rectilíneo son la misma curva y encierran el mismo tipo de superficie (pues es posible transforma una en la otra mediante un deformación continua es decir, sin que sea preciso someter a ninguna de las dos a manipulaciones "no topológicas"). Desde un punto de vista métrico no son la misma curva ya que la circunferencia encierra un área finita el círculo, y el segmento a pesar de ser finito, no encierra con su borde un área finita.

Aparece aquí, entonces, una característica moderna de las matemáticas: intentar clasificar los objetos por lo que se conserva, por los invariantes, y analizar, por otra parte, qué ocurre con lo que no se conserva, cómo hay que analizarlo, qué hay que hacer con ello, cómo integrarlo en el mundo de los entes matemáticos.

Analicemos brevemente lo que significa la dimensión topológica, que es un término que introdujo Henri Poincaré para discernir sobre cuestiones de este tipo.

La definición inductiva dada por Poincaré al introducir este concepto fue la siguiente:

Conjunto vacío	$\Longrightarrow$	*dimensión topológica D = -1*
Punto	$\Longrightarrow$	*dimensión topológica D = 0*
Segmento	$\Longrightarrow$	*dimensión topológica D = 1* **(1D)**
Cuadrado	$\Longrightarrow$	*dimensión topológica D = 2* **(2D)**
Cubo	$\Longrightarrow$	*dimensión topológica D = 3* **(3D)**

Otra definición de la dimensión topológica de un objeto geométrico la dio K. Devlin en 1988. Es la definición por el movimiento:

"En una curva solo podemos movernos en una dirección, adelante o hacia atrás. En una superficie podemos ir adelante, atrás, a derecha, a izquierda. En un volumen podemos movernos, además, hacia arriba, hacia abajo. La curva tiene una dimensión, la superficie tiene dos dimensiones y el volumen tiene tres dimensiones."

Felix Hausdorff (1868-1942)

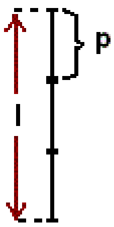
La dimensión fractal (D_f) que sugirió Felix Hausdorff en 1919 es una propiedad de un objeto que nos indica su capacidad para rellenar el espacio que lo contiene, y puede tomar valores continuos en el espacio de los números reales, entre 0 y 3. Se define como sigue:

$$\boxed{D = \log N / \log(l / p)}$$

Donde:
D= Dimensión Fractal
N= Cantidad de unidades que forman el objeto
l= "Altura" del objeto (proyección)
p= "Altura" de las unidades que forman el objeto

Ejemplos:

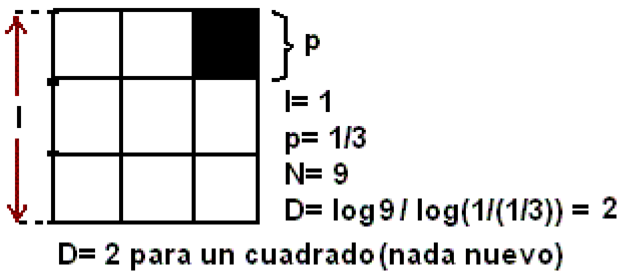
i) Para una recta formada por N = 3 segmentos:



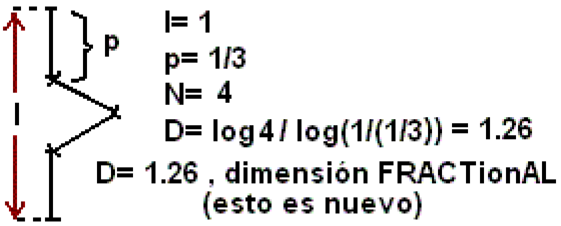
l= 1
p= 1/3
N= 3
D= log 3/ log(1/(1/3)) = 1

D= 1 para una línea (nada nuevo)

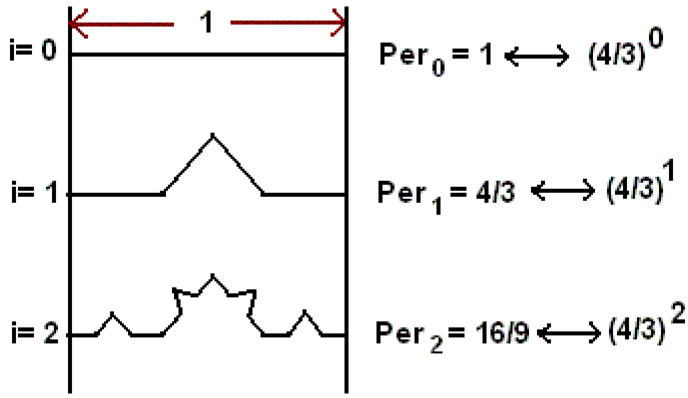
ii) Para un cuadrado formado por N = 9 "baldosas":



iii) Para una sección de la curva de von Koch (se verá un poco más adelante) después de la primera iteración:



Por otro lado, el perímetro de cualquier sección de la curva de von Koch es infinito:



$$\boxed{\therefore\ Per_n = \lim_{n \to \infty} (4/3)^n = \infty}$$

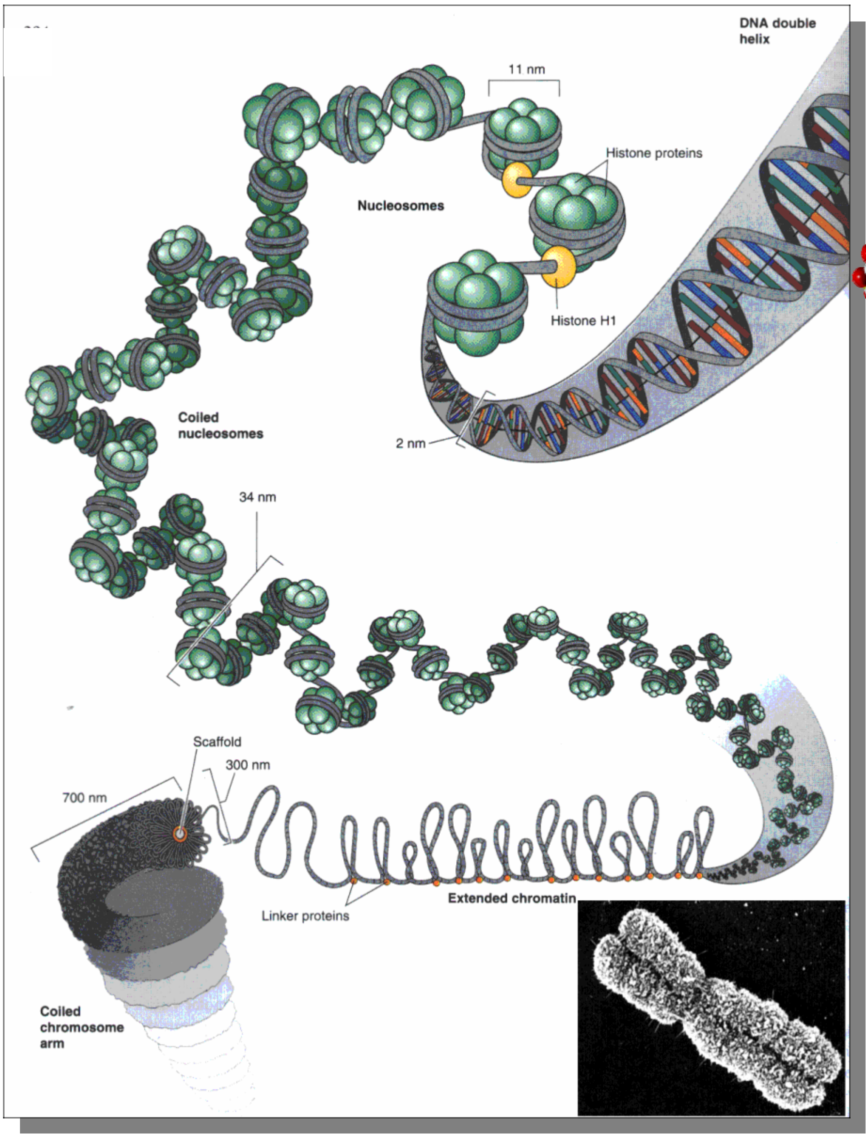

Abram Besicovitch (1891-1970)

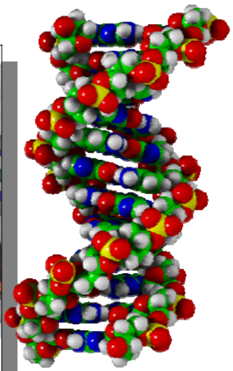
Cabe señalar que una figura determinada puede tener una dimensión fractal dependiente de la escala o resolución en la que se realizó el cálculo. Por ejemplo, una línea que se tomó como recta (D = 1) vista con más detalle puede presentar espesor e irregularidades (D> 1).

Los trabajos de Hausdorff fueron continuados durante la década de los años 20 por Besicovitch derivando en la teoría geométrica de la medida.

Después de presentar la definición de dimensión de Hausdorff, cualquiera podríamos preguntarnos si no corresponde a un mero instrumento matemático, sin aplicación práctica en el mundo real. Pues bien, como comprobaremos más adelante, numerosas estructuras naturales han evolucionado para conseguir un aprovechamiento óptimo del espacio que las contiene, ejemplos de ello podrían ser la estructura del cerebro o los alvéolos pulmonares.

Una analogía interesante a la hora de comprender el significado de la dimensión de Hausdorff podría resultar del análisis de una de las estructuras más complejas y misteriosas conocidas por la ciencia, el ADN. Y en relación a este, es inevitable preguntarse, ¿cómo es posible que una estructura tan pequeña pueda albergar absolutamente toda la información del ser vivo al que pertenece?, ¿Cómo es posible que toda la información que describe el objeto más complejo del universo, nosotros, pueda quedar codificado en su totalidad en tan ínfima porción de materia?

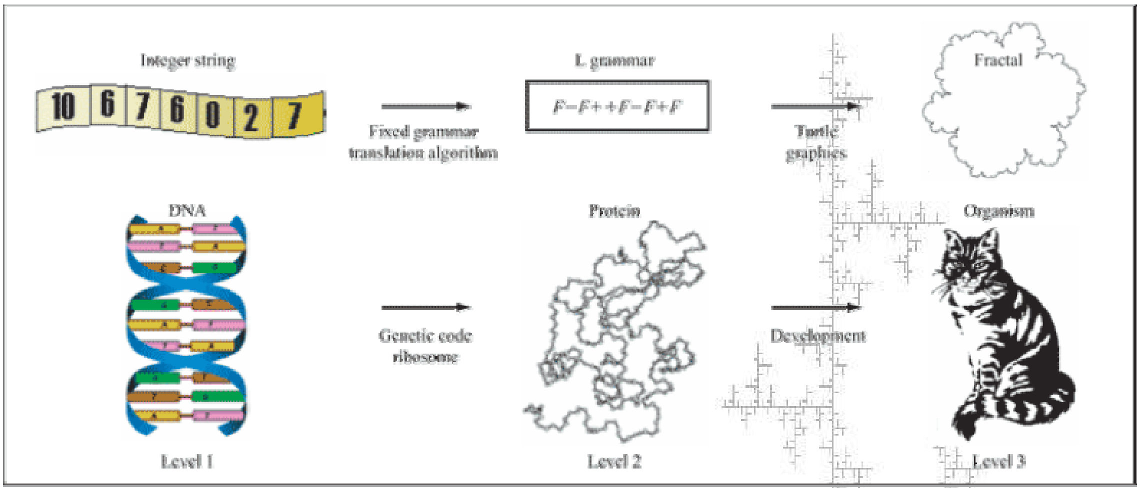




El grado de empaquetamiento y condensación del ADN es asombroso. Por ejemplo, el cromosoma humano más pequeño contiene $4{,}6 \cdot 10^7$ pares de bases, que equivalen a 14.000µm y en mitosis este cromosoma mide 2µm, por lo que el grado de empaquetamiento es igual a x7000, es decir, condensado 7000 veces.

El descubrimiento de los fractales nos ha acercado un poco más, no a responder las preguntas anteriores, sino sólo a comprender algo más el grado de "profundidad" de dichas cuestiones.

Ya se ha comentado que un fractal, objeto aparentemente muy complejo e irregular puede quedar completamente descrito por un sencillo algoritmo de formación. Pues bien, esto es en lo que la naturaleza parece basarse para la formación de múltiples objetos, incluidos nosotros mismos.



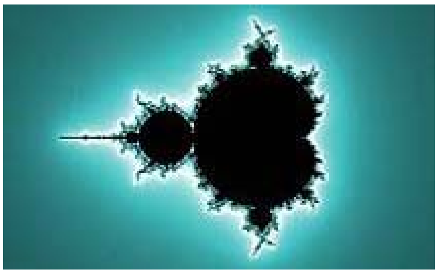
La figura anterior muestra el paralelismo existente entre nuestros logros en la evolución gramatical, referidos a la generación de estructuras complejas con un grado cada vez menor de información, y la evolución biológica ya comentada antes.

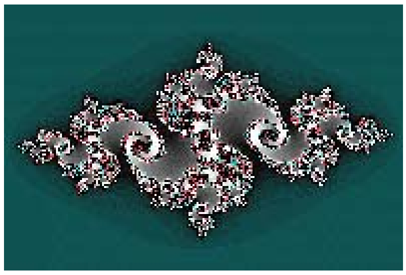
TIPOS DE FRACTALES

Existen dos tipos bien definidos de fractales. Los **lineales** y los **no lineales**.

Los ***fractales lineales*** son aquellos que se construyen con un simple cambio en la variación de sus escalas. Esto implica algo muy importante, los fractales lineales son exactamente **idénticos** en todas sus escalas hasta el infinito.
El triángulo y la alfombra de Sierpinski y la curva de Koch son ejemplos de fractales lineales.

Los fractales ***no lineales***, en cambio, son aquellos que se generan a partir de distorsiones complejas o justamente como lo dice su nombre, y usando un término proveniente de la matemática Caótica, distorsiones *no lineales*. La mayoría de los objetos fractales puramente matemáticos y naturales son no lineales. Ejemplos de ellos son: el súper conocido Conjunto de Mandelbrot o el Conjunto de Julia.


Conjunto de Mandelbrot


Conjunto de Julia

A continuación pasaremos a describir algunos de los fractales más conocidos.

ALGUNOS FRACTALES INTERESANTES

A finales del siglo pasado, el matemático Charles Hermite tildaba de “plaga lamentable” la fascinación que algunos otros matemáticos sentían por determinadas curvas que desafiaban los cimientos de la geometría de la época. Muchos como él consideraban patológicas aquel tipo de curvas, desentendiéndose de sus insólitas propiedades. A este tipo de curvas se las conocía como “Monstruos Matemáticos”. A continuación veremos algunos de ellos:

Curva de Koch y Copo de nieve de Koch

Esta curva recibe su nombre en honor a su creador, el matemático sueco Niel Helge von Koch (1870-1924), que publicó en 1904 el trabajo - *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes plane.*

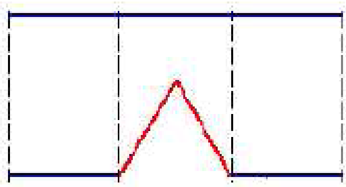
Este monstruo matemático posee características ciertamente desconcertantes:

- En esta curva no es posible trazar una tangente en ningún punto de su perímetro.
- La longitud entre dos puntos de su perímetro es infinita.
- En relación al copo de nieve de Koch, comprobaremos como una curva de longitud (perímetro) infinita encierra un área finita.

