Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Mayo 2011

1.- El motor de un coche híbrido puede funcionar bien con gasolina, bien de forma eléctrica, según determine un sistema de control del que el vehículo está equipado. Cuando el sistema de control actúa correctamente, selecciona un modo de funcionamiento u otro, de manera excluyente. No obstante, cuando este sistema no actúa correctamente, lo cual hace el $P\,\%$ de las veces, por seguridad, se emplea únicamente el sistema de gasolina. Se sabe que el sistema de control selecciona el sistema eléctrico con probabilidad p_e. Al respecto del sistema de gasolina, se sabe que su funcionamiento correcto es independiente de que el sistema de control actúe (o no) correctamente. El sistema de gasolina funcionará correctamente si, cuando es seleccionado, dos inyectores funcionan correctamente; para tal fin, el coche hace uso de dos inyectores primarios y si alguno de éstos falla, se recurre a un tercer inyector (de reserva). En estas condiciones se sabe que la probabilidad de que el tercer inyector funcione en el supuesto de que el primer inyector primario funcione correctamente y no así el segundo es igual a p_{12} y esa probabilidad es igual a p_{21} cuando funciona correctamente el segundo pero no el primero. Los inyectores primarios funcionan correctamente, en las condiciones indicadas, con probabilidades p_1 y p_2, respectivamente el primero y el segundo, y son independientes entre sí. Al respecto del sistema eléctrico, supuesto que sea el seleccionado por el sistema de control, funciona correctamente con probabilidad p_{efc}. Se pide:

a) Probabilidad de que el motor del vehículo funcione correctamente.

b) Se efectúan N pruebas independientes de funcionamiento del vehículo y éste se considera aceptable si al menos M pruebas ($4 \leq M \leq N$) son superadas siempre que en esas M pruebas se encuentren las dos primeras y las dos últimas pruebas realizadas. Indique la probabilidad de que el vehículo sea aceptado. Si no respondió al apartado anterior, considere que la probabilidad allí pedida es igual a p_{fc}.

c) Se dispone de K de estos coches aparcados en fila en un garaje (con $K/2$ un número par); se sospecha que un inspector va a inspeccionar únicamente los coches en posiciones impares en el garaje y sólo va a dar por buena la partida si todos esos coches son aceptables en los términos del apartado anterior. Indique la probabilidad con la que se aceptaría la partida de K coches de proceder así el inspector, considerados los coches independientes entre sí, en el supuesto de que $K/4$ coches en posiciones pares no sean aceptables (y el resto de los coches en posiciones pares sí). Si no respondió al apartado anterior, considere que la probabilidad allí pedida es p_a.

(2 puntos)

2.- La variable aleatoria $\mathbf{Y}$ se define como $\mathbf{Y} = |\mathbf{X}| + \mathbf{U}$, con $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$ y $\mathbf{U}$ una variable uniforme en el intervalo $[0, \sigma]$, independiente de $\mathbf{X}$. Se pide:

a) $f_{\mathbf{XY}}(x, y)$ y estimador óptimo sin restricciones de la variable $\mathbf{Y}$ como función de $\mathbf{X}$.

b) $f_{\mathbf{Y}}(y)$.

c) $P(|\mathbf{Y} - \mathbf{X}| \leq \sigma)$.

(2 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Junio 2011

1.- Responda a las siguientes preguntas:

a) Sean los sucesos A, B y C, de los que se sabe que A y B son independientes y $C \subset A$. Se pide que indique si B y C son independientes. Caso afirmativo, se pide que lo demuestre. Caso negativo, proponga un contraejemplo.

b) Sean los sucesos A y B, de los que se sabe que son independientes. Se pide que indique si A y $\overline{B}$ son independientes. Caso afirmativo, se pide que lo demuestre. Caso negativo, proponga un contraejemplo.

c) Suponga que la variable $\mathbf{X}$ es tal que su función de densidad cumple $f_{\mathbf{X}}(-x) = f_{\mathbf{X}}(x), \forall x$. Se pide que obtenga una cota a la probabilidad $P(\mathbf{X} < -\delta)$, con $\delta \in \mathbb{R}^+$ como función de $E\{\mathbf{X}^4\}$. Indique, asimismo, si se podría obtener una cota informativa para esa probabilidad como función de $E\{\mathbf{X}^5\}$.

(2 puntos)

2.- Sobre una variable aleatoria bidimensional $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ se conoce la función de densidad $f_{\mathbf{Y}}(y)$ de la segunda componente (y, en consecuencia, la función de distribución $F_{\mathbf{Y}}(y)$) así como las funciones $f_{\mathbf{X}}(x|\mathbf{Y} \leq y_1)$, $f_{\mathbf{X}}(x|y)$ con $y_1 < y \leq y_2$ y $f_{\mathbf{X}}(x|\mathbf{Y} > y_2)$. En relación con ella, se pide que escriba, como función de los datos del enunciado:

a) $F_{\mathbf{X}}(x|\mathbf{Y} \leq y_3)$, con $y_1 < y_3 \leq y_2$.

b) $E\{\mathbf{X}^2|\mathbf{Y} > y_4\}$, con $y_1 < y_4 \leq y_2$.

c) Supuesto que $f_{\mathbf{Y}}(y) = h(y) + \sum_{i=1}^{3} p_i \delta(y - y_i)$, (con $0 < p_i < 1$, $i = \{1, 2, 3\}$, $\sum_{i=1}^{3} p_i < 1$) indique qué condiciones tiene que cumplir $h(y)$ para que $f_{\mathbf{Y}}(y)$ esté correctamente definida y escriba $E\{\log(\mathbf{Y}^2)\}$ como función de $h(y)$ y p_i, $i = \{1, 2, 3\}$.

(2 puntos)

3.- La secuencia aleatoria $\mathbf{X}[n]$ se obtiene a través de la expresión $\mathbf{X}[n] = a\mathbf{X}[n-1] + \mathbf{W}[n]$, con $0 < a < 1$ y $\mathbf{W}[n]$ una secuencia de ruido blanco gaussiano, WSS, de media nula y desviación típica σ, con $\mathbf{W}[n]$ independiente de $\mathbf{X}[m]$ para $m < n$.

a) Asumiendo (únicamente en este apartado) que $\mathbf{X}[n]$ es WSS, se pide que obtenga $R_{\mathbf{X}}[0]$, $R_{\mathbf{X}}[1]$, $R_{\mathbf{X}}[2]$ y que generalice para $R_{\mathbf{X}}[m]$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

b) Suponiendo que $\mathbf{X}[1] \sim N(\eta_{\mathbf{X}}[1], \sigma_{\mathbf{X}}[1])$ obtenga $\sigma^2_{\mathbf{X}}[0]$.

c) Suponiendo ahora que $\mathbf{X}[0]$ es una variable discreta que puede tomar los valores 1 y -1 con probabilidades respectivas p y $1-p$, obtenga $f_{\mathbf{X}}(x; n = 2)$.

(3 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Julio 2011

1.- Responda a las siguientes preguntas:

a) Sean los sucesos A_i, $i = \{1, 2, 3\}$, de los que se sabe que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ así como que $P(A_i) > 0\ \forall i$. Sea B un suceso tal que $P(B) > 0$. Se pide que justifique si $\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i)$ es necesariamente mayor, igual, o menor que $P(B)$. Para cada caso, demuestre el cumplimiento de la relación o, caso contrario, indique un contraejemplo.

b) La variable aleatoria $\mathbf{X}$ tiene una función de densidad no nula únicamente en el intervalo $|x| \leq 1$. Justifique si se verifica que $E\{\mathbf{X}^2\} \leq E\{\mathbf{X}^4\}$.

c) Sean dos variables $\mathbf{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i$ e $\mathbf{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{Y}_i$ de las que se sabe que las variables $\mathbf{X}_i$ son IID, de media η y desviación típica σ_1 y las variables $\mathbf{Y}_i$ son también IID, de media η y desviación típica σ_2, con $\sigma_1 < \sigma_2$. Justifique si se verifica $P(|\mathbf{X} - \eta| \leq \epsilon) > P(|\mathbf{Y} - \eta| \leq \epsilon)$ si $N >> 1$.

(2 puntos)

2.- Un transmisor puede enviar tres símbolos, cada uno de los cuales se asocia a un valor de tensión positiva y_i,$i = \{1, 2, 3\}$, expresada en voltios ($y_i < y_j$ si $i < j$). La probabilidad de envío de cada uno de los símbolos es p_i, $i = \{1, 2, 3\}$, con $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$. En recepción, la tensión observada es una variable aleatoria $\mathbf{X}$, de la que se sabe que se distribuye como una gaussiana de media η_i y desviación típica σ_i cuando el valor símbolo enviado es el símbolo i, $i = \{1, 2, 3\}$. Se pide:

a) Probabilidad de que la tensión observada tenga un valor absoluto menor o igual que el valor de tensión correspondiente al símbolo enviado.

b) Si se ha observado que el valor de la tensión es menor o igual que x_0, obtenga la probabilidad de que el símbolo enviado sea el primero (el asociado a $i = 1$) o el segundo (el asociado a $i = 2$).

c) Si ahora se verifica que $y_i = 2^{i-1}y_0$, $\eta_i = y_i$, $\sigma_i = \sigma$ y $p_i = 1/3$, $i = \{1, 2, 3\}$, justifique qué símbolo presenta la mayor probabilidad de haber sido enviado, supuesto que se ha observado una tensión de valor $x_0 = \frac{4}{3}y_0$.

(2 puntos)

3.- La secuencia aleatoria $\mathbf{X}[n]$ se obtiene a través de la expresión $\mathbf{X}[n] = a\mathbf{X}[n-1] + \mathbf{W}[n]$, con $0 < a < 1$ y $\mathbf{W}[n]$ una secuencia de ruido blanco gaussiano, WSS, de media nula y desviación típica σ, con $\mathbf{W}[n]$ independiente de $\mathbf{X}[m]$ para $m < n$. Por otra parte, se sabe que $\mathbf{X}[0] \sim N(\eta_X[0], \sigma_{\mathbf{X}}[0])$ y es independiente del proceso $\mathbf{W}[n]$ para $n \geq 0$. Se pide:

a) Estimador lineal de mínimo error cuadrático medio de $\mathbf{X}[0]$ como función de $\mathbf{X}[2]$.

b) $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; n = 1, m = 2)$.

c) $\sigma_X^2[n]$, $\forall n \geq 0$.

(3 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Mayo 2012

1.- Un sistema consta de dos partículas; la primera de ellas parte de la posición $(0,0)$ y se puede mover, en instantes discretos —indexados éstos por un número natural—, una unidad hacia arriba, lo cual hace con probabilidad p, una hacia la derecha, lo cual hace con probabilidad q ó una hacia abajo, lo cual hace con probabilidad r $(p+q+r=1)$. Al respecto de la segunda partícula, parte de la posición $(l,0)$ (con l un número natural par) y se puede mover en los mismos instantes discretos que la anterior una unidad arriba, hacia la izquierda o hacia abajo, con probabilidades respectivas p, q y r. Asuma que las partículas son independientes entre sí y que los movimientos de cada partícula a lo largo de los diferentes instantes son también independientes. Denominando C_N^j al suceso "las partículas coinciden espacialmente en el instante N en el mismo punto, cuya abscisa es j" (la abscisa es la componente x del par (x,y)) y asumiendo que N es un número natural, se pide:

a) $P(C_N^{\frac{l}{2}})$, $\forall N$.

b) $P(C_{N+2}^j | C_N^j)$, donde j y N se han escogido de forma tal que $P(C_N^j) \neq 0$.

c) $P(\overline{C_N^0} | C_{N+k}^1)$, $\forall k \geq 0$.

(2 puntos)

2.- El tiempo que emplea un corredor en recorrer el primer tramo de 5 km en una carrera de 10 (km) puede modelarse como una variable $\mathbf{T}_1$, uniforme en un intervalo de longitud 2δ y cuya media es t_0 (con $t_0 > 2\delta$). El tiempo empleado en el segundo tramo, se modela como una variable $\mathbf{T}_2$ cuya distribución incondicional no se conoce. Sin embargo, se sabe que $\mathbf{T}_2$, supuesto conocido el tiempo empleado en el primer tramo, sigue también una distribución uniforme en un intervalo de longitud 2δ. La media de esta variable, en esas condiciones, es precisamente el valor que ha tomado la variable $\mathbf{T}_1$ (t_1). Se pide:

a) $f_{\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2}(t_1,t_2)$.

b) Probabilidad de que el tiempo empleado en recorrer los 10 km sea inferior a $2t_0$, supuesto que se tarda más en recorrer el segundo tramo que el primero. Si no resolvió el apartado anterior suponga que $f_{\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2}(t_1,t_2)$ es constante y no nula para $|t_1 - t_0 + \delta| \leq \delta, |t_2 - t_1| \leq 2\delta$ con $t_0 > 4\delta$, y nula en el resto.

c) Denominando $\mathbf{T}$ a la variable que modela el tiempo total empleado en la carrera, obtenga $F_{\mathbf{T}}(t)$ para $2t_0 - 3\delta < t \leq 2t_0 - \delta$. Si no resolvió el apartado a), obtenga $F_{\mathbf{T}}(t)$ para $2t_0 - 6\delta < t \leq 2t_0 - 2\delta$ asumiendo la misma función de densidad de probabilidad conjunta que en el apartado b).

(2 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Junio 2012

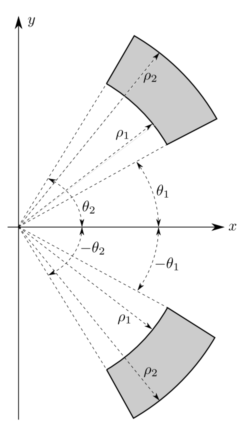
1.- Un sistema consta de dos partículas; la primera de ellas parte de la posición $(0,0)$ y se mueve, en instantes discretos —indexados éstos por un número natural—, una unidad a la derecha de manera determinística (es decir, no aleatoria) y, simultáneamente y en sentido vertical, una unidad hacia arriba, o una hacia abajo o no se desplaza (recuerde, en vertical). Al respecto de la segunda partícula, parte de la posición $(L,0)$ (con L un número natural par) y se mueve en los mismos instantes discretos que la anterior una unidad a la izquierda de manera determinística y, simultáneamente, una unidad hacia arriba o una hacia abajo o no se desplaza (recuerde, en vertical). Asuma que las partículas son independientes entre sí. Denominando $C_{i,j}$ al suceso "las partículas coinciden espacialmente en el punto de coordenadas (i,j)", se pide:

a) Suponga que los movimientos de cada partícula a lo largo de los diferentes instantes son independientes entre sí, que la probabilidad de subida en cada instante es p, la de bajada q y la de no desplazamiento vertical r ($p+q+r=1$) así como que $L/2$ es par. Calcule $P(C_{\frac{L}{2},0})$.

b) Suponga ahora que, para cada partícula, la probabilidad de no desplazamiento vertical es $r=0$; por otra parte, la probabilidad de subida al comenzar el experimento es p_{01} y que, a partir de ese momento, la probabilidad de subida en un instante es p_1 si la coordenada vertical en el instante anterior es no negativa y p_2 si dicha coordenada es negativa. En estas condiciones calcule, exclusivamente para $L=8$, $P(C_{\frac{L}{2},0})$.

c) Suponga que el experimento del apartado b) se repite 1000 veces (las diferentes ejecuciones son independientes entre sí) y que la probabilidad del apartado anterior (lo haya resuelto o no) resulta ser igual a 0.4. Se pide que proporcione un valor aproximado a la probabilidad de que se verifique el suceso $C_{\frac{L}{2},0}$ un número de veces menor o igual que 410. No se admitirá una solución que contenga algún sumatorio.