A continuación, pasamos a describir su construcción:

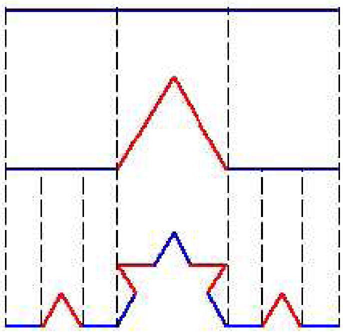
1. Consideramos un segmento de recta, de longitud 1 (esto no constituye ninguna restricción).

2. Reemplazamos el segmento inicial por cuatro segmentos de recta, cada uno de longitud *1/3 x (longitud del segmento anterior).* Formando la figura siguiente



Obtenemos así una poligonal ℓ_1 (en azul los intervalos que permanecen y en rojo los nuevos segmentos agregados) formada por cuatro segmentos de longitud 1/3, por lo tanto su longitud es $4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

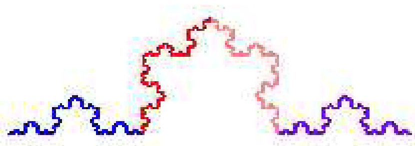
3. Aplicamos el proceso de reemplazar cada segmento de la poligonal obtenida en la etapa anterior por cuatro segmentos, cada uno de longitud *1/3 x (longitud del segmento considerado).* El procedimiento se ilustra en la figura siguiente



Obtenemos de este modo una poligonal ℓ_2, en la cual, cada segmento tiene longitud $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$, hay 16 de tales segmentos, luego la longitud de la poligonal ℓ_2 es igual a $\frac{16}{9}=\left(\frac{4}{3}\right)^2$.

4. Repetimos el proceso de reemplazar cada segmento de recta de la poligonal por cuatro segmentos, como se hizo en el paso 2, cada uno de longitud *1/3 x (longitud del segmento considerado,* obtenemos así una poligonal ℓ_3 que consta de 64 segmentos, cada uno de longitud $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$, por lo tanto la longitud de la poligonal ℓ_3 es $\frac{64}{27}=\left(\frac{4}{3}\right)^3$.
5. Este proceso puede repetirse indefinidamente, obteniendo una "curva" de longitud infinita, pues en la etapa *n* la poligonal obtenida consta de 4^n segmentos, cada uno de longitud $\frac{1}{3^n}$. Por lo tanto la longitud de ℓ_n es $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ que se hace grande cuando *n* crece. La curva límite es la llamada *curva de Koch*.

Como puede observarse desde la construcción de la curva de Koch, en cada etapa agregamos puntos esquinas (aquellos que forman el vértice de dos segmentos). La curva final tendría un punto esquina en cada punto, esto no es fácil de imaginar, pero de hecho así ocurre.



La construcción de reemplazar cada segmento por otros cuatro, cada uno de longitud *1/3 x (longitud del segmento considerando en la etapa anterior)* puede aplicarse, por ejemplo, a los lados del triángulo equilátero de lado 1. Obteniendo, una sucesión de figuras como la que se muestra abajo

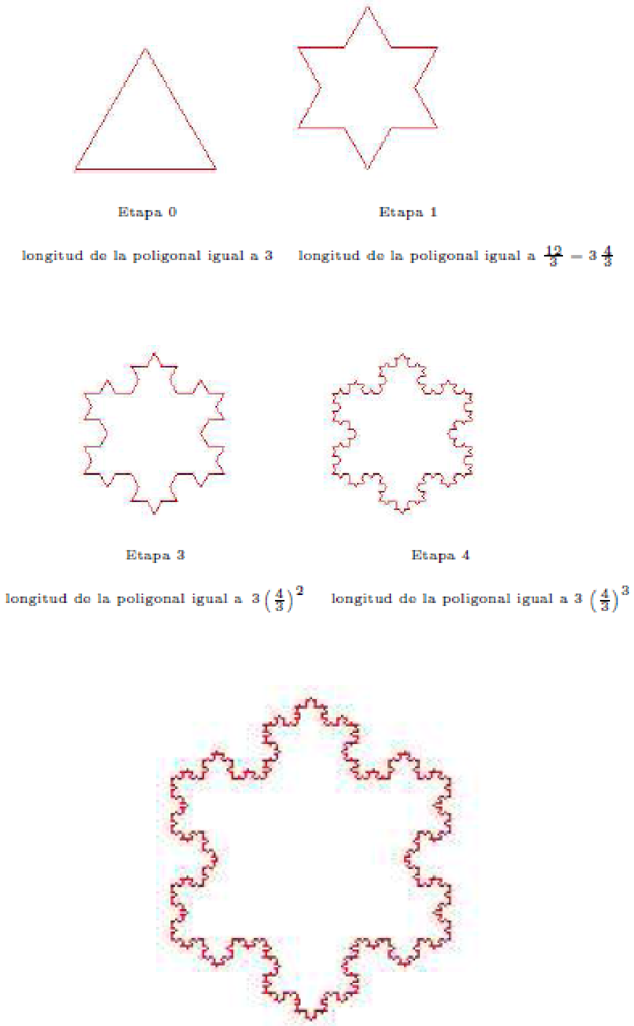
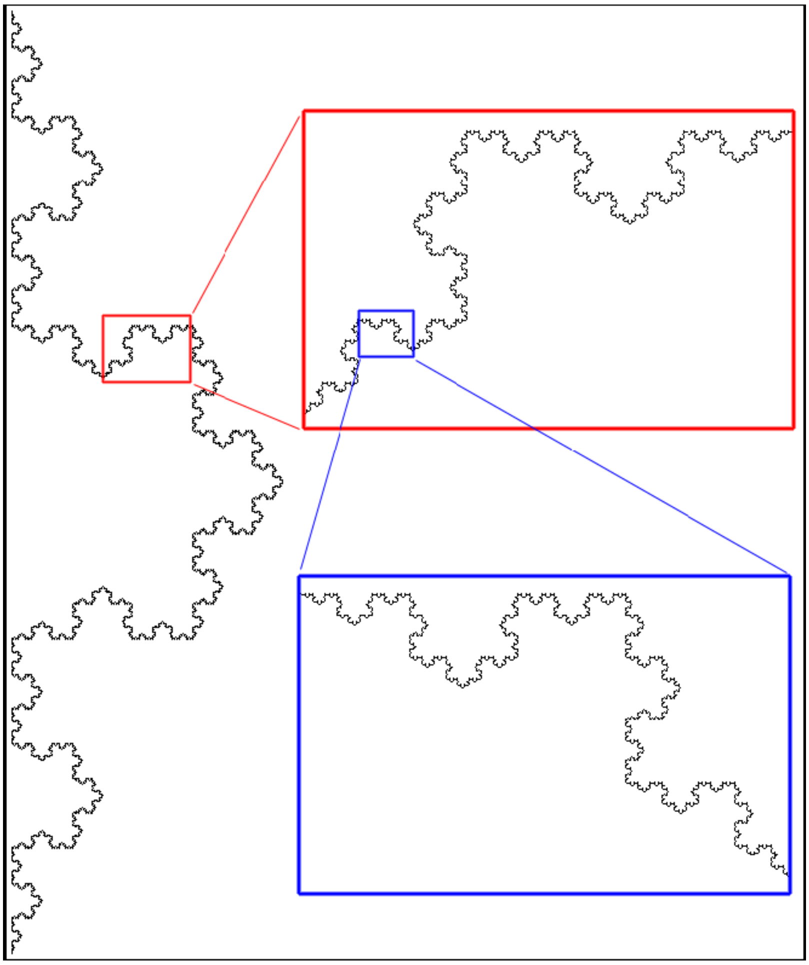


Figura final

En la etapa 3, obtenemos una poligonal cerrada formada por 4x48 = 192 lados, cada uno de longitud 1/27, luego su longitud es 192 $\frac{192}{27} = 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3$. De lo anterior vemos que en la etapa n se obtiene una poligonal con longitud igual a $3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$. Por lo tanto, la longitud de la curva límite crece indefinidamente, notemos que la curva límite acota una región de área finita en el plano. Esta curva límite es llamada *copo de nieve de Koch*. Ella hiere nuestra intuición, pues es una curva de longitud infinita que delimita una región de área finita en el plano. Una manera sencilla de ver esto, es mostrar que la curva de Koch está contenida en la región delimitada por el círculo circunscrito al triángulo equilátero con el cual comenzamos la construcción. Se puede demostrar, que el área que acota el copo de nieve de Koch es $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{12}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)}{\frac{5}{9}}$ y como $\left(\frac{4}{9}\right)^k$ tiende a 0 cuando k crece indefinidamente, A_n se aproxima al valor $\frac{8}{5}\frac{\sqrt{3}}{4}$.

La curva y el copo de nieve de Koch, son ejemplos de figuras geométricas fractales. Muchas figuras fractales tienen la propiedad de ser autosimilares, esto quiere decir, como ya se ha explicado antes, que si tomamos una parte pequeña de la figura, por muy pequeña que sea, al aplicarle una ampliación vemos nuevamente la misma configuración o una muy parecida. La siguiente figura intenta mostrar esta propiedad



Así, esta curva tiene una dimensión de Hausdorff de $1{:}2618$ lo cual indica que está más cerca de ser una recta (dimensión 1) que un área (dimensión 2).

La curva de von Koch demostró que todas las ciencias euclideanas y cartesianas tenían cimientos muy frágiles y comenzaron a constatarse grietas en el edificio de la ciencia.

Conjunto de Cantor

Este conjunto es utilizado frecuentemente en matemáticas para construir ejemplos y su nombre se lo debe a su creador G. Cantor (1845-1918).

Su definición es muy sencilla: se toma un segmento de determinada longitud (por ejemplo el intervalo $[0; 1]$ de la recta real) y se divide en tres subsegmentos de igual longitud, se suprime el segmento central y el proceso se repite con los dos nuevos segmentos resultantes. El resultado de iterar este proceso infinitas veces (paso al límite) es el **conjunto de Cantor**.

Etapa	Longitud
0	1
1	$\frac{2}{3}$
2	$(\frac{2}{3})^2$
3	$(\frac{2}{3})^3$
$\vdots$	$\vdots$
n	$(\frac{2}{3})^n$

Ahora bien, ¿tiene elementos el conjunto de Cantor? Un espectador infinitesimal que contemplase la iteración anterior durante una eternidad, ¿no terminaría por ver desaparecer la totalidad de los puntos? El consolidado sistema de medidas de la época daba para dicho conjunto longitud nula, y por lo tanto, tarde o temprano se tuvo que aceptar que aquel sistema de medidas era insuficiente.

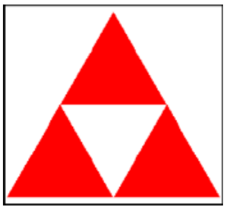
El conjunto de Cantor tiene una dimensión de Hausdorff menor que la unidad, pues cada vez que la longitud de un segmento se reduce a su tercera parte, sólo aparecen dos trozos más, D_f =log(N)/log(l/p)= log(2)/log(3)= 0.630905. En otras palabras, es más que una colección de puntos, pero menos que una línea… Es uno de los fractales más famosos, a pesar de no ser tan atractivo visualmente. Su estructura está detrás de varias cosas en el mundo real y así se ha utilizado como modelo para representar desde la distribución nada homogénea de los anillos de Saturno y las fluctuaciones en el precio del algodón a partir del siglo pasado, hasta las variaciones que el nivel de las aguas del río Nilo ha experimentado desde hace 2 000 años. Más aún, cuando la idea que subyace en la construcción de este conjunto se extiende a tres dimensiones, el patrón que se genera coincide sorprendentemente con la distribución de estrellas y galaxias en el universo. Esto es más que suficiente como para quedarse anonadado.

La construcción anterior del conjunto de Cantor es la clásica. Existen muchas construcciones de conjuntos de Cantor, es decir, de división de un segmento en segmentos (no necesariamente en 3) y en proporciones distintas (no necesariamente 1/3), y que nos llevan a un conjunto de Cantor. Incluso se pueden construir conjuntos de Cantor con longitud positiva. En la actualidad aún se trabaja y se publican trabajos profundos en matemática que tienen relación con este conjunto.

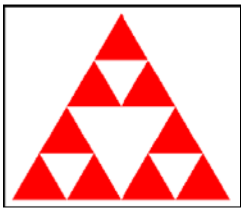
Triángulo de Sierpinski

El nombre de esta figura fractal se debe a su creador, el matemático polaco W. Sierpinski (1882-1969). La construcción clásica de esta figura fractal es la siguiente.

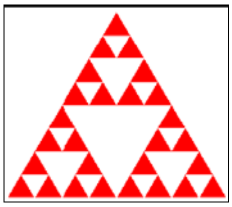
Consideramos una región triangular, la cual para simplificar suponemos delimitada por un triángulo equilátero de lado 1. Dividimos la región en cuatro regiones menores de igual área uniendo los puntos medios de los lados del triángulo original y, después, eliminamos el triángulo central. En cada triángulo restante repetimos el proceso de división-eliminación descrito para el primer triángulo.



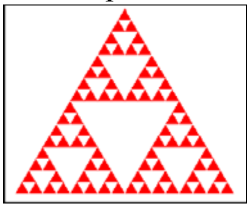
Etapa 1



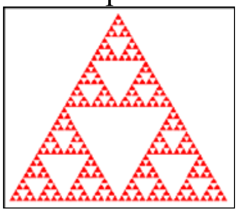
Etapa 2



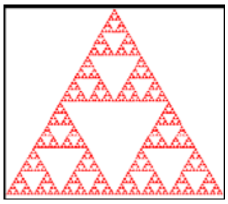
Etapa 3



Etapa 4

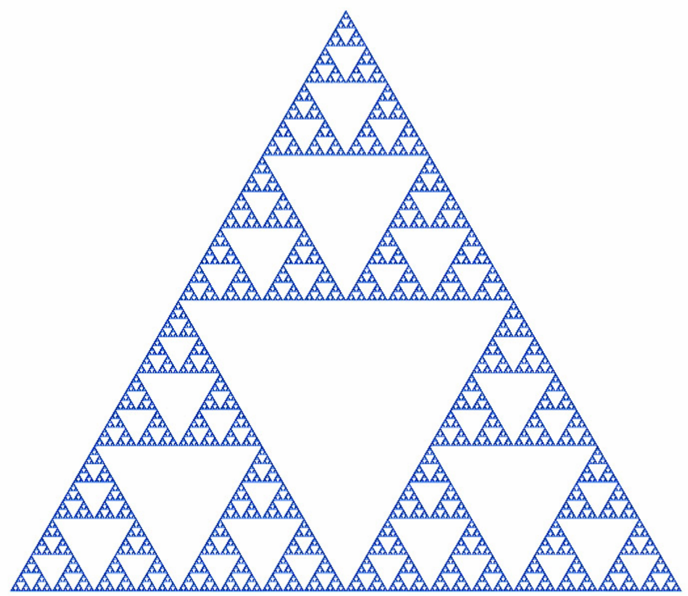


Etapa 5



Etapa 6

Repitiendo el proceso indefinidamente, obtendríamos el llamado triángulo de Sierpinski que se muestra a continuación.