(2 puntos)



2.- Una variable aleatoria $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ tiene una función de densidad constante y no nula en el interior de la región punteada en la figura y nula fuera de ella (repare en la simetría del gráfico). Se pide:

a) $C_{\mathbf{XY}}$.

b) Estimador óptimo sin restricciones de $\mathbf{Y}$ como función de $\mathbf{X}$ (no es necesario que calcule expresamente $f_{\mathbf{X}}(x)$, es decir, puede dejar sus resultados, si lo precisa, en función de $f_{\mathbf{X}}(x)$).

c) Razone si las variables $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son independientes.

(2 puntos)

3.- Un dispositivo móvil (tablet, teléfono móvil etc ...) tiene su música organizada en dos directorios; suponga que las señales musicales del primer directorio pueden modelarse como un proceso estocástico $\mathbf{X}_1(t)$, gaussiano, WSS, de media nula y función de autocorrelación $R_{\mathbf{X}_1}(\tau)$. Al respecto de las del segundo directorio, pueden modelarse como un proceso estocástico $\mathbf{X}_2(t)$, gaussiano, WSS, de media nula y función de autocorrelación $R_{\mathbf{X}_2}(\tau)$. El dispositivo dispone de un modo aleatorio de funcionamiento que escoge una canción del primer directorio con probabilidad p (y del segundo con $1-p$). Suponga que el proceso resultante de esta operativa es $\mathbf{X}(t)$. Se pide:

a) Indique si $\mathbf{X}(t)$ es WSS.

b) Probabilidad de que se haya escogido el primer directorio, supuesto que la señal escuchada en el instante t_0 toma un valor menor o igual que x_0.

c) Se hace pasar al proceso $\mathbf{X}(t)$ por un sistema LTI con $|H(\omega)| = e^{\frac{-\alpha^2\omega^2}{4}}$. Suponiendo que $R_{\mathbf{X}}(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{b^2}}$ obtenga el valor de la constante α que hace que la potencia del proceso filtrado $\mathbf{Y}(t)$ sea igual a $P_{\mathbf{Y}}$ (α y b son dos constante reales positivas).

(3 puntos)

NOTAS: G(0.6455)=0.7407

La transformada de Fourier de la señal $e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ es $\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$. Por otra parte, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Julio 2012

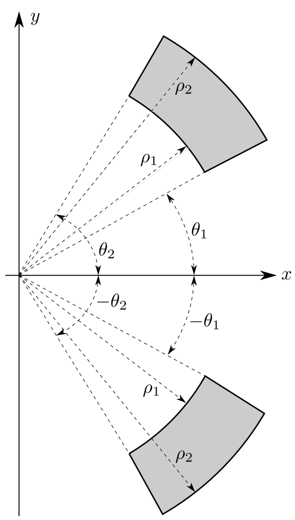
1.- Cinco personas juegan a un juego de baraja española (40 cartas, 4 palos, 10 cartas por palo). En el juego se reparten tres cartas a cada jugador (considere que se reparten tres cartas al primero, tres al segundo y así sucesivamente). Se pide:

a) Probabilidad de que a los tres primeros no les salga ninguna copa.

b) Probabilidad de que al primer jugador le salgan i copas (con $i = \{0, 1, 2, 3\}$).

c) Probabilidad de que al segundo jugador no le salga ninguna copa. Si precisa de la solución del apartado anterior y no lo ha resuelto, denomine a esas probabilidades $p_i^{(b)}$ ($i = \{0, 1, 2, 3\}$).

(2 puntos)



2.- Una variable aleatoria $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene una función de densidad constante y no nula en el interior de la región punteada en la figura y nula fuera de ella ($0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, $0 < \rho_1 < \rho_2$). Se pide:

a) $P(\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{X}} < a)$ con $a = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$.

b) Función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria bidimensional procedente de la transformación

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} &= \sqrt{\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2} \\ \mathbf{\Theta} &= \arctan\left(\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{X}}\right) \end{aligned}$$

c) Estimador óptimo sin restricciones de $\mathbf{\Theta}$ como función de $\boldsymbol{\rho}$.

(2 puntos)

3.- El proceso $\mathbf{W}(t)$ es un proceso gaussiano real, de media nula y función de autocorrelación $R_{\mathbf{W}}(\tau) = b\delta(\tau)$. Este proceso sirve de entrada a un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h(t) = e^{-\frac{(t-t_0)^2}{a^2}}$, cuya salida es el proceso $\mathbf{X}(t)$. A continuación se genera el proceso $\mathbf{Y}(t)$ de la forma $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)\cos(\omega_c t + \mathbf{\Theta})$, donde $\mathbf{\Theta} \sim U(\theta_0, \theta_1)$ y es independiente de $\mathbf{X}(t)$. Los parámetros b, t_0, a, f_c, θ_0 y θ_1 ($\theta_0 < \theta_1$) son constantes determinísticas conocidas. Se pide:

a) $R_{\mathbf{X}}(\tau)$.

b) $P(|\mathbf{X}(t)| \leq x_0)$, con x_0 un número real positivo. Si no respondió al apartado anterior, considere conocida la función $R_{\mathbf{X}}(\tau)$.

c) Justifique si el proceso $\mathbf{Y}(t)$ es WSS $\forall \theta_1 > \theta_0$. Caso de no serlo, indique qué relación deben cumplir esos parámetros para que el proceso $\mathbf{Y}(t)$ sea WSS.

(3 puntos)

NOTA: La transformada de Fourier de la señal $e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ es $\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Marzo 2013

1.- Suponga que se extraen ocho cartas de una baraja española. Se pide:

a) Probabilidad de que se extraigan al menos dos ases.

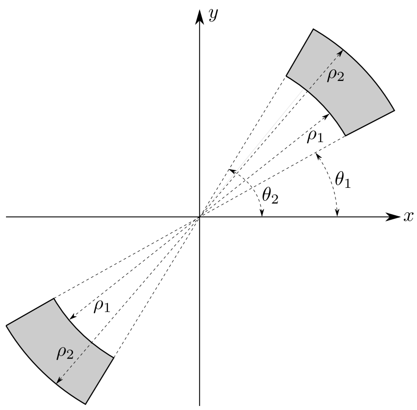
b) Suponga que está interesado en que se verifique el suceso A definido de la forma "se extraen tres ases, tres reyes y dos sotas". Denomimenos A_i al suceso "forma i-ésima de verificarse el suceso A" (entiéndase por *forma* una determinada ordenación de las ocho cartas). Calcule $P(A_i)$, con $1 \leq i \leq N$.

c) Obtenga la probabilidad del suceso A definido en el apartado b) a partir de las probabilidades de los sucesos A_i obtenidas en dicho apartado. Si no respondió a b) calcule el valor de N de dicho apartado.

(2 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Mayo 2013



2.- Una variable aleatoria $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene una función de densidad dada por la expresión

$$f_{\mathbf{XY}}(x,y) = \frac{k}{(\sigma\sqrt{2\pi})^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

en la región sombreada de la figura adjunta y es nula fuera de dicha región. Se pide:

a) Valor de la constante k y de $\eta_{\mathbf{X}}$.

b) Si se definen las variables:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 \\ \mathbf{W} &= \frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{X}}, \end{aligned}$$

obtenga $f_{\mathbf{ZW}}(z,w)$ y $f_{\mathbf{Z}}(z)$.

c) Indique si las variables $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son independientes entre sí. Haga lo propio para las variables $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{W}$ (en este segundo caso, si no resolvió el apartado b), discuta la posibilidad de independencia a partir de la forma del dominio de definición de su función de densidad).

(2 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Junio 2013

1.- Un robot de vigilancia tiene un modo de desplazamiento aleatorio para dificultar que terceros puedan predecir su posición. Visto en planta, el modo consiste en que en cada instante temporal se desplaza dos posiciones hacia la derecha de forma determinista y una posición en sentido vertical ascendente con probabilidad p, o en sentido vertical descendente, con probabilidad $q = 1-p$. Suponga, inicialmente, que los desplazamientos son independientes entre sí. Considerando que la estancia en la que se encuentra el robot es lo suficientemente grande como para poder no tener en cuenta la presencia de paredes, se pide:

a) Si suponemos que el robot parte de la posición $(0, 4)$ (con la primera coordenada horizontal y la segunda vertical), probabilidad de que alcance el punto $(16, 8)$.

b) Suponga que el robot parte de la posición $(0, 0)$. Transcurridos $N = 1000$ instantes temporales, proporcione un valor numérico para la probabilidad de que el robot se encuentre en una posición de coordenada vertical mayor o igual que 500. Considere que $p = 0.75$.

c) Se sabe ahora que los saltos no son independientes, de modo que la probabilidad de subir en sentido vertical es p_s si el salto anterior vertical fue una subida, mientras que esa probabilidad es p_b si el salto anterior fue una bajada. En todo caso, la probabilidad de que el primer salto vertical sea hacia arriba sigue siendo p. Si el robot parte de la posición $(0, 4)$ calcule la probabilidad de que alcance el punto $(8, 6)$.

(2 puntos)

2.- Una variable aleatoria $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene una función de densidad dada por la expresión

$$f_{\mathbf{XY}}(x, y) = ky^2$$

en el interior del triángulo de vértices $(0, 1)$, $(0, -1)$ y $(1, 0)$, y es nula fuera de dicha región. Se pide:

a) Valor de la constante k y $P(\mathbf{Y} > \mathbf{X})$.

b) $E\{\mathbf{Y}\}$ y $f_{\mathbf{Y}}(y)$.

c) Estimador óptimo sin restricciones de la variable $\mathbf{X}$ como función de la variable $\mathbf{Y}$. Si no obtuvo $f_{\mathbf{Y}}(y)$ del apartado anterior (y sólo en ese caso), calcule $R_{\mathbf{XY}}$ y $E\{\mathbf{X}\}$.

(2 puntos)

3.- Sea el proceso estocástico $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}_1 e^{j(\omega_1 t + \mathbf{\Theta}_1)} + \mathbf{A}_2 e^{j(\omega_2 t + \mathbf{\Theta}_2)}$, donde $\mathbf{A}_i$ es una variable exponencial de parámetro λ_i y ω_i es una constante determinista conocida ($i = \{1, 2\}$). Asimismo, las variables $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ son independientes entre sí e independientes de las variables $\mathbf{\Theta}_1$ y $\mathbf{\Theta}_2$. Se pide:

a) Si $f_{\mathbf{\Theta}_1\mathbf{\Theta}_2}(\theta_1, \theta_2)$ es constante y no nula en la región $0 < \theta_2 < \theta_1 < 2\pi$ (y nula fuera de ella), obtenga $E\{\mathbf{X}(t)\}$.

b) Si $f_{\mathbf{\Theta}_1\mathbf{\Theta}_2}(\theta_1, \theta_2)$ es constante y no nula en la región $0 < \theta_1 < 2\pi, 0 < \theta_2 < 2\pi$ (y nula fuera de ella), obtenga $E\{\mathbf{X}(t)\}$ y $R_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)$. Indique si el proceso es WSS.

c) Se hace pasar al proceso $\mathbf{X}(t)$, en las condiciones del apartado b), por un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso real $h(t)$. Se pide que obtenga la expresión analítica de $\mathbf{Y}(t)$ así como la expresión de $R_{\mathbf{XY}}(t_1, t_2)$ como función (entre otros) de $H(\omega)$.

(3 puntos)

NOTAS:

$$G(0.073) = 0.5291$$

$$\int \alpha e^{j\alpha} d\alpha = (1 - j\alpha)e^{j\alpha}$$

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Julio 2013

1.- Se lanza un dado seis veces de forma consecutiva. Se pide:

a) Suponiendo independencia entre lanzamientos y equiprobabilidad de las seis caras, obtenga la probabilidad de obtener la secuencia de resultados $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$, así como la probabilidad de obtener el resultado $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con cualquier ordenación entre los dígitos.

b) Denominemos S_i^j al suceso "Se obtiene la cara i ($i = 1 \ldots 6$) en el lanzamiento j". Suponga ahora que los lanzamientos no son independientes entre sí, de tal forma que para $j \geq 2$

$$\begin{aligned} P(S_i^{j+1}|S_i^j) &= \frac{1}{6}P(S_i^j) \\ P(S_k^{j+1}|S_i^j) &= P(S_k^j) + \frac{1}{6}P(S_i^j), k \neq i \end{aligned}$$

(es decir, la probabilidad de obtener la cara i en el lanzamiento $j+1$ cuando en el j se ha obtenido esa cara es un sexto de la probabilidad de obtener esa cara en el lanzamiento j, y la probabilidad condicionada de las otras caras aumenta esa misma cantidad). Asúmase que en el primer lanzamiento sigue existiendo equiprobabilidad entre caras. Se pide que compruebe $\sum_{k=1}^{6} P(S_k^{j+1}|S_i^j) = 1 \; \forall j \geq 1$, así como que obtenga $P(S_k^j) \; \forall k \in \{1, \ldots, 6\}$ y $j = 2$.

c) Suponiendo que el resultado $P(S_k^j)$ del apartado anterior es válido $\forall j \geq 2$ (es decir, no sólo para $j = 2$) y que cada lanzamiento (salvo el primero) se ve afectado exclusivamente por el lanzamiento anterior, calcule, en esas condiciones, la probabilidad de obtener la secuencia de resultados $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$. Si no resolvió dicho apartado, asuma que $P(S_i^j) = p, \forall j \geq 2, \forall i \in \{1, \ldots, 6\}$.

(2 puntos)

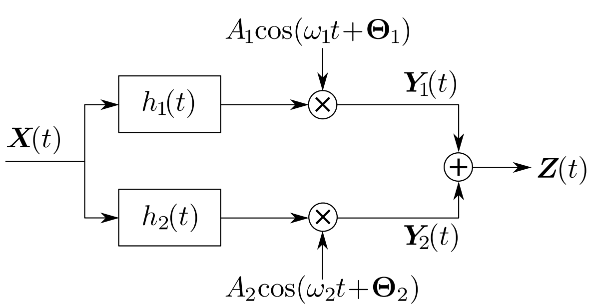
2.- Las variables $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son independientes y uniformes en el intervalo $(-a, a)$ (con $a > 3$). A partir de ellas se define la variable $\mathbf{Z}$ de la forma $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + e^{\mathbf{Y}}$. Se pide:

a) $\rho_{\mathbf{XZ}}$.

b) $P(\mathbf{Y} \leq -\frac{a}{2}, \mathbf{Z} \leq a + e^{-a})$.

c) $f_{\mathbf{Z}}(z)$.

(2 puntos)



3.- Se obtienen los procesos $\mathbf{Y}_1(t)$, $\mathbf{Y}_2(t)$ y $\mathbf{Z}(t)$ de la forma que se indica en la figura, donde $\mathbf{X}(t)$ es un proceso gaussiano, de media nula y función de autocorrelación $R_{\mathbf{X}}(\tau)$, las respuestas al impulso $h_1(t)$ y $h_2(t)$ son tales que $H_1(\omega) \neq 0, |\omega| \in [\omega_a, \omega_b]$ y $H_2(\omega) \neq 0, |\omega| \in [\omega_c, \omega_d]$ ($\omega_a < \omega_b < \omega_c < \omega_d$) y son nulas fuera de sus correspondientes intervalos —a tales filtros se les denomina filtros paso banda— y los parámetros A_1, A_2, ω_1 y ω_2 son constantes determinísticas conocidas (con $\omega_1 \in [\omega_a, \omega_b]$ y $\omega_2 \in [\omega_c, \omega_d]$. Se sabe, asimismo, que las fases $\mathbf{\Theta}_1$ y $\mathbf{\Theta}_2$ son uniformes en el intervalo $(-\pi, \pi)$, independientes entre sí e independientes de $\mathbf{X}(t)$. Todas las magnitudes involucradas son reales. Se pide:

a) $E\{\mathbf{X}(t)\mathbf{Z}(t)\}$.

b) Demuestre que los procesos $\mathbf{Y}_1(t)$ e $\mathbf{Y}_2(t)$ son incorrelados.

c) Teniendo en cuenta el resultado del apartado anterior (lo haya demostrado o no), calcule $S_{\mathbf{Z}}(\omega)$.