La dimensión de Hausdorff de este fractal es la siguiente $D_f = \dfrac{\log 3}{\log 2} = 1{,}5849$.

El triángulo de Sierpinski tiene área cero. Para mostrar esto calcularemos el área retirada en la construcción del triángulo de Sierpinski.

<u>Cálculo del área del triángulo de Sierpinski</u>

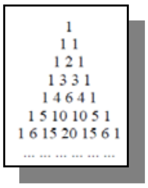
En la etapa inicial tenemos un triángulo equilátero de lado 1, luego su área es $A_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

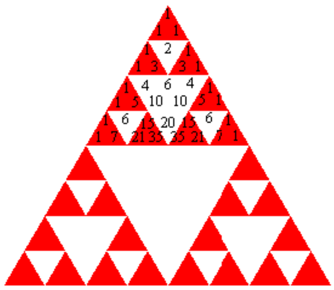
En la primera etapa retiramos el triángulo equilátero central de lado $\ell_1 = \dfrac{1}{2}$, y nos quedan tres triángulos equiláteros de lado $\ell_1 = \dfrac{1}{2}$ por lo tanto el área de la figura que resulta es $A_1 = 3\dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{1}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$. En la segunda etapa, de cada uno de los triángulos restantes retiramos un triángulo equilátero de lado $\ell_2 = \dfrac{1}{4}$ y nos quedan 9 triángulos equiláteros

cada uno de lado $\ell_2 = \frac{1}{4}$, luego el área de la figura es $A_2 = 9\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{16} = \frac{9\sqrt{3}}{64}$, y continuando de este modo, en la etapa n de la construcción,
el área de la figura que resulta es $A_n = \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. Ahora, como $\frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ tiende a 0 cuando n crece indefinidamente, concluimos que el triángulo de Sierpinski tiene área 0

Otra manera interesante de obtener una imagen del triángulo de Sierpinski, es considerar el triángulo de Pascal o triángulo de Tartaglia, es decir, el triángulo formado por los coeficientes binomiales del desarrollo del binomio $(x+y)^n$, con n=0,1,… Curiosamente, si marcamos de color negro cada número impar y marcamos de color blanco cada número par, la figura obtenida se ve como el triángulo de Sierpinski. Considerando más filas en el triángulo de Pascal y considerándolo módulo 2 (colocamos un 0 donde hay un número par y un 1 donde hay un número impar), obtenemos la siguiente figura, que es bastante semejante al triángulo de Sierpinski.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{n!.(n-k)!}, \qquad (k = 0,\dots,n)$$



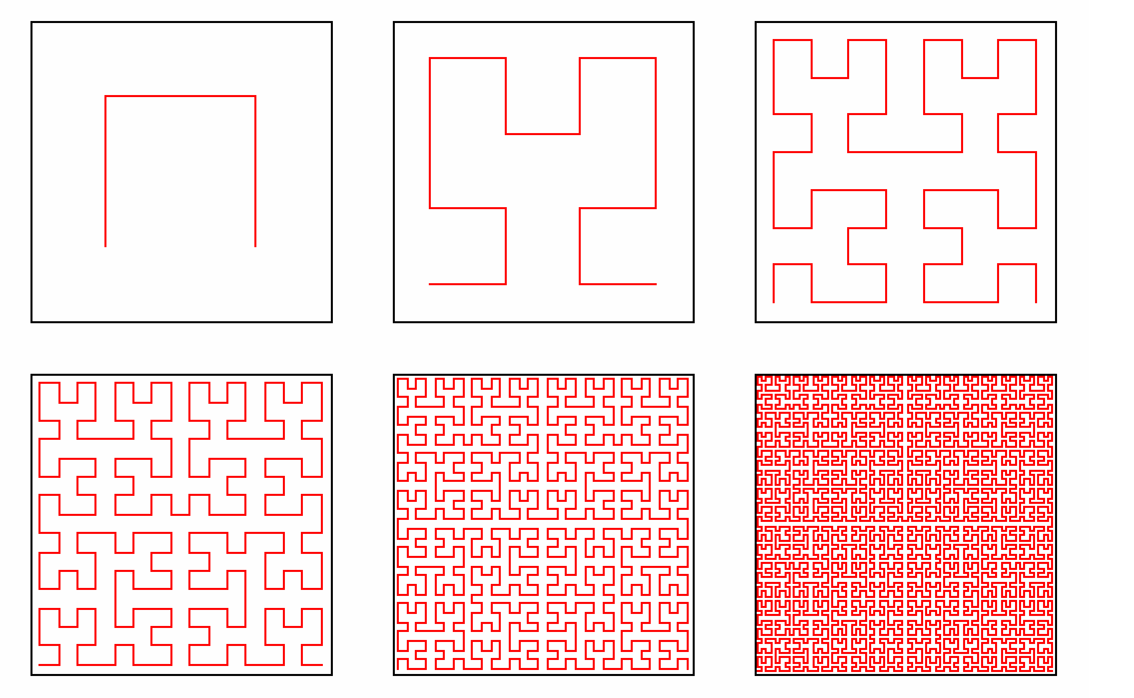


1
1 1
1 0 1
1 1 1 1
1 0 0 0 1
1 1 0 0 1 1
1 0 1 0 1 0 1
1 1 1 1 1 1 1 1
1 0 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 0 0 0 1 1
1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1
1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1

El triángulo de Sierpinski, al igual que el conjunto de Cantor y la curva de Koch, es autosimilar. Estas tres figuras, constituyen la trilogía de los más clásicos ejemplos de las figuras llamadas fractales.

La curva de Hilbert

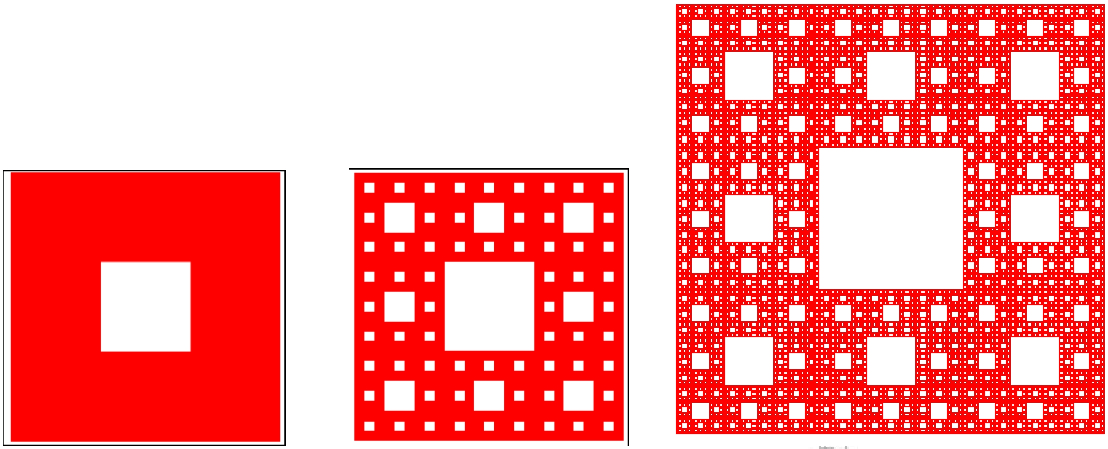
En 1890, Peano ideó otro de estos monstruos: una curva que rellenaba el plano ¿Cómo podía una región cuadrada del plano ser una curva? Años más tarde, Hilbert ideó una curva con idéntica propiedad pero de más sencilla elaboración.



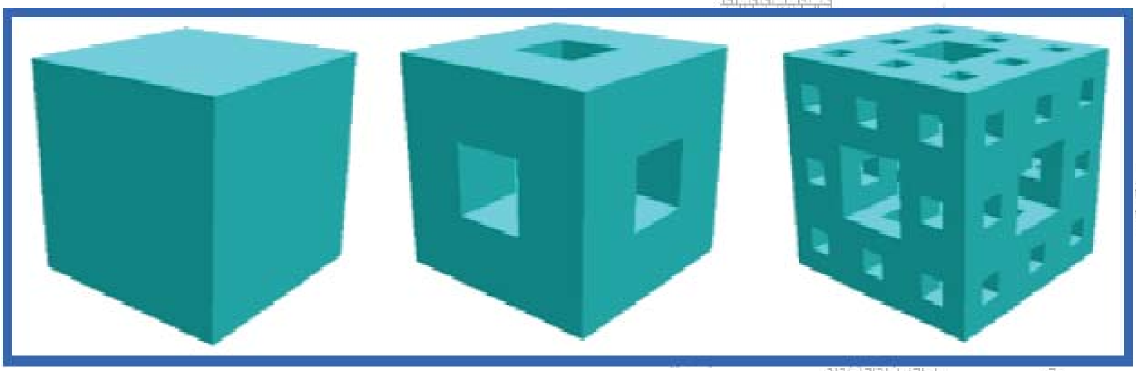
La curva de Hilbert se construye iterando mediante el procedimiento que puede observarse en la figura anterior. En cada etapa cada segmento se sustituye por otros cuatro con la mitad de longitud. La curva límite de tales poligonales llena el cuadrado unidad, por tanto, la curva de Hilbert tiene una dimensión de Hausdorff igual a 2.

La Alfombra de Sierpinski

La construcción de la alfombra de Sierpinski es similar a la construcción del triángulo de Sierpinski, esta vez comenzamos con un cuadrado, digamos unitario (de lado 1), el cual dividimos en 9 cuadrados pequeños, cada uno de lado de longitud 1/3, y eliminamos en cuadrado central. Nos quedan 8 cuadrados de lado 1/3. Repetimos el proceso de particionar cada cuadrado en 9 cuadrados pequeños, cada uno de longitud *1/3 x (longitud del anterior),* en cada cuadrado obtenemos 9 cuadrados cada uno de longitud 1/9 y de cada uno de ellos eliminamos los cuadrados centrales. Continuando con el proceso indefinidamente obtenemos la llamada alfombra de Sierpinski, la cual ocupa un área 0 en el plano, al igual que el triángulo del mismo nombre. En la secuencia de figuras siguientes se muestran las primeras etapas de la construcción de la alfombra de Sierpinski.



Otro de los ejemplos de los llamados fractales clásicos es la esponja de Menger, cuya construcción geométrica es análoga a la de la alfombra de Sierpinski, por lo tanto es una especie de versión tridimensional de ésta. La esponja de Menger es un fractal que tiene volumen 0 y área infinita, la figura muestra las primeras etapas de su construcción, de la cual el lector puede deducir su proceso general de construcción.

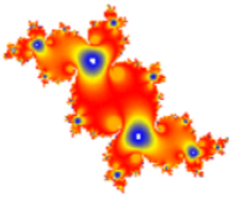
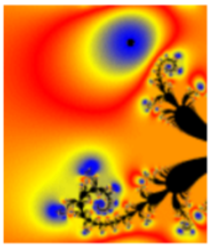
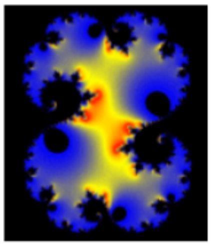
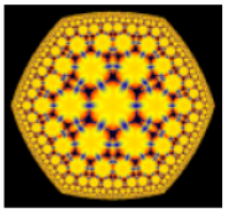
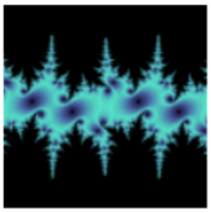
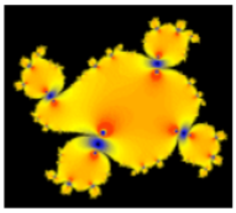


Conjuntos de Julia

Gaston Julia (1893-1978)

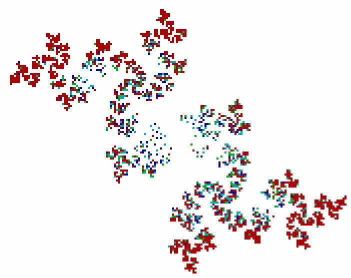
Gaston Julia (1893-1978) fue uno de los grandes propulsores de la matemática fractal. Uno de sus artículos más famosos fue el *"Informe sobre la iteración de las funciones racionales"*.

Uno de los fractales más estudiados corresponde al Conjunto de Julia y uno de sus elementos se puede obtener con la siguiente fórmula recursiva en el plano complejo: $Z_{i+1} = Z_i^2 - 1$. El resultado depende del número complejo de partida escogido. Por ejemplo, $Z_0 = 1.05 + 0.3i$ produce una órbita finita en el plano complejo.

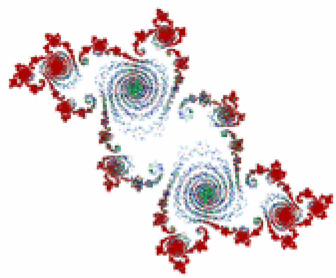
Ecuación	Imagen	Ecuación	Imagen	Ecuación	Imagen
$z^2 + c$		$c \cdot e^x$		$z^2 + c$	
$z^{3/2} + c$		$\cos z + c$		$z^4 + z^3 + c$	

Podemos definir el conjunto de Julia de un polinomio de variable compleja como la frontera del conjunto de puntos que escapan al infinito al iterar dicho polinomio. Esto significa que la órbita de un elemento del conjunto de Julia no escapa al infinito, pero existen puntos arbitrariamente cerca de él que sí lo hacen.

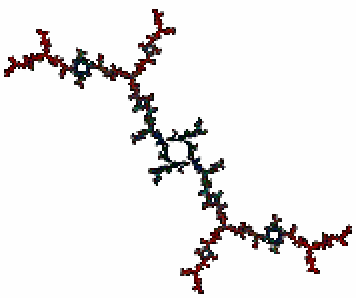
Vamos a ver ejemplos basándonos en la función $f(z) = z^2+c$



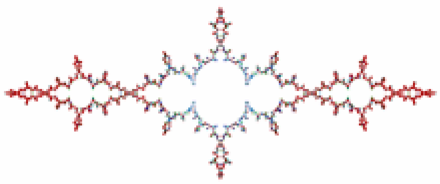
c=(-0.25+0.74*i*)



c=(-0.194+0.6557*i*)



c=(-0.1565+1.0322*i*)



c=(-1.25+0*i*)

Julia probó que la órbita de z = 0 juega un papel esencial para saber si un conjunto de Julia es conexo. ¿Cuándo podemos considerar que la órbita de z = 0 diverge a infinito? La teoría de iteraciones nos asegura que la órbita divergirá a infinito si en algún momento uno de sus puntos tiene módulo mayor o igual a 2.