(3 puntos)

NOTA: $e^a - e^{-a} > 2a$ para $a > 3$.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Marzo 2014

1.- Cuatro amigos se sortean la realización de un trabajo. Para ello deciden lanzar un dado. Ellos mismos se asignan un orden (amigo 1, amigo 2, etc.). Al lanzar el dado, si sale una de las cuatro primeras caras, el trabajo se le asigna al amigo cuyo número de orden coincide con la cara observada. Si sale una de las dos caras restantes (5 ó 6), se vuelve a tirar tantas veces como sea necesario hasta que salga una cara asociada a uno de los amigos. Bajo el supuesto de que la probabilidad de que salga la cara i, $i = \{1, \ldots, 6\}$, sea p_i (no asuma, pues, equiprobabilidad de resultados del dado) y que los sucesivos lanzamientos del dado sean independientes entre sí, se pide:

a) Probabilidad de que pierda el jugador i (con $i = \{1, \ldots, 4\}$). Compruebe que la suma de esas cuatro probabilidades es igual a uno, así como que si $p_i = 1/6$ los jugadores pierden equiprobablemente.

b) Suponga ahora que hay que hacer dos trabajos de forma que hay que elegir a dos de los cuatro amigos. En el primer lanzamiento se procede como antes. En el segundo, se considera asociar a los amigos que queden dos caras consecutivas según número de orden ascendente del amigo (es decir, si quedan el 2, el 3 y el 4, se asociarían las caras 1 y 2 del dado al amigo 2, las caras 3 y 4 al tres, y las caras 4 y 5 al cuatro). Se pide que obtenga, en estas condiciones, la probabilidad de que sean perdedores en este segundo lanzamiento el primer amigo o el segundo. Si no respondió al apartado a), y le fuese necesario, denomine p_a^i a la probabilidad de que pierda el jugador i en el primer lanzamiento.

c) Considere ahora que sólo hay dos amigos. En este caso, deciden lanzar el dado N veces y dan por perdedor a aquél que haya perdido más veces de las N (suponga que N es impar para así evitar empates). Denominando p_0 a la probabilidad de que pierda el jugador 2 en un lanzamiento, obtenga la probabilidad de que el perdedor en esta modalidad sea el jugador 2.

(2 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Mayo 2014

2.- De la variable $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ se sabe que $\mathbf{X}$ es una variable uniforme en el intervalo $(0, a)$ $(a > 0)$ y que la función de densidad de la variable $\mathbf{Y}$, condicionada a cada valor de $\mathbf{X}$, es constante en el intervalo $(x + b, x + c)$, con $c > a + b$, $b > 0$. En estas condiciones, se pide:

a) Estimador óptimo sin restricciones de la variable $\mathbf{X}$ como función de la variable $\mathbf{Y}$.

b) Se definen las variables

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \mathbf{X} + \mathbf{Y} \\ \mathbf{W} &= \mathbf{X} - \mathbf{Y} \end{aligned}$$

Obtenga la función de densidad conjunta de la variable $(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$.

c) Se define la variable $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}}$. Indicar en qué intervalo del eje v la función de distribución $F_{\mathbf{V}}(v)$ vale cero y en qué intervalo vale unidad. En el intervalo restante del eje v indicar si es necesario o no considerar subintervalos adicionales (para los que la expresión analítica cambie) y en su caso indicar cuáles son estos. Para cada uno de estos subintervalos poner la expresión integral (integrando y límites) que es necesario determinar. No es necesario resolver las integrales resultantes, sólo indicarlas.

(2 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Junio 2014

1.- Un jugador callejero (en adelante, trilero) ofrece a su cliente darle $2k$ monedas si el cliente gana la partida k-ésima ($k \geq 1$) y recibir del cliente k monedas si el cliente pierde la partida de ese índice. Denominemos A_k al suceso "el cliente gana la partida k-ésima". Supongamos que el cliente comienza con 10 monedas en su haber. El trilero consigue, mediante artes poco lícitas, que $P(A_k|A_{k-1}) = p_g^k$ y que $P(A_k|\overline{A}_{k-1}) = p_p^k$, $k \geq 2$ (aceptemos que $P(A_1) = p$ y que $P(A_k|\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i) = P(A_k|A_{k-1})$). Se pide:

a) Probabilidad de que tras tres partidas el cliente tenga 13 monedas.

b) Probabilidad de que tras tres partidas el cliente tenga 13 monedas supuesto que tras dos partidas tenía 7.

c) Suponga que el trilero cambia su forma de jugar de manera que ahora $P(A_k) = p$, $\forall k \geq 1$, y que las sucesivas partidas son independientes entre sí. Por simplicidad, acuerdan que el cliente reciba (del trilero) dos monedas si gana y entregue (al trilero) una si pierde. Suponiendo que para poder jugar cada partida el cliente debe tener en su poder al menos una moneda, calcule la probabilidad de que el cliente no pueda jugar la partida decimocuarta por quedarse en ese momento, por primera vez, sin monedas.

(2 puntos)

2.- Una variable aleatoria $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene una función de densidad constante en la región $\{|x| < a, -(b+x) < y < b - x\}$, con $\frac{a}{2} < b < a$. En estas condiciones, se pide:

a) Funciones de densidad marginales de las variables $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.

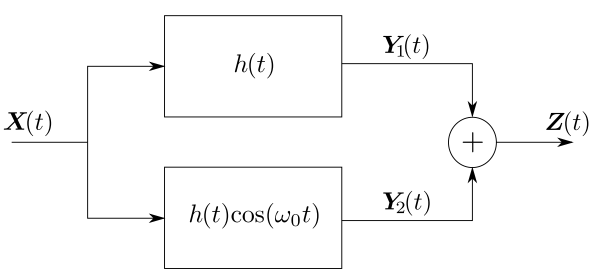
b) $P\left(\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{X}} < \alpha\right)$, $\forall \alpha > 0$.

c) $F_{\mathbf{Y}}(y|\mathbf{X} > b)$ (se pide que obtenga los intervalos relevantes donde se define esta función —intervalos donde vale cero y uno e intervalos donde presenta otros comportamientos— y, en aquellos casos en los que haya integrales involucradas, indique función subintegral e intervalos de integración —no es imprescindible, en consecuencia, que resuelva las integrales—).

(2 puntos)

3.- El proceso $\mathbf{X}(t)$ es un proceso estocástico real, gaussiano, de media nula y función de autocorrelación $R_{\mathbf{X}}(\tau)$, de la que se sabe que $R_{\mathbf{X}}(\tau) = 0 \ \forall |\tau| > T$. Se pide:

a) $P(|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t + t_0)| \leq a)$ con a una constante real positiva. Debe dejar el resultado como una función de t_0.



b) Se construyen los procesos $\mathbf{Y}_1(t)$ e $\mathbf{Y}_2(t)$ como se indica en la figura, donde la respuesta al impulso $h(t)$ es la correspondiente a un filtro paso bajo ideal de ganancia unidad y ancho de banda $\Delta\omega$, con $\Delta\omega << \omega_0$ (el filtro, en consecuencia, deja pasar únicamente las pulsaciones en la banda $[-\Delta\omega, \Delta\omega]$). Se pide que justifique si los procesos $\mathbf{Y}_1(t)$ y $\mathbf{Y}_2(t)$ son incorrelados.

c) Justifique las razones por las que $E\{\mathbf{Z}^3(t)\}$ debe ser necesariamente nulo.

(3 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Julio 2014

1.- Dos equipos de fútbol (equipos A y B) disputan a penaltis una clasificación[1]. Pensemos, por simplicidad, que los lanzamientos son independientes entre los equipos y entre los jugadores de un mismo equipo; cada jugador del equipo A lanza correctamente a portería con probabilidad p_{G_A} y cada jugador del equipo B lo hace con probabilidad p_{G_B}. El portero del equipo A para los penaltis con probabilidad p_A y el del equipo B, con probabilidad p_B, en ambos casos independientemente unos lanzamientos de otros. Como es natural, para que el penalti sea parado por el portero, el balón debe ir a portería y el portero debe ser capaz de pararlo. Se pide:

a) Probabilidad de que los equipos empaten al término del quinto lanzamiento.

b) Probabilidad de que el equipo B marque un gol más que el A al término del quinto lanzamiento de B (nótese que sólo se llega a esta situación si el quinto penalti de B es gol).

c) Probabilidad de que se clasifique el equipo B al término del lanzamiento 17 de B. Si necesitase de algún resultado de apartados anteriores, y no los hubiese resuelto, considérelo conocido.

(2 puntos)

2.- Disponemos de M variables aleatorias $\mathbf{X}_i$, $i = \{1, \ldots, M\}$, binomiales de parámetros N_i y p_i e independientes entre sí. Se escogen dos variables cualesquiera al azar, con probabilidad proporcional al producto de los segundos parámetros de las variables escogidas (esto es, la selección de las variables $\mathbf{X}_k$ y $\mathbf{X}_j$ ($k \neq j$) se hace con una probabilidad proporcional a $p_k p_j$) y considere los pares (k, j) y (j, k) distintos. Se define $\mathbf{Z}$ como la variable suma de las variables seleccionadas. En estas condiciones, se pide:

a) Denominando A_{ij} al suceso "se selecciona la pareja de variables (i, j)", obtenga $P(A_{ij})$ y determine los intervalos de variación de los índices (i, j).

b) Media y varianza de $\mathbf{Z}$. Si precisase de $P(A_{ij})$ y no dispone de él, asúmalo conocido.

c) Proporcione una cota (no trivial) al suceso $P(\mathbf{Z} > K)$ como función de $E\{\mathbf{Z}\}$, donde K es un valor arbitrario en el intervalo en el que la variable $\mathbf{Z}$ toma valores. Si necesitase del resultado del apartado anterior y no lo hubiese resuelto, considere estos parámetros conocidos (denominémoslos $\eta_{\mathbf{Z}}$ y $\sigma^2_{\mathbf{Z}}$).

(2 puntos)

3.- Responda las siguientes cuestiones: a) Una secuencia aleatoria $\mathbf{X}[n]$, de ruido blanco gaussiano, WSS, media nula y varianza σ^2 atraviesa un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h[n] = \alpha e^{-\beta n} u[n]$, para dar lugar al proceso $\mathbf{Y}[n]$. Calcule $P(\mathbf{Y}[n] \leq \mu)$ (α, β y μ son números reales positivos). Se recomienda que haga sus razonamientos en el dominio del tiempo.

b) Se define $\mathbf{V}[n] = \mathbf{Y}[Mn] + \mathbf{U}[n]$, con $\mathbf{U}[n]$ una secuencia de ruido blanco, WSS, de media nula, varianza $\sigma^2_{\mathbf{U}}$ e independiente de $\mathbf{Y}[n]$ y M un número entero positivo. Obtenga $R_{\mathbf{V}}[n_1, n_2]$ e indique si el proceso $\mathbf{V}[n]$ es WSS.

c) Considere un proceso $\mathbf{Z}[n]$ para el que se verifica que $f_{\mathbf{Z}}(z; n) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} u(z)$ así como que $f_{\mathbf{Z}}(z_1; n_1 | z_2; n_2) = \lambda_2^{-|n_1 - n_2|} e^{-(\lambda_2^{-|n_1-n_2|} z_1)} u(z_1)$; este proceso atraviesa el sistema lineal dado por $h[n] = \delta[n] + \delta[n - M]$, con M un número entero positivo, para dar lugar al proceso $\mathbf{W}[n]$. Calcule $P(\mathbf{W}[n] \leq \mu)$, con μ un número real positivo.

(3 puntos)

[1] Recuerde que se lanza una primera tanda de 5 penaltis y, de existir empate al término de los cinco primeros lanzamientos, se siguen lanzando penaltis —por turnos, cada equipo el suyo— hasta que se resuelve el desempate. Por otra parte, si antes de los cinco penaltis un equipo ya no puede alcanzar al otro, se interrumpen los lanzamientos.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Diciembre 2014

1.- Una baraja de N cartas tiene en sus cartas una numeración de 1 a N; se reparten k cartas a dos jugadores ($2k \leq N$); cada jugador selecciona una carta al azar y las cartas se comparan entre sí; gana la baza aquel jugador cuya carta presenta el número mayor. Se repite sucesivamente este procedimiento hasta que concluye la baza n-ésima. En este momento se considera ganador del juego aquél que haya conseguido más bazas (suponer n impar para evitar empates). Se pide:

a) Demuestre que la probabilidad de que uno de los dos jugadores gane la baza j-ésima, $1 \leq j \leq n$ es igual a $1/2$.

b) Suponiendo que la probabilidad de que el jugador A gane una baza cualquiera es p (no considere en este apartado que $p = 1/2$ necesariamente), obtenga la expresión analítica de que el jugador A gane la partida.

c) Demuestre que la probabilidad del apartado anterior debe ser necesariamente igual a $1/2$ si $p = 1/2$.

(2.0 puntos)

2.- La variable aleatoria $\mathbf{X}$ tiene una función de densidad igual a $\lambda e^{-\lambda x} u(x)$, donde λ es el valor que toma una variable aleatoria $\mathbf{\Lambda}$, la cual se distribuye como una exponencial de parámetro (μ es un número real positivo). Se pide:

a) $P(\mathbf{X} > a | \mathbf{\Lambda} > b)$, con a y b dos números reales positivos.

b) $f_{\mathbf{X}}(x)$.

c) $P(\mathbf{X} > a)$.

(2.0 puntos)

3.- El proceso $\mathbf{V}(t) = t + \mathbf{N}(t)$ representa la velocidad instantánea de un móvil que se desplaza a lo largo del eje de las abscisas partiendo de la posición 0 en $t = 0$. $\mathbf{N}(t)$ es un proceso de ruido blanco Gaussiano, de media nula y función de autocorrelación $R_{\mathbf{N}}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$. Considere, asimismo, que el móvil parte en situación de reposo inicial. Denominemos $\mathbf{X}(t)$ a la posición del móvil en el instante t. Se pide

a) Expresión de $\mathbf{X}(t)$ y $E\{\mathbf{X}(t)\}$.

b) $R_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)$ ¿Es el proceso WSS?

c) $f_{\mathbf{X}}(x; t)$ y $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1, t_2)$. Si precisase de algún parámetro solicitado en los apartados anteriores, y no hubiese respondido, considérelos conocidos.

(3.0 puntos)

Universidad de Valladolid – ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Marzo 2015

1.- Se dispone de un dado electrónico que puede dar lugar a un valor (número entero) desde el 1 hasta el 6, ambos inclusive, con probabilidad p_i ($1 \leq i \leq 6$). Dicho dado se simula entonces pulsando en un botón. Supongamos que se pulsa N veces (considere que cada ejecución del dado es independiente de las demás). Se pide:

a) Probabilidad de obtener un resultado "mayor o igual que cuatro" más veces que el resultado "menor que cuatro". Distinga entre los casos en que N sea par o impar.

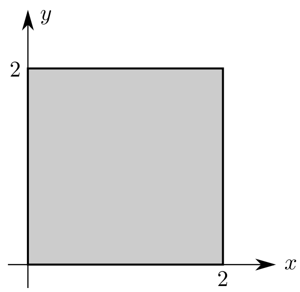
b) Probabilidad de obtener un resultado" mayor o igual que cuatro" más veces que el resultado "menor que cuatro" supuesto que en la primera ejecución del dado se obtuvo un resultado "menor que cuatro". Distinga entre los casos en que N sea par o impar.

c) Para decidir el valor de N se lanzan dos monedas simultáneamente (suponer que las dos monedas tienen resultados equiprobales y son independientes entre sí y del dado electrónico) y se elige un valor $N = 50$ si sale al menos una *cara* en los dos lanzamientos (entiéndase que para cada moneda puede salir *cara* o *cruz*); en otro caso se decide que $N = 51$. Calcule la probabilidad del apartado (b) en estas nuevas condiciones. Si no resolvió ese apartado, denomine p_b^e a la probabilidad pedida en ese apartado si N es par y p_b^o si N es impar.