Conjunto de Mandelbrot

El Conjunto de Mandelbrot ha sido el estandarte ondeado al viento por los estudiosos y divulgadores de los fractales; ha sido el símbolo por antonomasia esgrimido para dar a conocer una nueva dimensión de la realidad... o una nueva realidad del concepto dimensión, según se vea. Publicaciones tan prestigiosas como la *Scientific American* han dicho de él que, hasta la fecha, es el objeto matemático más complicado creado por el hombre.

El Conjunto de Mandelbrot, al igual que los demás fractales no lineales tienen su origen en los **números complejos**. De hecho, este conjunto se genera a través de iterar una cierta cantidad de veces la ecuación compleja:

$z_{n+1} = z_n^2 + c$, *donde ‘z’ y ‘c’ son números complejos.*

Tenemos z = a + ib, donde ‘a’ y ‘b’ son números reales e ‘i’ se define como $i = \sqrt{-1}$.

La cuestión es ahora: ¿Qué le pasará a nuestro z_n para un ‘c’ dado cuando $n \rightarrow \infty$**?**

Cuanto más veces se itere la fórmula, el número complejo resultante deberían hacerse cada vez mayor, pero no ocurre así en todos los casos. El parámetro que determina su crecimiento es el módulo del complejo. Si el módulo (que no es imaginario, sino real) es 2 o mayor, está demostrado que seguirá creciendo infinitamente. Sin embargo hay complejos que por mucho que los elevemos al cuadrado nunca nos darán como resultado un número complejo cuyo módulo sea superior a 2. Este conjunto de puntos definen lo que se llama "El Lago de Mandelbrot". Las "orillas" del Lago están definidas por los puntos que superan la barrera del 2 en un número infinito de iteraciones.

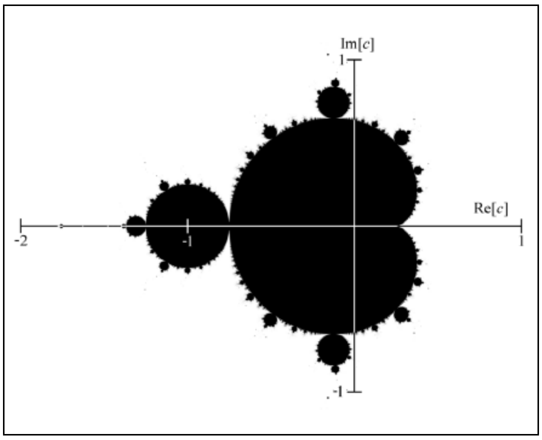
Ejemplos: (Comencemos con $z_0 = 0 + i0$)

c = 0: Se comprueba que $z_n = 0 + i0$ para todo ‘n’.

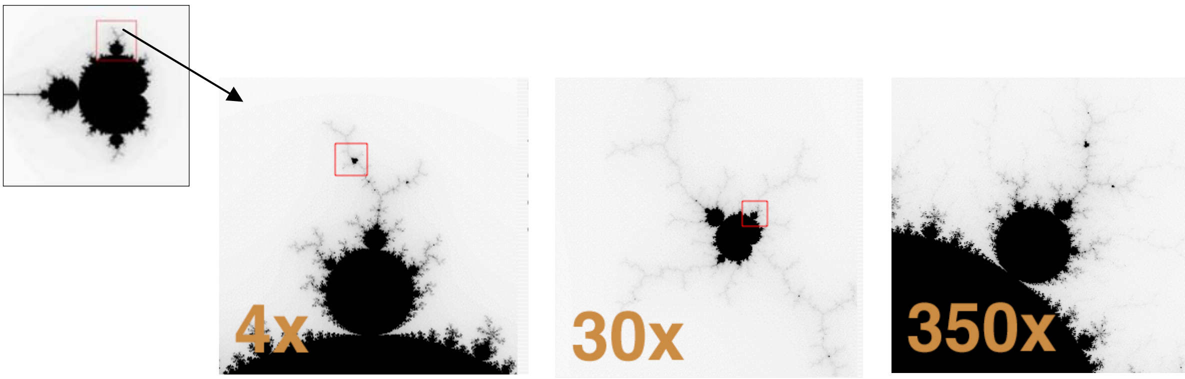
c = i: Se obtienen $z_1 = i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -i$, $z_4 = -1 + i$ y así sucesivamente, es decir, se generan los mismos valores de forma cíclica con un periodo igual a 2.

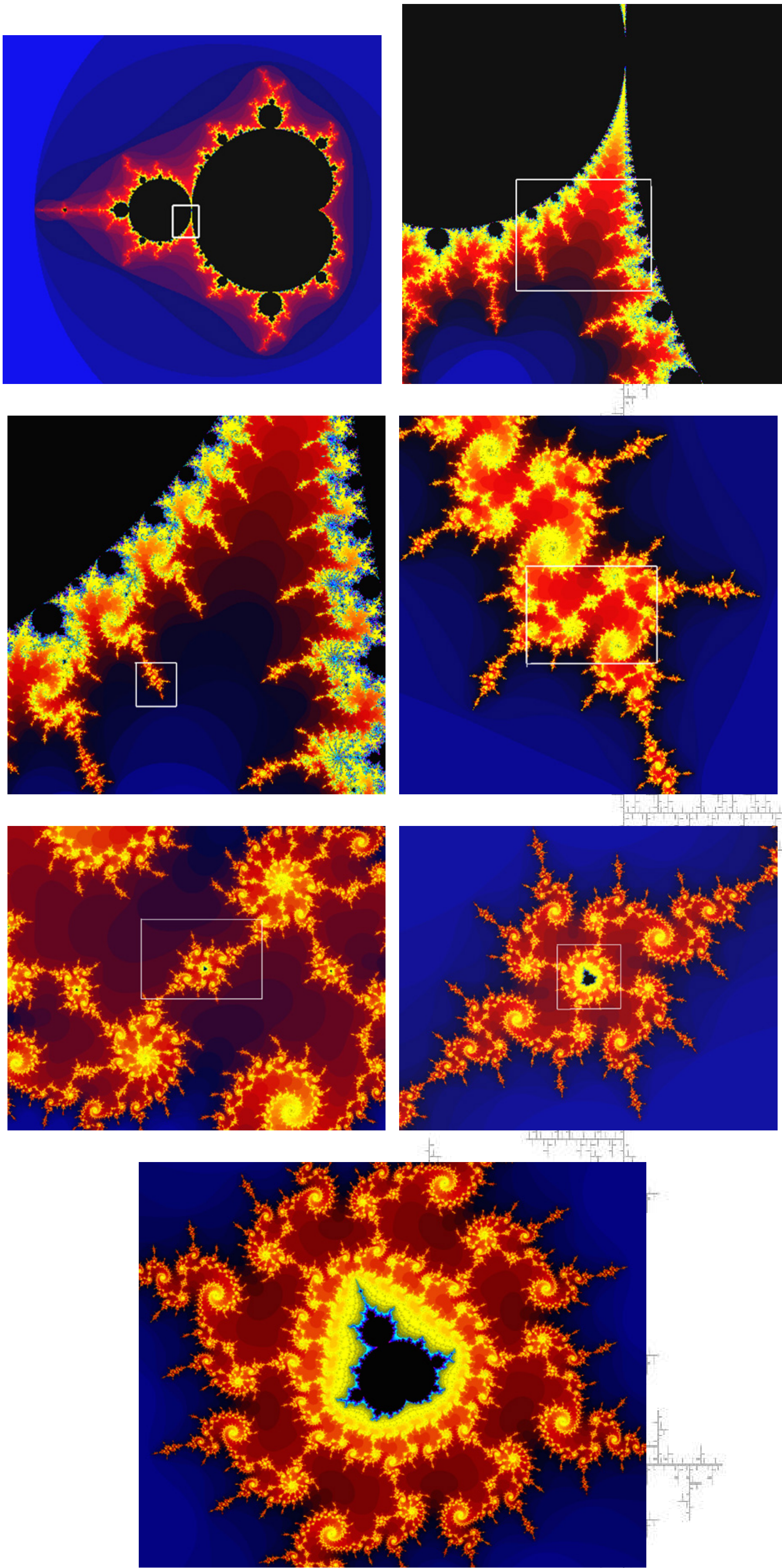
c = 1 + i: Se obtienen $z_n = 1 + i, -7 + i7, 1 - i97, -9407 - i193, \ldots$ La secuencia parece divergir. Y efectivamente, si para nuestro $z_n = a + ib$ se cumple la condición $a^2 + b^2 > 4$, se puede demostrar que la secuencia obtenida siempre divergirá.

Ahora vamos a considerar el plano complejo (con los ejes imaginario y real) y usamos cada punto de éste (números complejos) como la constante ‘c’ en la fórmula cuadrática. Partiendo de cada uno de estos puntos del plano complejo, procedemos a realizar muchas iteraciones con la fórmula hasta poder decidir si la secuencia obtenida divergirá o no. Si no lo hace, coloreamos el punto de color negro, y en caso contrario lo dejamos blanco. Repitiendo esto para cada punto del plano complejo se obtiene el Conjunto de Mandelbrot, representado a continuación:

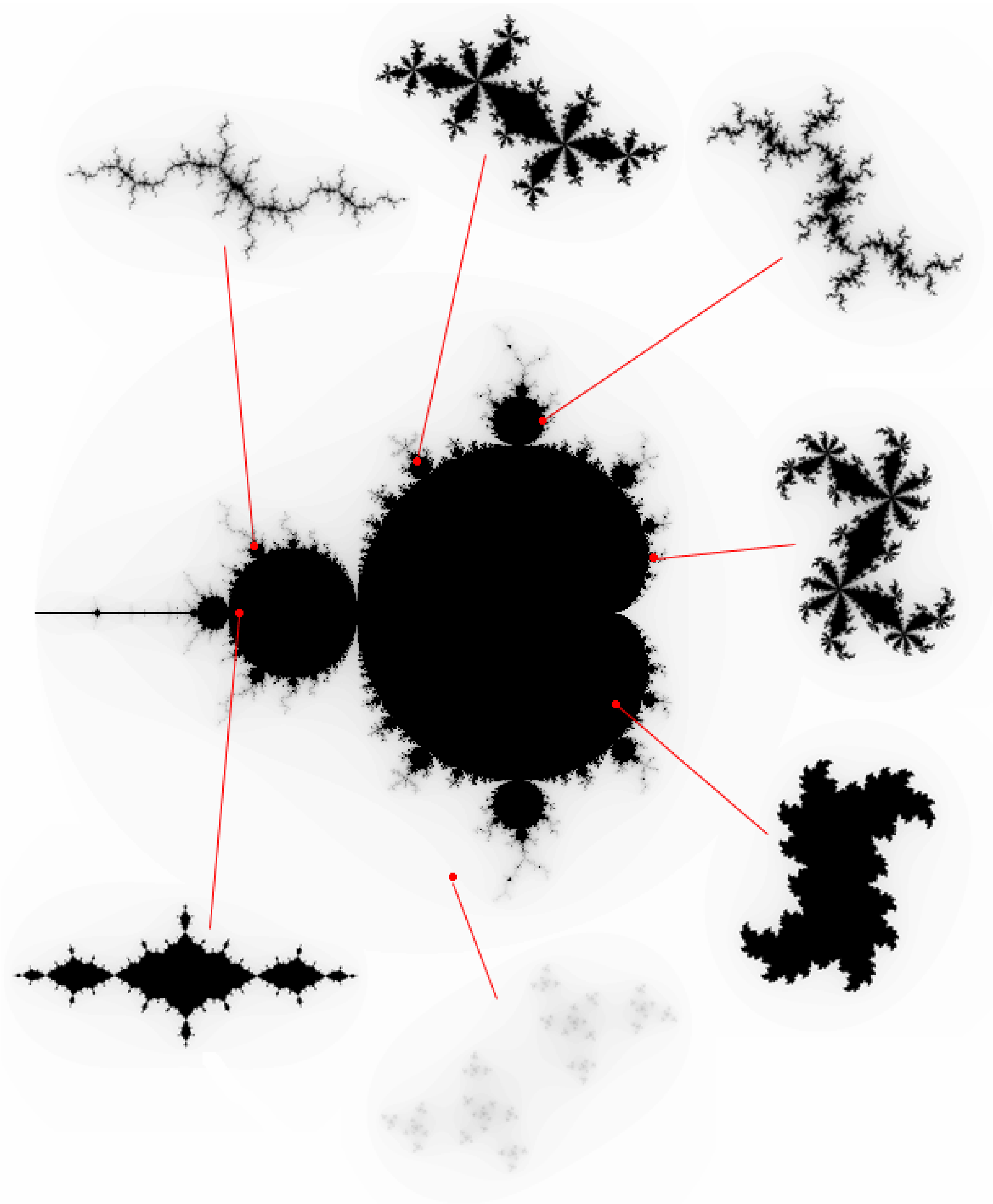


A continuación podemos comprobar la autosimilaridad de dicho conjunto mediante una serie de ampliaciones consecutivas:





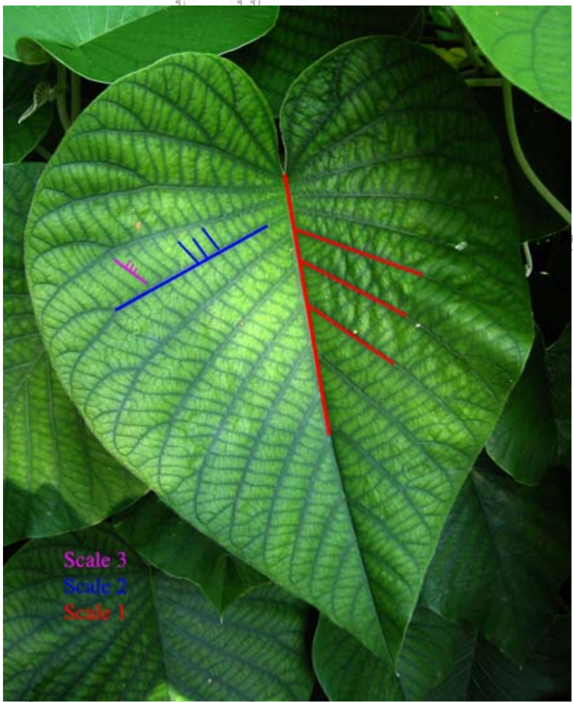
Otra característica peculiar del conjunto de Mandelbrot es que forma una especie de índice de los conjuntos de Julia. Si la constante 'c' fuera la misma para todos los puntos del dibujo, y no dependiera de la posición, obtendríamos los llamados "Conjuntos de Julia". Hay uno diferente para cada punto del plano complejo. Estos conjuntos están completamente relacionados con el Conjunto de Mandelbrot. Para cada punto de éste se puede decir que hay un conjunto de Julia.



Por tanto, los conjuntos de Mandelbrot y Julia están estrechamente relacionados. El conjunto de Mandelbrot itera $z = z^2 + c$ comenzando con $z = 0$ y variando el valor de 'c'. El de Julia, por su parte, itera esa misma función, pero con valores fijos para 'c' y variando los de 'z'. Cada punto 'c' en el conjunto de Mandelbrot especifica la estructura geométrica del conjunto de Julia correspondiente. Si 'c' está en el conjunto de Mandelbrot, entonces el de Julia será conectado (cerrado). De lo contrario, el conjunto de Julia será sólo una colección de puntos desconectados, trazados sobre una gráfica.

Naturaleza Fractal

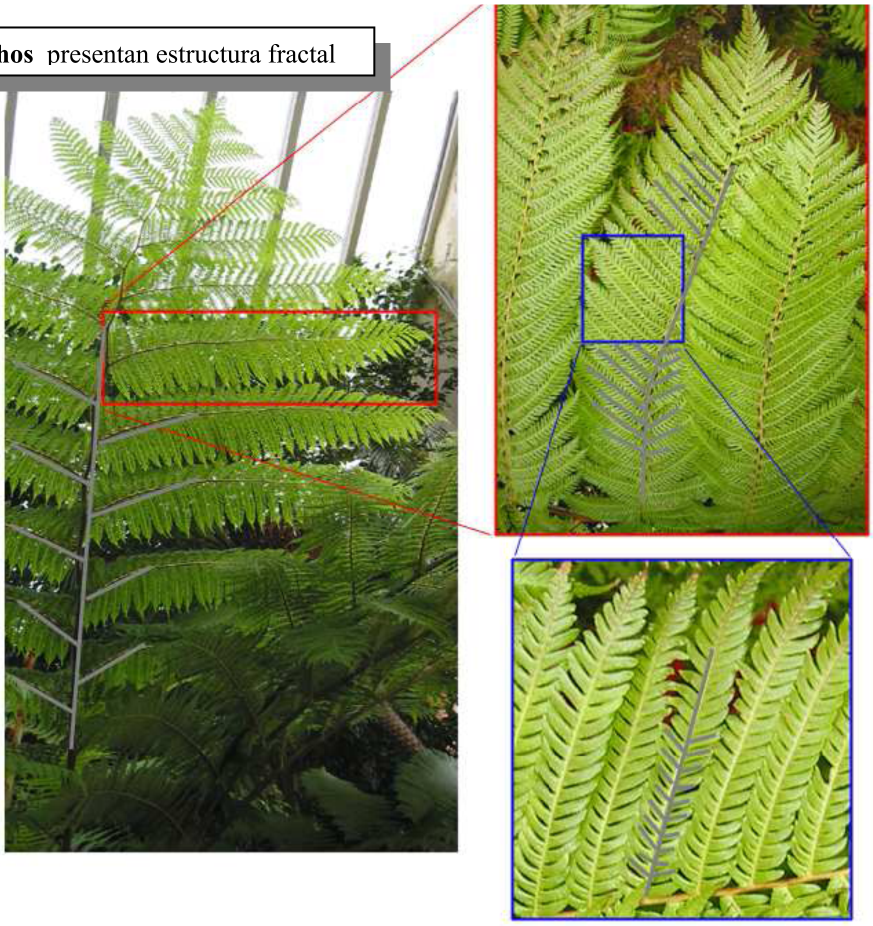
Primero, hay que remarcar que el estudio de los fractales no es algo privativo o exclusivo de las Matemáticas. El estudio y origen de distintos fenómenos que se explican mediante modelos fractales corresponde determinarlo a las disciplinas científicas donde se planteen. También debemos señalar el potencial interdisciplinar de estos objetos, como elementos que pueden constituir el eje sobre el cual distintas disciplinas pueden trabajar coordinadamente. Los fractales, desde su primera formulación tuvieron una vocación práctica de servir como modelos para explicar la naturaleza. El propio Benoit Mandelbrot tuvo el mérito de intuir la potencia de los fractales para construir modelos que explicasen la realidad, esto lo hizo desde su primera formulación y desde sus primeros trabajos que, con un notable afán práctico y divulgador, estuvieron dedicados al problema de medir la costa de Gran Bretaña. En su tan citada obra *The Fractal Geometry of Nature*, Mandelbrot razonó que la naturaleza entiende mucho más de geometría fractal que de geometría diferenciable. A partir de ahí, muchos científicos se han encontrado fractales en sus campos de estudio (el título de uno de los libros sobre el tema es bastante sugerente, *Fractals Everywhere*).

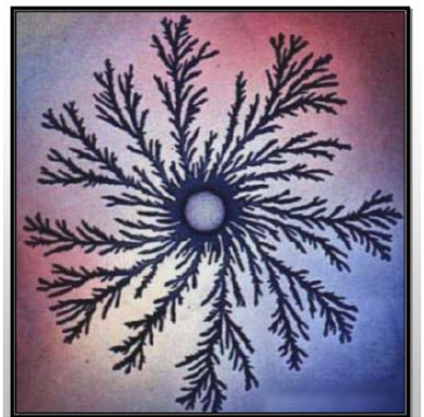


Otra cosa que hay que señalar es que, por su novedad, este dominio de las matemáticas está lleno de intuiciones muy acertadas, pero también de ambigüedades ¿Qué criterios se pueden seguir para decir que un objeto real tiene estructura de fractal? Está claro que un criterio puede ser el de la simple percepción visual o intuición. A la vista de algo está claro que alguien exclamaría esto es un fractal. Esto ya constituye un criterio bueno y que vale para trabajar a un nivel básico. A continuación podríamos investigar algo más, y comprobar que lo mismo que se ve a gran escala se ve a pequeña escala, lo cual nos da una idea de recursión o de autosimilitud. O que se parece a un árbol, lo cual nos da una idea de ramificación. Este lenguaje que es vago e impreciso no está muy lejos, aunque parezca extraño, del significado científico que se atribuye a un objeto real o natural cuando se dice que es un fractal. Por ejemplo ¿qué se quiere decir cuando se dice que una zona costera es un fractal? Desde luego no quiere decirse que haya una curva y una fórmula matemática que se ajuste de forma precisa al perfil del litoral. Lo que quiere decirse es que puede definirse un modelo matemático fractal, que se ajusta con unas cotas máxima y mínima de error, cotas que se pueden determinar de forma precisa, al perfil de la costa. La cuestión que se plantea a

continuación es si un objeto con estas características, un trozo de costa, la red arterial, son realmente fractales, o dicho de otra forma si existen realmente fractales en la naturaleza. Esta pregunta, que es legitimo hacerla, e incluso responderla negativamente, es decir negando la existencia de los fractales en la naturaleza, es la misma que se hace cuando se pregunta si existen superficies planas o líneas rectas en la naturaleza, o si existen esferas. Sería como suponer que en la naturaleza no existen esferas porque la Tierra, u otros planetas, no se ajustan con precisión a lo que es una esfera ideal tal como se define en Matemáticas. En la naturaleza los objetos fractales suelen aparecer de varias formas. Una de ellas es en una situación de frontera, y aquí incluimos todos los casos en que entran en contacto dos medios humanos, naturales, físicos, químicos, etc. o dos superficies diferentes: frontera entre países, riberas de los ríos, litoral, nubes,.... Es decir aquellos casos en que se produce una ramificación con autosimilitud: árboles, arbustos, y plantas, tejidos arteriales, cuencas fluviales con sistemas de ríos, afluentes, barrancos, riachuelos, etc. redes capilares, redes pulmonares,...

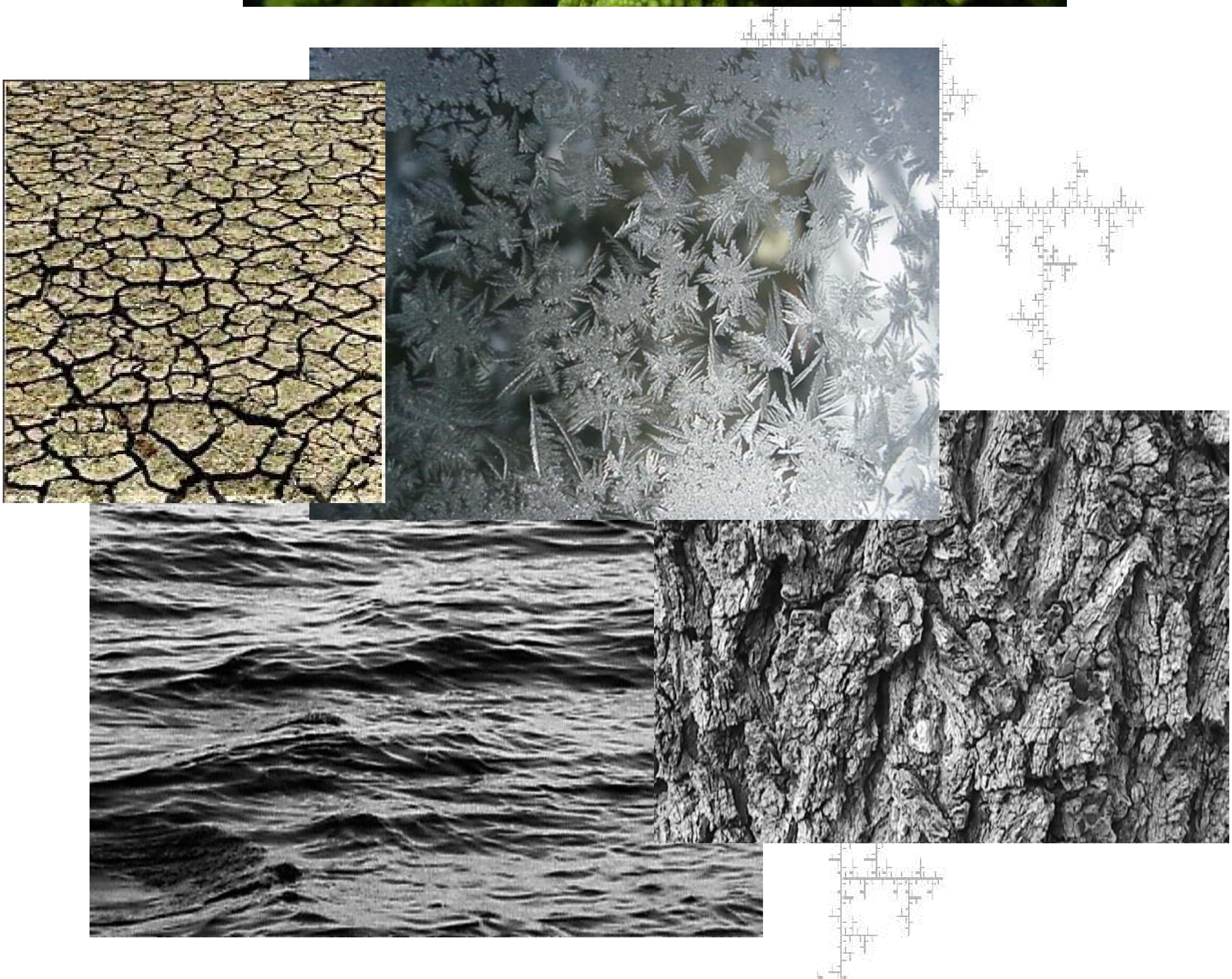
Los **helechos** presentan estructura fractal





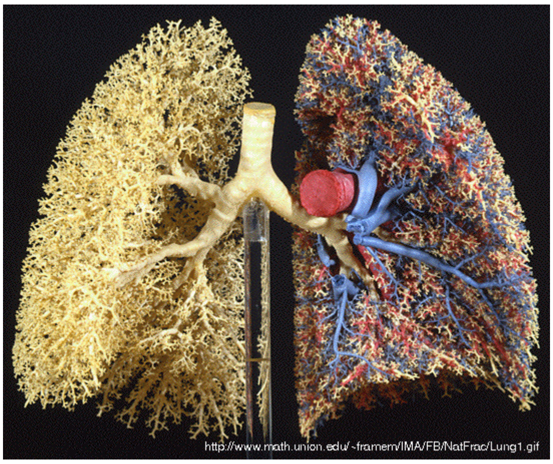
Bacterial colony

El **romanescu**, de la familia de las *Brassicáceas* es un híbrido de brócoli y coliflor.



Otros ejemplos de estructuras fractales son: los cristales de hielo, la corteza de un árbol o la estructura de las olas.

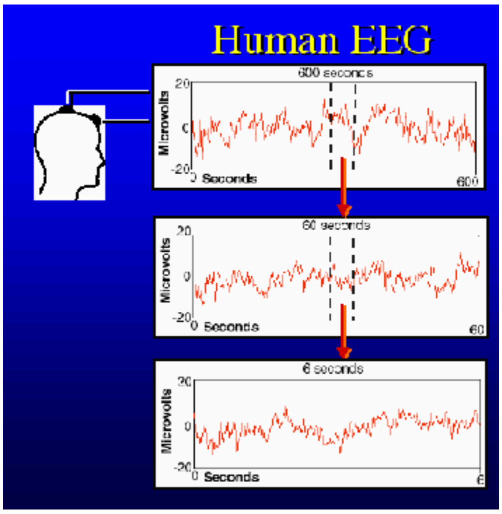
Por su parte los científicos han identificado fractales en la forma de las galaxias, las costas marítimas, las montañas y perfiles rocosos, los perfiles de los bosques, las fronteras, etc., y en procesos físicos y químicos, por ejemplo, la cristalización, las fracturas de materiales, los movimientos de partículas, las descargas eléctricas, la electrólisis y los procesos físicos de ramificación, agregación y turbulencia. También se relacionan con la aparición de ruido en señales eléctricas (precisamente una especie de conjunto de Cantor en su distribución) e incluso los fenómenos económicos o sociológicos.

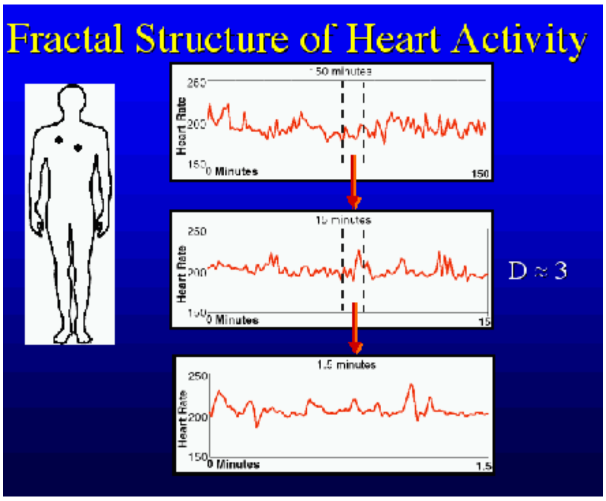


En nuestro organismo, por ejemplo, el sistema circulatorio, la ramificación de venas, arterias, nervios, la estructura de los pulmones, ramificación de tumores cancerígenos.