(2 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Mayo 2015



2.- La variable aleatoria $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene una función de densidad

$$f_{\mathbf{XY}}(x, y) = \frac{xy}{4}$$

en la región rayada de la figura adjunta y nula fuera de dicha región. Se define, asimismo, la variable $\mathbf{Z} = \mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2$. Se pide:

a) Justifique si las variables $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son independientes.

b) $E\{\mathbf{X}|z\}$.

c) $f_{\mathbf{Y}}(y|x + y \leq 2)$.

(2 puntos)

Universidad de Valladolid - ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Junio 2015

1.- Dos equipos de fútbol (que denominaremos A y B) juegan un torneo de 3 encuentros. Experiencias previas indican que el equipo A gana con probabilidad p_A y el B con probabilidad p_B. En estas condiciones, calcule la probabilidad de que:

a) El equipo A gana, al menos, un encuentro.

b) Ambos equipos empaten en 2 de los 3 partidos.

c) Si el torneo, en vez de 3 partidos está formado por 30, probabilidad de que haya 9 empates y el A gane al menos 14 veces.

(2.0 puntos)

2.- Se define la variable $\mathbf{Z}$ de la forma

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{X}_i,$$

donde los coeficientes a_i, $i = 1, \ldots, N$, son números reales y las variables $\mathbf{X}_i$ son binomiales de parámetros M y p (es decir, $\mathbf{X}_i \sim B(M, p)$), $\forall i = 1, \ldots, N$, y son independientes entre sí. Se pide:

a) Para el caso en que $a_i = 2$, $N = 2$ y $M = 2$ caracterice la variable $\mathbf{Z}$.

b) Para un caso en el que $a_i = 1$, y N y M sean números arbitrarios mayores que 2, calcule $P(\mathbf{Z} = 2)$.

c) Para un caso general en el que, además, $N \gg 1$, calcule $P(\mathbf{Z} > z_0)$, con z_0 un número real próximo a la media de $\mathbf{Z}$.

(2.0 puntos)

3.- La secuencia real $\mathbf{X}[n] = \mathbf{A}[n]\cos(\Omega_c n + 2\mathbf{\Theta})$ es tal que $\mathbf{A}[n]$ es una secuencia de media $\eta_{\mathbf{A}}[n]$ y función de autocorrelación $R_{\mathbf{A}}[m]$ y, por su parte, $\mathbf{\Theta} \sim U(0, \pi)$ y es independiente de $\mathbf{A}[n]$. Este proceso llegar al receptor de un determinado dispositivo, en el cual se origina la secuencia $\mathbf{Y}[n]$ de la forma $\mathbf{Y}[n] = \mathbf{X}[n]\cos(\Omega_c n)$. En estas condiciones, se pide:

a) Obtenga $\eta_{\mathbf{X}}[n]$ y $R_{\mathbf{X}}[n_1, n_2]$. Indique si $\mathbf{X}[n]$ es WSS.

b) Obtenga $E\{\mathbf{Y}^2[n]\}$ como función de los datos del problema. Indique si $\mathbf{Y}[n]$ es WSS.

c) Obtenga una cota para la probabilidad $P(\mathbf{Y}[n] > \mu)$ como función de $E\{\mathbf{Y}^2[n]\}$. Si resolvió el apartado anterior, puede hacer uso de él. Caso contrario, considere $E\{\mathbf{Y}^2[n]\}$ conocido.

(3.0 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Julio 2015

1.- Una baraja española consta de 40 cartas (4 palos, 10 cartas por palo). Se extraen 5 cartas aleatoriamente. Calcule las probabilidades de obtener:

a) Tres cartas de un palo y las otras dos de otro.

b) As, dos, tres, cuatro y cinco, en cualquier orden (de cualquier palo).

c) Suponga que se realizan múltiples repartos independientes entre sí (con la baraja completa) y que se desea obtener el resultado del apartado anterior 10 veces. Se pide que calcule la probabilidad de que sean necesarios 1000 repartos hasta que se verifiquen las 10 apariciones del resultado de b). Si no resolvió ese apartado, considere que su probabilidad es p_b.

(2.0 puntos)

2.- Se define la variable aleatoria $\mathbf{Z}$ de la forma

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{X}_i,$$

donde los coeficientes a_i son números reales y las variables aleatorias $\mathbf{X}_i$ son independientes entre sí y siguen una distribución de Poisson con parámetro $\lambda_i > 0$, para $i = 1, \ldots, N$. Se define, asimismo, la variable aleatoria $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{Z}$. Se pide:

a) Determine la media y la varianza de la variable $\mathbf{Z}$.

b) Suponiendo que $a_i = \frac{1}{N}$ y $\lambda_i = \lambda$ determine la media y la varianza de la variable aleatoria $\mathbf{Y}$.

c) En las condiciones del apartado anterior, determine el coeficiente de correlación entre las variables aleatorias $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Z}$.

(2.0 puntos)

3.- La secuencia aleatoria $\mathbf{W}[n]$ está formada por variables aleatorias de ruido blanco gaussiano, WSS, de media cero y desviación típica σ. En relación con ella:

a) Se forma la secuencia

$$\mathbf{Z}[n] = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{W}[i],$$

para $n \geq 0$. Obtenga $R_{\mathbf{Z}}[n_1, n_2]$ e indique si el proceso es WSS.

b) A partir de la secuencia $\mathbf{Z}[n]$ del apartado anterior se define la secuencia $\mathbf{X}[n]$ de la forma

$$\mathbf{X}[n] = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{Z}[k],$$

para $n \geq 0$. Obtenga $E\{\mathbf{X}^2[2]\}$. Si precisase de $R_{\mathbf{Z}}[n_1, n_2]$ y no hubiese resuelto el apartado anterior, considere que $R_{\mathbf{Z}}[n_1, n_2] = \sigma^2 \frac{n_1+n_2}{2}$.

c) La secuencia $\mathbf{W}[n]$ pasa por un sistema lineal e invariante de respuesta al impulso $h[n] = a_0\delta[n] + a_1\delta[n-1]$, cuya salida es la secuencia $\mathbf{Y}[n]$. Calcule $P(\mathbf{Y}[n] \leq \alpha)$ (suponga que a_0, a_1 y α son números reales cualesquiera).

(3.0 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Mayo 2016

1.- En un supermercado hay una estantería con K estantes y N productos en cada uno de ellos. Un cliente escoge varios de esos productos al azar. Consideremos que dos productos son contiguos si están en el mismo estante y no existe un tercer producto entre ellos (en consecuencia, al escoger algún producto, el hueco que pueda quedar entre dos que permanecen en la estantería no impide que éstos sean contiguos). Se pide:

a) Si el cliente escoge dos productos, probabilidad de que sean contiguos.

b) Si el cliente escoge cuatro productos, probabilidad de que los dos últimos sean contiguos supuesto que se han escogido los dos primeros de la estantería más elevada.

c) Si el cliente escoge cuatro productos, probabilidad de contigüidad por parejas sucesivas (esto es, que sean contiguos los dos primeros y que lo sean también los dos segundos, pero no necesariamente los cuatro). Si le hiciesen falta alguno de los resultados anteriores y no los hubiese obtenido, considere que la probabilidades solicitadas son p_a y p_b, respectivamente, para los apartados a) y b).

(2 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Mayo 2016

2.- Sea la variable aleatoria bidimensional $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ definida por

$$f_{\mathbf{XY}}(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 < x, y \leq 1 \\ \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcule el estimador lineal y el estimador óptimo de $\mathbf{Y}$ como función de $\mathbf{X}$. Determine, a partir de los estimadores, si las variables son independientes y/o incorreladas.

b) Se definen las variables $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ y $\mathbf{W} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$. Obtenga $f_{\mathbf{ZW}}(z,w)$ y $f_{\mathbf{Z}}(z)$.

c) Determine $P\left((\mathbf{Z}-1)^2 + \mathbf{W}^2 > \frac{1}{4}\right)$. Si no resolvió el apartado anterior, obtenga entonces $P\left(\left(\mathbf{X}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\mathbf{Y}-\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}\right)$.