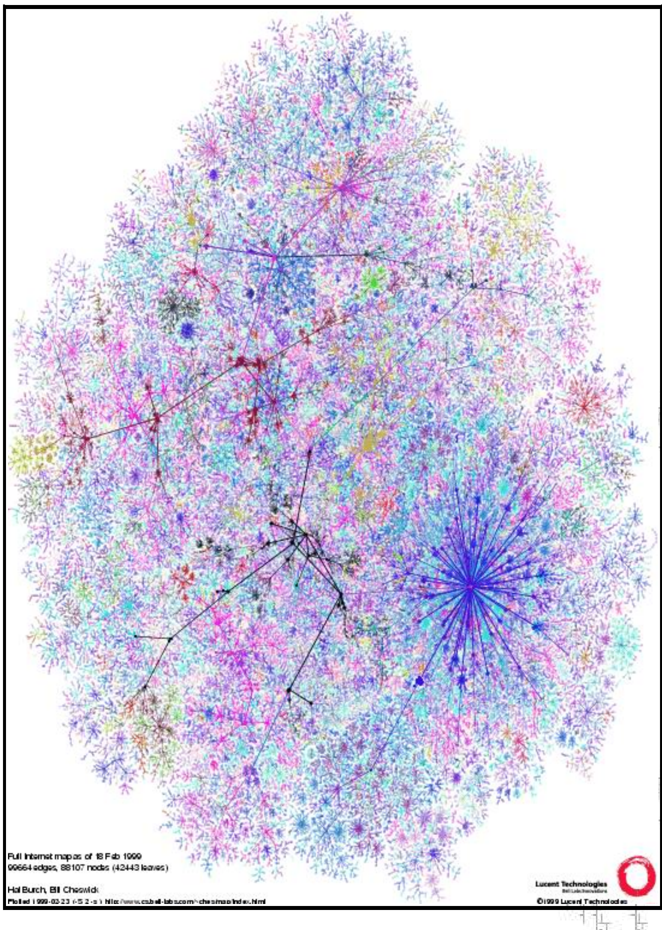
Es importante señalar que aunque los fractales no permiten explicar ni dar modelos para describir todas las formas de la naturaleza, nos encontramos frente a un planteamiento que permite describir y dar respuesta a formas geométricas tan distintas como las que tienen los objetos descritos. Además, el planteamiento es muy atractivo por lo menos por dos razones: primero por su sencillez, y por su capacidad para ser computerizado en forma relativamente sencilla, y segundo por dar modelos para representar y describir algorítmicamente una gran variedad de formas de la naturaleza.

Curiosamente, también se observan estructuras fractales en los registros de encefalogramas y electrocardiogramas:





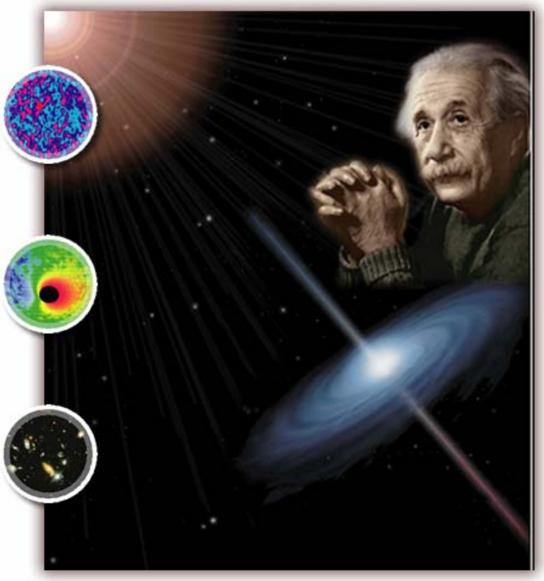
Un ejemplo anecdótico, ya que obviamente no forma parte de ninguna estructura natural, es Internet. Observemos la geometría de la siguiente fotografía, donde se presenta un mapa de Internet aproximado.



Los fractales abren la puerta a numerosas conjeturas sobre la complejidad del mundo. Las pautas de generación de fractales son extremadamente sencillas si se comparan con los resultados obtenidos. Es posible que numerosos comportamientos de la naturaleza que hoy día se nos antojan extremadamente complicados respondan de igual forma a mecanismos de enorme sencillez. La geometría fractal es una rama muy joven cuyos progresos deben repercutir muy directamente en una creciente utilidad de la geometría fractal para el estudio de la realidad.

Por último, si ya ha quedado patente como los fractales conforman gran parte de las estructuras de la naturaleza:

¿Por qué no pensar que el propio Universo es un "gran fractal"?



SOBRE LA TEORÍA del CAOS y los FRACTALES

Como ya se ha comentado, a pesar de que la historia de los fractales comienza en los últimos días del siglo XIX, gran parte del XX permanece ajena a ellos. En las últimas décadas del siglo, y casi paralelamente a la evolución de la investigación de los sistemas caóticos, los fractales van cobrando un auge creciente, hasta convertirse en un concepto cada vez mas extendido en todas las ciencias.

La palabra caos ha estado tradicionalmente asociada a los conceptos de confusión y desorden. De hecho el Diccionario de la Real Academia Española lo define como aquel estado amorfo e indefinido que se supone anterior a la ordenación del cosmos. Esta misma acepción es la tiene en el Génesis, el primero de los libros bíblicos, que en su segundo versículo dice: “La tierra era un caos informe; sobre la faz del abismo, la tiniebla”.

Sin embargo desde hace más de tres décadas en el mundo científico se habla reiteradamente de ***Teoría del Caos***. Hablar de Teoría, cuyo significado alude a un conjunto de leyes que sirve para ordenar los conocimientos de una serie de fenómenos y al mismo tiempo de Caos, que significa y sugiere desorden, parece una contradicción en sus propios términos. ¿Tiene sentido hablar de una teoría del desorden, de una Teoría del Caos? Es esta aparente paradoja la que dicha Teoría viene a resolver, mostrando que efectivamente existe un orden subyacente en los aparentemente más desordenados e impredecibles de los comportamientos naturales.

El concepto de caos, con su inevitable referencia al orden subyacente en el desorden resultó atractivo desde el primer momento no sólo a la comunidad científica, sino al público en general. Buena prueba de ello es el éxito que las metáforas sugeridas por esta teoría ha tenido, y sin duda seguirá teniendo, en la industria audiovisual. Como ejemplo de ello baste citar algunas reciente producciones cinematográficas como *“El efecto mariposa”* (2004) o la existencia de bandas musicales en cuyo nombre aluden a la Teoría del Caos a través de una de las imágenes más sugestivas relacionadas con el caos, el denominado efecto mariposa.

DEFINICIÓN DE CAOS DETERMINISTA

¿Qué es la Teoría del Caos? Esta teoría puede ser definida como el estudio cualitativo del comportamiento dinámico aperiódico mostrado por sistemas deterministas no lineales. Así presentada esta definición requiere algunas explicaciones, necesarias para el no iniciado, si se quiere acceder a una correcta comprensión de la misma.

En primer lugar hay que precisar que caos alude a **sistemas dinámicos**, es decir aquellos que experimentan variaciones en el tiempo. Si estas variaciones son tales que ninguna de las propiedades o variables que caracterizan los cambios observados experimenta repeticiones regulares de sus valores, la dinámica se dice que es

aperiódica. Es fácil entender que un sistema que muestre una dinámica aperiódica es esencialmente impredecible. Lo que resulta admirable y sorprendente de la Teoría del Caos es que un comportamiento aperiódico pueda ser interpretado en términos matemáticos y verificado en sistemas sencillos. De hecho veremos que sistemas que se describen matemáticamente mediante un conjunto sencillo de ecuaciones manifiesten un comportamiento tan complejo e impredecible como el que se observa en los sistemas aleatorios.

Por otra parte **el término determinista** alude al hecho de que cualquier evolución futura del sistema es una consecuencia de las condiciones en las que se encuentra el sistema en el instante inmediatamente anterior. Precisamente el impacto que la formalización del comportamiento caótico ha tenido en la Ciencia de nuestro tiempo es consecuencia del hecho de que vino a romper la concepción de la Naturaleza que se tenía desde los trabajos de Newton (1643-1727) y Laplace (1749-1827). Las aportaciones de Isaac Newton están estrechamente asociadas con el establecimiento del determinismo en la ciencia moderna, mientras que el segundo filósofo, físico y matemáticos francés enunció la máxima determinista por excelencia al afirmar que el comportamiento futuro de cualquier sistema podría predecirse si se conocieran con suficiente exactitud los valores de las variables, parámetros y leyes que controlan un sistema. Entre ambos construyen un modelo del universo similar a un juego de billar en el que el comportamiento de los planetas es la consecuencia matemática de las fuerzas y leyes que operan sobre las mismas hasta el punto de que es posible predecir no sólo el comportamiento futuro de los mismos sino el pasado también, como si de una película se tratara. Desde el trabajo de estos autores el determinismo constituye una de los más importantes conceptos de la ciencia de nuestro tiempo.

Por último **un sistema es no lineal** cuando los efectos no son proporcionales a las causas, es decir sistemas que obedecen a patrones predecibles. Durante siglos las matemáticas y la física sólo se desenvolvieron con seguridad en este ámbito: ecuaciones lineales, funciones lineales, álgebra lineal o programación lineal eran y son bien comprendidos. Pero los problemas no lineales son más difíciles de estudiar debido precisamente a que los sistemas de este tipo no se comportan de manera “directa” y por tanto no pueden resolverse con las técnicas tradicionales.

Sin embargo <u>el mundo real es raramente lineal</u>. Afrontar el análisis y descripción de la naturaleza no lineal con los recursos de las matemáticas fue el gran reto que numerosos científicos y matemáticos abordaron a lo largo del siglo XIX y una de cuyas consecuencias más radiantes es la Teoría del Caos. De hecho, el descubrimiento y formalización de esta teoría se ha dado en considerar como una nueva revolución en la Física del siglo XX, comparable a la que en su día provocaron la relatividad y la teoría cuántica.

UN EJEMPLO DE CAOS: EL ATRACTOR DE LORENZ

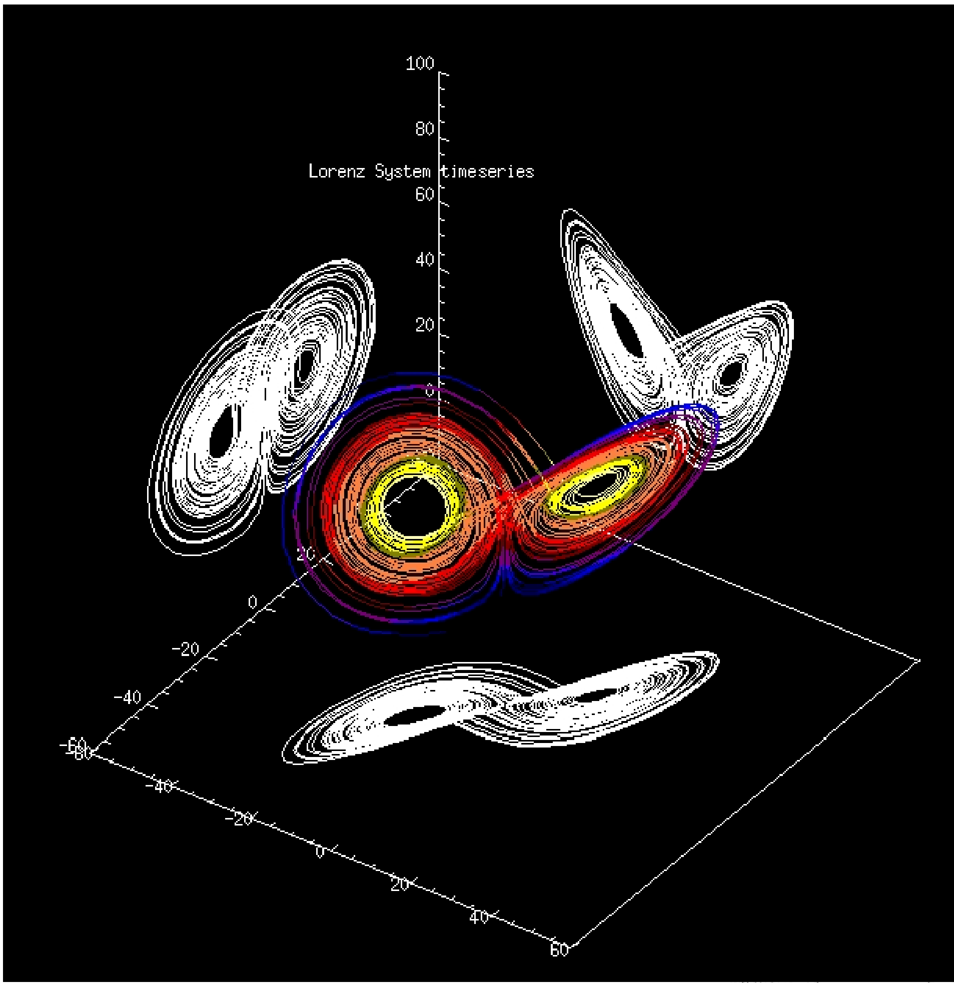
Una vez presentado y definido el concepto de Caos determinista podemos avanzar algo más en su compresión por la vía del estudio de un ejemplo de referencia. El primer “investigador” de la Teoría del Caos propiamente dicho fue un meteorólogo, Edward Lorenz. Lorenz había iniciado en la década de los sesenta una serie de investigaciones dirigidas a resolver el problema de la predicción meteorológica. Para ello diseñó un modelo matemático simplificado basado en tres ecuaciones diferenciales bien conocidas en el ámbito de la física de fluidos.

Modelo simplificado de Lorenz:

$$dx/dt=\delta\cdot(y-x)$$
$$dy/dt=r\cdot x-y-x\cdot z$$
$$dz/dt=x\cdot y-b\cdot z$$

Estas ecuaciones son ecuaciones diferenciales, un tipo especial de ecuaciones que utilizan una rama de las matemáticas denominada cálculo. Son muy útiles como herramientas de modelado de sistemas físicos aunque la búsqueda de sus soluciones debe hacerse en la mayor parte de los casos con la ayuda de los computadores. Las ecuaciones diferenciales tienen distintas soluciones, todas ellas dependientes de las condiciones iniciales. O dicho de otra manera, puesto que el sistema de ecuaciones diferenciales constituye un modelo del sistema, conocer la evolución futura del mismo requiere conocer el estado actual del mismo.

Así pues el modelo de Lorenz, consiste en un conjunto de tres ecuaciones diferenciales en la que cada uno de los términos dx/dt; dy/dt; dz/dt indica lo que varían cada una de variables como consecuencia de las relaciones que se dan entre ellas y los parámetros del sistema (δ, r, b). No es este el lugar para entrar a describir con detalle el sentido físico de cada uno de los términos. Bastará con decir que la variable x representa la velocidad de rotación de un cilindro de masa gaseosa; y, la diferencia de temperatura en los extremos del cilindro; z, la desviación de la temperatura del sistema. En cuanto a los parámetros, δ, esta relacionado con la viscosidad y la conductividad térmica de la masa de aire; r, con la diferencia de temperatura entre la parte superior e inferior de la columna y b, con la altura y anchura de la misma.



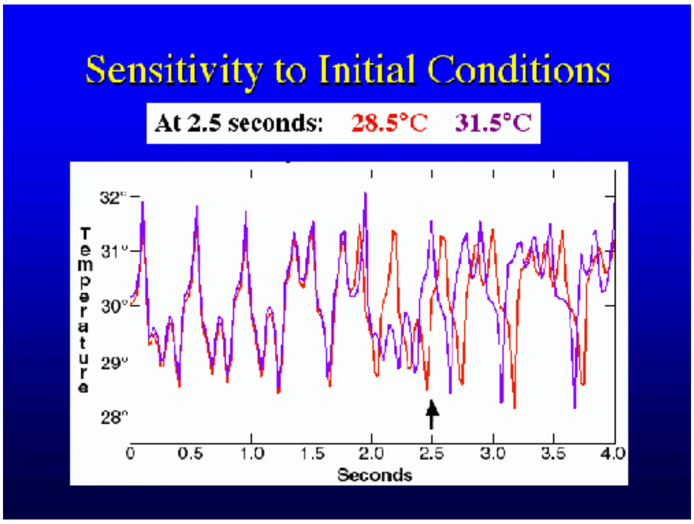
Atractor de Lorenz

La representación en un espacio tridimensional de los valores que las variables x, y, z adoptan con el tiempo a partir de unos valores iniciales dados y para unos valores de los parámetros da como resultado la imagen que se muestra en la anterior, conocida como el **atractor de Lorenz**. La representación de las órbitas seguidas (secuencia de valores de x, y, z para cada instante de tiempo) configura una imagen tridimensional asociada a la dinámica caótica del sistema que se denomina **atractor extraño**. En este puede observarse que las trayectorias se pliegan sobre sí mismas, confinadas en una región del espacio, moviéndose infinitamente sin pasar nunca por el mismo sitio, sin cruzarse nunca.

PROPIEDADES DEL CAOS

La comprensión de la esencia del caos requiere la descripción de sus propiedades más significativas. Sin duda la más llamativa de todas conocida como extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. De hecho esta fue la clave para que Lorenz detectara la dinámica caótica en su modelo.
En un momento dado este investigador quiso reproducir una trayectoria que previamente había obtenido y pero en lugar de iniciar la secuencia a partir de los valores iniciales se propuso hacerlo a partir de un punto intermedio. Para ello introdujo en el programa de integración numérica los valores de las variables para ese instante de tiempo. Lo que observó entonces le sorprendió por inesperado: la nueva trayectoria se

desviaba hasta acabar en un punto totalmente distinto del original. Esto se ilustra en la siguiente figura.



Extrema sensibilidad a las condiciones iniciales

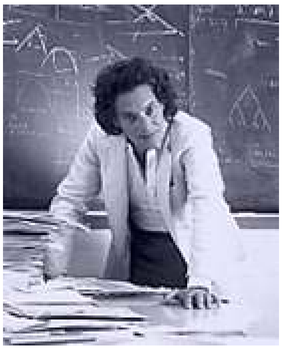
Poco después descubrió que lo ocurrido fue consecuencia de que en lugar del valor exacto de las variables, que previamente habían sido calculadas hasta la 6ª cifra decimal, sólo introdujo en el programa ¡las tres primeras! En cualquier sistema no caótico esto hubiera tenido efectos indetectables o ningún en absoluto sobre la evolución temporal del sistema. El hecho de que en este caso una variación en la 4ª cifra decimal (totalmente fuera del alcance de cualquier sistema de medida experimental) tuviera consecuencias tan dramáticas en la evolución del sistema era algo nunca visto antes.

Este efecto es el conocido como el **Efecto Mariposa**: la diferencia entre los valores iniciales de las dos curvas es tan pequeña que es comparable al aleteo de una mariposa. O dicho de otra manera en el contexto de los estudios de predicción metereológica de Lorenz:

"el aleteo de una mariposa hoy provoca un cambio minúsculo en el estado de la atmósfera. Con el tiempo la evolución de la atmósfera es tal que diverge extraordinariamente del que hubiera tenido de no haberse producido tal aleteo, de tal manera que puede llevar a que se genere, al cabo de un mes, un huracán en Florida que no hubiera ocurrido de no ser por el aleteo. O que no se produzca un tornado que si no es por el aleteo que hubiera tenido lugar".

Este fenómeno, común en la Teoría del Caos, se conoce sensibilidad a las condiciones iniciales: basta un pequeño cambio en estas para que el comportamiento a largo plazo sea totalmente diferente. Y puesto que es imposible medir con tal alto grado de precisión ninguna variable, la conclusión es que en este tipo de sistemas es imposible predecir la evolución futura, particularmente a largo plazo.

Otra de las propiedades del caos determinista es la **ubicuidad**. Se viene observando la presencia del fenómeno caótico en un gran número de sistemas de la más variada procedencia entre los que no son los menos importantes los biológicos. Una interesante cuestión que se puede plantear aquí es cual es la razón de que a pesar de su ubicuidad, el caos determinista se ha descubierto y detectado hace relativamente poco tiempo. Algunas de las razones que pueden explicar este hecho tienen que ver precisamente con los computadores. Los cálculos implicados en el estudio del caos son repetitivos, tediosos y se requieren por millones. Esto ha impedido que se avanzara es este campo, hasta que los computadores, con su inmensa capacidad de cálculo, fueron accesibles. En este sentido los computadores son para los estudiosos del caos como los microscopios para el biólogo: sin ellos no es posible la exploración fina del caos. Pero además es preciso tener en cuenta que por sus características es difícil distinguir el comportamiento caótico del simplemente aleatorio.



La tercera propiedad significativa del caso determinista es la existencia de un camino universal hacia el caos. La aparición del comportamiento caótico responde a unas pautas comunes, independientemente del tipo de sistema del que se trate. Fue Mitchell Feigenbaum quien en 1978 demostró la existencia de este "orden interno", la existencia de una ruta universal hacia el caos. Esta ruta consiste en un incremento exponencial de la complejidad de la respuesta dinámica del sistema a medida que se varía alguno de los parámetros del mismo. Dicha respuesta pasa sucesivamente por fases de comportamiento periódico oscilatorio en las que el periodo de oscilación se incrementa exponencialmente hasta llegar a la situación de periodo infinito, es decir caos.

La razón de convergencia de las sucesivas etapas de amplificación del periodo de oscilación es siempre la misma, independientemente del sistema de que se trate. Es la llamada **constante de Feigenbaum**, cuyo valor aproximado es 4.6692016091029.

Si en el Conjunto de Mandelbrot se estudia detenidamente la sucesión de círculos cada vez más pequeños que se extiende horizontalmente en el sentido negativo del eje de las x y se obtienen los diámetros de los sucesivos círculos d_1, d_2,…, se puede llegar a obtener el límite

$$\delta = \lim_{i\to\infty} \frac{d_i}{d_{i+1}} = 4{,}66920160910299067185320382\dots$$

cuyo valor es la constante de Feigenbaum. La universalidad de la constante de Feigenbaum es un hecho fascinante que hoy por hoy desafía a la ciencia.

¿QUÉ RELACIÓN TIENEN LOS FRACTALES CON EL CAOS?

Caos no es sinónimo de fractal, aunque a veces se hable de los temas conjuntamente, o se ilustren trabajos de caos con imágenes fractales. La geometría fractal suele considerarse como la geometría que describe los sistemas caóticos que encontramos en la naturaleza. Los fractales son un lenguaje, una manera de describir una geometría. La geometría fractal describe en algoritmos, cómo crear el fractal. Los computadores traducen estas instrucciones a los magníficos patrones que vemos como imágenes fractales.

Los sistemas caóticos no son aleatorios, ni desordenados, solo lo parecen. Detrás de su comportamiento aparentemente aleatorio hay un sentido de orden y patrones. Los verdaderos sistemas aleatorios no son caóticos. Los sistemas caóticos son determinísticos, significa que tienen una ecuación determinando su comportamiento.

Las palabras claves del caos son: impredictibilidad, sensibilidad a las condiciones iniciales, en tanto que el grupo de ecuaciones determinístico describe el fenómeno. Las palabras claves de los fractales son: autosimilitud e invarianza en la escala. Muchos fractales no son caóticos como el Triángulo de Sierpinski, o las curvas de Koch. Aun así, partiendo de bases distintas, los dos ámbitos tienen mucho en común: muchos fenómenos caóticos exhiben estructuras fractales (en los atractores extraños por ejemplo...; la estructura fractal también es obvia en fenómenos caóticos con sucesivas bifurcaciones como las ecuaciones logísticas o de población).

El carácter fractal se manifiesta en el caos en varios aspectos. En primer lugar la geometría de los atractores extraños es fractal. Si se representan las órbitas de un atractor extraño y se amplían sucesivamente se puede observar la autosimilaridad propia de los fractales, en la que aparece y reaparece la misma estructura. Asimismo se han detectado estructuras fractales en algunas regiones separatrices de las cuencas de atracción de dichos atractores y en los denominados diagramas de bifurcación de aquellos sistemas en los que existe caos.

Hasta no hace mucho tiempo un código implícito entre los científicos era que los sistemas sencillos se comportan de modo sencillo y que el comportamiento complejo era el resultado de causas complejas. La aparición de la Teoría del Caos viene a desmontar este prejuicio: los sistemas sencillos pueden dar lugar a comportamientos complejos y los sistemas complejos no necesariamente llevan asociados respuestas complejas. Este conocimiento sin duda contribuye a una mejor comprensión de nuestro mundo, pero al mismo tiempo aleja la posibilidad de poder controlarla.

Gracias a los descubrimientos de la teoría del caos y de la geometría fractal, los científicos han podido comprender cómo sistemas que anteriormente se creían totalmente caóticos, ahora exhiben patrones predecibles.

APLICACIONES DE LOS FRACTALES

Además de ser de gran utilidad en sistemas dinámicos, los fractales tienen aplicación en muchas disciplinas. A continuación se han resumido algunas de ellas.

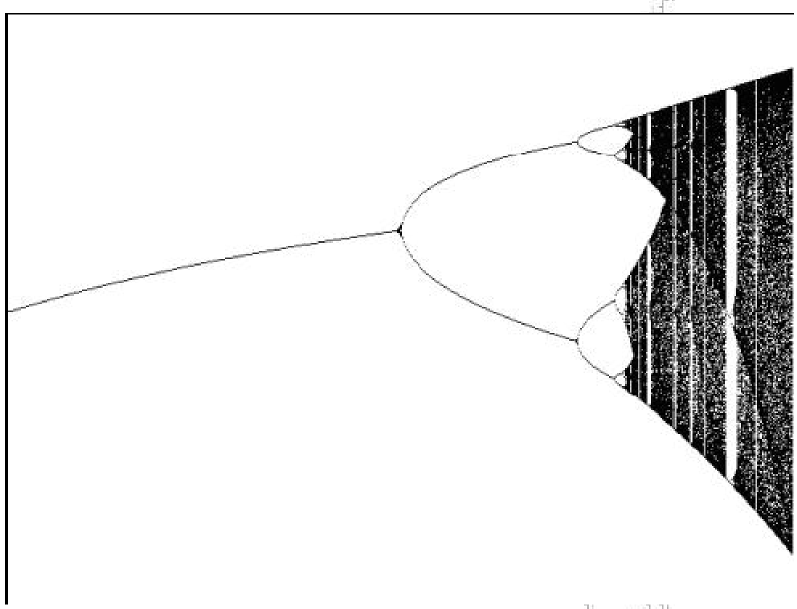
MODELOS DE POBLACION

En los años 50 se modelaron los cambios de distintas poblaciones a través de ecuaciones matemáticas. Así se veía cómo un cierto factor, que podría ser el suministro de alimentos o la constante de crecimiento por ejemplo, alteraba a la población.

Estas ecuaciones son recursivas: Se parte con un valor, se introduce en la ecuación para conseguir un nuevo resultado, que entonces se usa como el valor inicial en la siguiente iteración. Implica que la población final de un año es la inicial del siguiente.
Un sistema como este fue usado por Robert May, llamado mapeado logístico del proceso de Verhulst.

$$y_{n+1} = k \cdot y_n (1-y_n) \quad \textit{(curva logística)}$$

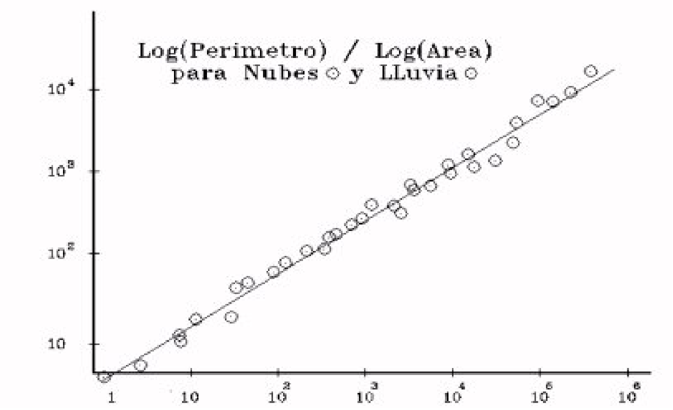
donde 'y' es la población (entre 0 y 1), y 'k' representa la constante de crecimiento. Para 'k' entre 1 y 3, la población se estabilizará en torno a un valor fijo. Cuando vale 3, el periodo se duplica a 2. Un año la población es muy alta, provocando una baja de población al año siguiente, que hace que el próximo año la población aumente. Para k=3.45, el periodo se dobla a 4, lo que significa que la población tiene un ciclo de cuatro años. Este periodo se duplica cada vez más rápido, para 3.54, 3.564, 3.569, y así. En 3.57 ocurre el caos. La población nunca se fija en un periodo. Para la mayoría de los valores de 'k' entre 3.57 y 4, la población es caótica, pero hay regiones periódicas. Para cualquier periodo fijo, habrá un valor de 'k' que produzca ese periodo. La población total tiende a estabilizarse (no cambiar de un periodo a otro) para ciertos valores de 'k'. Sin embargo, al variar muy levemente este parámetro, el total de la población puede no estabilizarse en un solo punto, sino oscilar entre 2, 4, 8 o incluso muchos más. Esta variación no es lineal con respecto a 'k', sino que arroja la siguiente curva de 'k' respecto al valor final de estabilización:



Si ‘k’ es pequeña, la población se estabiliza en torno a un punto. A medida que ‘k’ aumenta, la población tiende a cambiar entre dos valores específicos. En un cierto punto la población se estabiliza en torno a cuatro valores específicos, luego rápidamente en torno a ocho, y así sucesivamente hasta que hay tantos valores distintos para la población que pareciera ser un fenómeno aleatorio. Si nos acercamos al gráfico veremos como la estructura inicial se repite microscópicamente, es decir, el diagrama presenta estructura fractal.

PREDICCIONES METEOROLÓGICAS

En el campo de las aplicaciones puramente meteorológicas, Lovejoy publicó un par de estudios confirmando la sospecha de la posibilidad de modelizar nubes mediante fractales. Pocos gráficos de los comúnmente manejados en Meteorología resultan tan 'rectos' como la figura siguiente en la que se muestran relaciones Area-Perímetro de nubes y zonas de precipitación. Los datos provienen de observaciones Radar en zonas Atlánticas tropicales con precipitaciones superiores a los 2 mm./hora, y de la banda infrarroja de satélites geoestacionarios sobre el Océano Indico con lecturas inferiores a los -10º . Las áreas oscilan entre uno y un millón de Kilómetros cuadrados. La dimensión del perímetro, ajustada en un rango de seis órdenes de magnitud es 4/3.



De manera similar, hay evidencia de que la localización geográfica de epicentros en temblores exhibe un patrón fractal, y en la actualidad la dimensión fraccional (dimensión fractal) de la superficie irregular de una falla en un material ya se utiliza como medida indirecta de su resistencia y dureza.

VISUALIZACION DE FENOMENOS BIOLOGICOS

Uno de los objetivos de las Ciencias Naturales es encontrar los principios que unifican aparentemente a diversos fenómenos. Con este objetivo en mente se han aplicado nociones y métodos computacionales para comprender mejor los mecanismos que gobiernan formación de patrones en organismos vivientes. Hay mucha investigación dedicada a modelar y visualizar plantas, esponjas, y la simulación de su crecimiento usando el formalismo de los Lindenmayersystems (L-systems). También se pueden simular gráficamente los modelos químicos de reacción y difusión.

Los resultados incluyen hasta ahora una recreación realista de que la formación de patrones en la pigmentación de las conchas marinas. También se han desarrollado herramientas de simulación basadas en la geometría fractal para generar árboles, flores, arbustos, donde algunos de estos modelos son muy fidedignos a la realidad.

Para visualizar el resultado de simulaciones se usan modelos morfogenéticos (generadores de formas) que usan técnicas computacionales gráficas. Estos modelos pueden ser usados para propósitos de sintetizar imágenes y como herramienta de investigación para estudiar la morfogénesis en la naturaleza.

COMPRESION FRACTAL DE IMAGENES

La compresión fractal es una tecnología bastante controvertida, con detractores y admiradores. La idea básica detrás de la compresión fractal de imágenes, es expresar que la imagen es un sistema de funciones iteradas (IFS). La imagen puede mostrarse rápidamente, y un zoom proporciona infinitos niveles de detalles fractales (sintéticos). El problema es como generar eficientemente la imagen IFS.

Cosas que saber sobre compresión fractal:

- Es un método de compresión que pierde un poco de información (como JPG).
- La resolución al agrandar es poderosa, pero no una forma de comprimir 100:1.
- La compresión es lenta, la descompresión es rápida.
- La tecnología está patentada.

Dado que los fractales matemáticos servían para generar imágenes que se veían naturales, se pensó que también podría servir en el sentido opuesto para comprimirlas. La idea es tomar una imagen y llevarla a un sistema de funciones iterado, que podría generar el original. Este problema aun no se ha resuelto.

Fue Barnsley, quien en 1988 anuncio al mundo que si lo había resuelto, patentando la tecnología. El problema fue que tomaba alrededor de 100 horas para codificar una imagen, y alrededor de 30 minutos para decodificarla, con una persona guiando el proceso. El resultado era una compresión 10.000:1. Poco después con uno de sus alumnos de doctorado, desarrollo un sistema para representar imágenes llamado Sistema de Funciones Iteradas Particionado (PIFS). Un algoritmo que comprimía automáticamente la imagen en un Sistema de Funciones Iterado Particionado. El algoritmo no era sofisticado, ni rápido, pero si automático. El costo fue que una imagen de 24-bit colores podía ser comprimido de 8:1 a 50:1, lo cual aun es bastante bueno. Todos los programas actuales de compresión de imágenes fractales (que no son muchos) se basan es este algoritmo. La empresa "Iterated Systems", vende el único compresos/decompresor comercial, llamado "Images Incorporated". También hay varios programas de académicos disponibles gratuitamente en Internet.

Actualmente la técnica de compresión fractal no supera el estándar de compresión de imágenes JPEG ni el JPEG2000.

MÚSICA FRACTAL

Beethoven, Bach y Mozart pasaron a la historia como grandes compositores. Pero lo que reveló hace años el estudio de los fractales es que su música presenta ciertas propiedades fractales.

La coral situada al final de (Kunst der Fuge) (1749) de Johann Sebastian Bach es un ejemplo de pieza autosemejante. En ella los mismos motivos son repetidos una y otra vez con distintas variaciones dentro de una región mayor de la pieza. Así, por ejemplo, varias voces repiten al doble de velocidad la melodía de la voz principal (un motivo se repite por disminución a escalas menores).

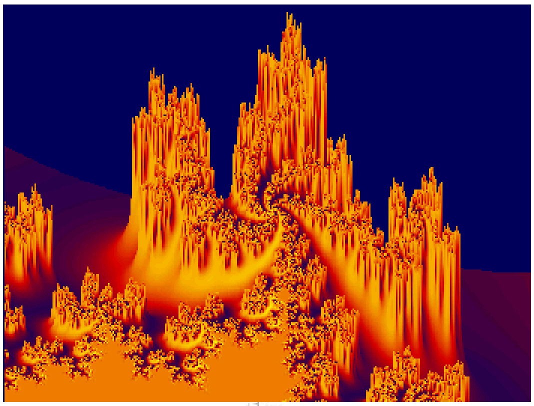
Hay varios trabajos que analizan la manifestación de estructuras fractaliformes en composiciones clásicas: por ejemplo, en algunos se estudia la analogía entre la estructura del conjunto de Cantor y la primera Ecossaisen de Beethoven, así como entre el triángulo de Sierpinski y el tercer movimiento de la sonata para piano número 15, opus 28, también de Beethoven; en otros se analiza la autosemejanza de las fugas de Bach.

La música fractal intenta establecer los potenciales usos de la recursión, la iteración y las matemáticas complejas como una extensión de la composición musical. Así llegamos a que los fractales proveen una inesperada conexión entre las artes musicales y muchos procesos naturales, ya que mezclan cualidades deterministicas y estocásticas para producir naturalmente un agradable y no-estético balance entre predecibilidad y novedad. La estructura jerárquica del fractal autosimilar es análoga a la repetición y desarrollo de motivos musicales usados para crear unidad y coherencia en la música.

Actualmente algunos sintetizadores son usados para crear música *techno* con bases fractales. Cada vez son más los compositores que utilizan el caos o la geometría fractal como apoyo en sus composiciones. Una enorme cantidad de fractales puede ser fácilmente creado con un computador para ser usado como fuente inagotable de ideas musicales.

EL ARTE FRACTAL

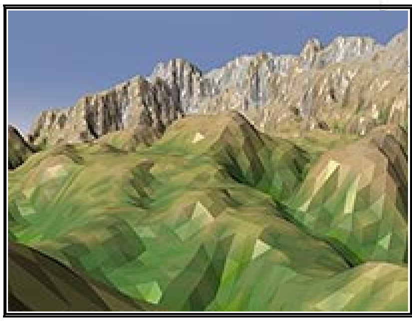
Aplicando tonos de color a algunos fractales complejos como el Conjunto de Mandelbrot o el de Julia, se pueden llegar a interesantes resultados estéticos. Las galerías de imágenes fractales y sus artistas inundan la red. Muchos ocupan programas de dibujo (como Photoshop o Corel) par dar un mejor acabado a sus obras. Algunos también usan algoritmos para hacer paisajes románticos con fractales, como lunas reflejadas en el agua, montañas y puestas de sol, etc. Se ha desarrollado también el campo de los fractales tridimensionales, la incidencia de la luz sobre las montañas o nubes, por ejemplo. Aquí vemos algunos ejemplos de lo que se puede hacer con ecuaciones fractales. Aquí tenemos dos porciones del Conjunto de Mandelbrot llevados a las tres dimensiones.

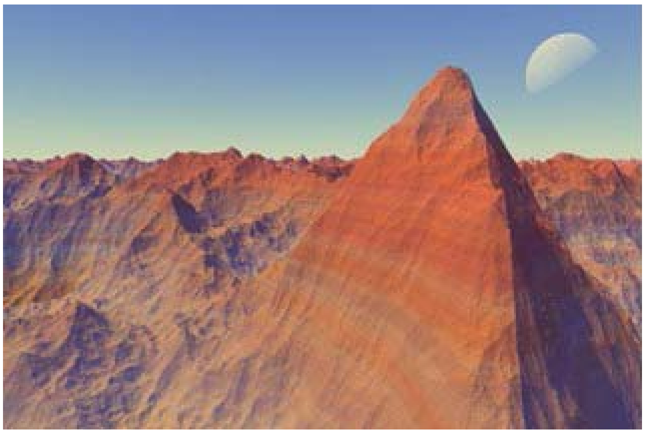
EFECTOS VISUALES

Los fractales han sido llevados al mundo cinematográfico en películas como Star Wars: El Retorno del Jedi (para dibujar la Superficie de la Estrella de la Muerte y la Superficie de la Luna de Endor) y StarTrek II: La ira de Khan (para dibujar la Superficie del planeta Génesis).


Las montañas serían, quizás junto con los planetas, uno de los primeros campos en los que la geometría fractal pudo aplicarse en la Naturaleza. A continuación se muestran algunos ejemplos de paisajes fractales.







Las nubes son irregulares y la clave fractal de su generación está en que los colores reflejados por la nube se funden suavemente unos con otros dando una tenue sensación que se consigue fácilmente con el fractal

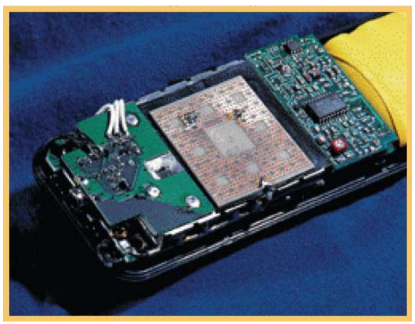
ANTENAS FRACTALES:

En la pasada década, los científicos han comenzado a aplicar los fractales a un tema algo oscuro: el diseño de las antenas.

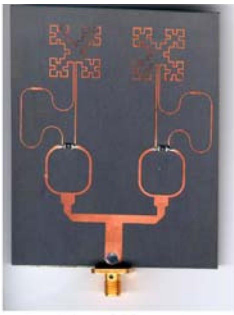
Las antenas parecen ser simples, pero la teoría que tienen detrás, basadas en las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, son impenetrables. Como resultado, los ingenieros de antenas tienen que usar el método de prueba y error. Incluso los mejores y más tecnológicos receptores dependen habitualmente de un hilo que no es mejor que el que usó Marconi para la radio hace cien años.

Los fractales ayudan de dos formas. Primero, pueden mejorar el funcionamiento de los conjuntos de antenas. Muchas antenas parecen estar compuestas de una unidad independiente, incluyendo la mayoría de antenas de radar, pero en realidad están compuestas de formaciones de cientos de pequeñas antenas.

Tradicionalmente, estas antenas individuales se colocan de forma aleatoria o de forma ordenada. Pero Dwight Jaggard de la Universidad de Pensilvana, junto con otras personas, han descubierto que una colocación en forma de fractal puede combinar la robustez de una colocación aleatoria con le eficiencia de una ordenación coherente, con una sola parte del número de elementos.
"Los fractales son el puente que llena los huecos", comenta Jaggard, *"tienen un desorden a corto alcance y un orden a largo alcance"*. Incluso las antenas independientes se benefician de tener una forma fractal. Nathan Cohen, un radio astrónomo de la Universidad de Boston ha experimentado con los cables fractales conocidos como curvas Koch o triángulos de Sierpinski. No sólo se puede meter la misma longitud de antena en una sexta parte del área, sino que las formas angulares generan capacidades eléctricas y conductividad, eliminando que los componentes externos sintonicen la antena entre el rango de frecuencias a las que responden.



El por qué de que las antenas fractales funcionen tan bien fue probado matemáticamente por Cohen y Robert Hohlfeld, que dijeron que tiene que satisfacer dos condiciones: tiene que ser simétrica con respecto a un punto, y tiene que ser similar a sí misma (es decir, tener el mismo aspecto básico en cada escala), para poder ser fractal.



Fractal Array

Standard Array

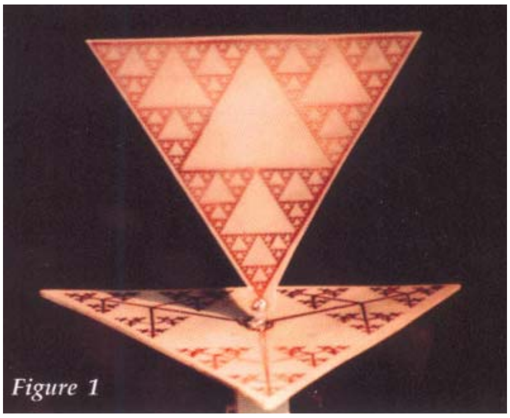


Figure 1

Posiblemente, en un futuro cercano, estas antenas fractales tendrán un uso masivo en el nuevo sistemas da Identificación por Radiofrecuencia que sustituirá a los códigos de barras habituales.

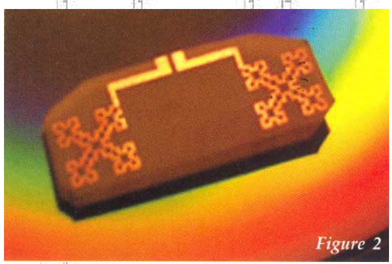


Figure 2

REFERENCIAS

Libros

- B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman, New York, 1982. *(También en versión española).*
- M. Barnsley, Fractals Everywhere, Second Edition, Academic Press, 1993.
- J. Barrallo Calonge, Geometría fractal: algorítmica y representación, Anaya Multimedia, 1993.
- M. de Guzmán, M. A. Martín, M. Morán, M. Reyes, Estructuras fractales y sus aplicaciones, Labor, 1993.

Enlaces de Internet

- Sobre fractales en general:

  http://www.fractal.org/

  http://www.fractales.org/

  http://www.fractalia.com.ar/

  http://classes.yale.edu/fractals/

  http://www.fractaltec.org/

  http://www.geofisica.cl/English/FUM/Fractales/Fractales.htm

  http://perso.wanadoo.fr/charles.vassallo/en/art/sommaire.html#sommaire

- Teoría del Caos y fractales:

  http://hypertextbook.com/chaos/
  The Chaos hipertextbook, Mathematics in the Age of the Computer

  http://ortho.sh.lsuhsc.edu/Faculty/Marino/Temple/Temple.html
  Chaos and Fractal in Biology and Medicine, Andrew A. Marino

  http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/fractals/
  Fractals, Chaos