(2 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Junio 2016

1.- Un receptor de comunicaciones digitales recibe mensajes de M bits (asúmase que $M > 4$). El receptor está dotado de un código de corrección de errores que le permite recuperar el mensaje a pesar de que existan algunos errores en la recepción. Supongamos que la probabilidad de recibir un bit correctamente es p y que los bits son independientes entre sí. Se pide lo siguiente:

a) El receptor consigue recuperarse de un máximo dos errores si éstos no se producen en bits contiguos. Calcule la probabilidad de recibir el mensaje correctamente.

b) La empresa propietaria consigue mejorar la tecnología de forma que el mensaje se recibe correctamente si se produce un máximo de tres errores si éstos no se dan en (al menos) dos bits contiguos. Calcule la probabilidad de recibir un mensaje correcto en estas nuevas condiciones.

c) El receptor está ubicado en un caseta de montaña de forma que es sensible a la temperatura. Cuando el clima es frío, la probabilidad de bit correcto es p_f; en otro caso, esa probabilidad es p_c. Supuesto que hace frío las tres cuartas partes del año, calcule la probabilidad de recepción correcta de mensaje en las condiciones del apartado b). Si no lo resolvió, considere que la probabilidad allí pedida es $P_b(p)$, con p la probabilidad de bit correcto empleada en ese apartado.

(2.0 puntos)

2.- Sean las variables aleatorias $\mathbf{X}_i \sim \exp(\lambda)$, para $i = 1, \ldots, N$, independientes entre sí, y se define la variable

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i^2.$$

Se pide lo siguiente:

a) Para $N = 2$, calcule la función de densidad de probabilidad $f_{\mathbf{X}_1\mathbf{Y}}(x_1, y)$ y el estimador óptimo sin restricciones de $\mathbf{Y}$ como función de $\mathbf{X}_1$.

b) Obtenga una cota no trivial para $P(\mathbf{Y} > \varepsilon)$ con N un número natural arbitrario y $\varepsilon > 0$.

c) Suponiendo ahora que $N \gg 1$, determine el valor aproximado de la probabilidad del apartado anterior.

(2.0 puntos)

3.- La secuencia real $\mathbf{X}[n] = \mathbf{A}[n]\cos(\Omega_c n + \mathbf{\Theta})$ es tal que $\mathbf{A}[n]$ es una secuencia de media $\eta_{\mathbf{A}}$ y función de autocorrelación $R_{\mathbf{A}}[m]$ y, por su parte, $\mathbf{\Theta}$ es una variable discreta que puede tomar los valores $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ equiprobablemente. Se pide:

a) Si $\mathbf{A}[n]$ y $\mathbf{\Theta}$ son independientes, obtenga $\eta_{\mathbf{X}}[n]$ y $R_{\mathbf{X}}[n_1, n_2]$. ¿Es $\mathbf{X}[n]$ WSS?

b) El proceso $\mathbf{A}[n]$ surge de filtrar un ruido blanco $\mathbf{W}[n]$ de media η y autocovarianza $C_{\mathbf{W}}[m] = \sigma^2\delta[m]$ a través de un sistema lineal e invariante cuya respuesta al impulso $h[n]$ es igual a $\frac{1}{M}$ en $0 \leq n \leq M-1$ y es nula fuera de esa región. Se pide que obtenga el valor de $R_{\mathbf{A}}[m = 0]$ a partir de los datos de este apartado.

c) Considere ahora que el proceso $\mathbf{X}[n]$ es la señal recibida en antena por un avión y que los cuatro valores de la variable $\mathbf{\Theta}$ proceden de cuatro tipos distintos de rutas que puede emplear el avión. Considere, asimismo, que la amplitud recibida $\mathbf{A}[n]$ es ahora un proceso gaussiano cuya media es $f(\mathbf{\Theta})$ y su varianza es μ^2. Si el avión vuela por una ruta para la que $\mathbf{\Theta} = \pi$, calcule, en estas condiciones, el valor medio de la secuencia $\mathbf{X}[n]$.

(3.0 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Julio 2016

1.- Un cofre contiene inicialmente o monedas de oro y p monedas de plata. Se extrae una moneda al azar, se anota de qué tipo es, y se vuelve a introducir en el cofre junto con d monedas más del mismo tipo. Esta operación se repite iterativamente. Se pide:

a) Probabilidad de que la segunda moneda extraída sea de oro.

b) Probabilidad de que la primera moneda sea de oro supuesto que la segunda también lo es.

c) Probabilidad de que la primera moneda sea de oro, supuesto que las n siguientes monedas extraídas también son de oro. Calcule el límite de esta expresión cuando $n \to \infty$.

(2.0 puntos)

2.- Considere la variable aleatoria bidimensional $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, cuya función de densidad de probabilidad conjunta viene dada por:

$$f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)} & 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Se pide:

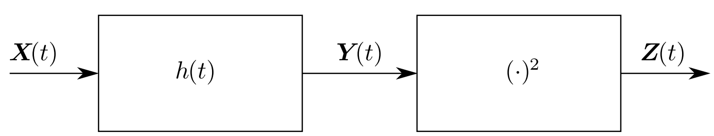
a) Razone si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son ortogonales y/o independientes.

b) Calcule las funciones de densidad marginales.

c) $E\{\mathbf{Y}|\mathbf{X}\}$.

(2.0 puntos)

3.- El proceso $\mathbf{X}(t)$ es un proceso estocástico real, gaussiano, de media η y función de autocovarianza $C_{\mathbf{X}}(\tau) = N_0\delta(\tau)$. Se procesa tal y como se indica en la siguiente figura



donde $h(t) = \frac{1}{T}$ en $0 < t < T$, y nula en el resto. Se pide:

a) $P(|\mathbf{Y}(t)| \leq a)$ con a una constante real positiva.

b) Estimador lineal de $\mathbf{Y}(t_1)$ como función de $\mathbf{Y}(t_2)$.

c) Justifique si el proceso $\mathbf{Z}(t)$ es estacionario en sentido amplio. Calcule, a su vez, $R_{\mathbf{Z}}(t_1, t_2)$ el caso en que $|t_1 - t_2| > T$.

(3.0 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Marzo 2017

1.- Dos robots se encuentra en una sala; el primero de ellos (robot A) está situado en el punto (0,0) y el segundo, robot B, en el (L,L). Suponga que los robots se mueven en instantes discretos y de forma síncrona (es decir, en los mismo instantes). El robot A se mueve en cada instante bien una posición hacia la derecha (aumenta en una unidad la primera coordenada) con probabilidad p ó bien una posición hacia arriba (aumenta en una unidad la segunda coordenada) con probabilidad $q = 1 - p$. Al respecto del segundo, se mueve de forma determinística en cada instante, en instantes impares una posición hacia abajo (disminuye en una unidad la segunda coordenada) y en instantes pares hacia la izquierda (disminuye en una unidad la primera coordenada). Considere que el primer instante en que se mueven los robots es el instante 1; considere, asimismo, que la sala es lo suficientemente grande como para que podamos ignorar la presencia de paredes. En estas condiciones, se pide:

a) Si $L = 5$, probabilidad de que los robos no choquen (es decir, que no coincidan en el mismo punto en el mismo instante).

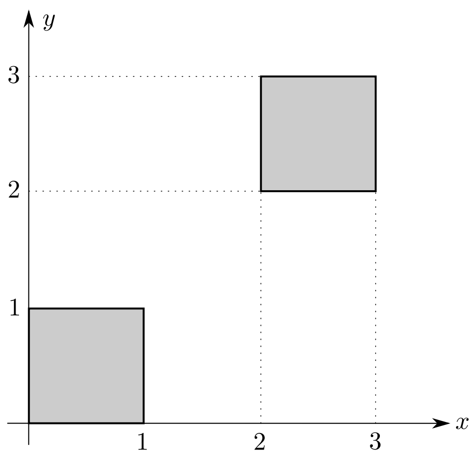
b) Probabilidad de que los robots no choquen para un valor de $L \geq 1$ genérico. Se sugiere que distinga los casos de L par y L impar.

c) Supongamos que se realiza el experimento (poner a funcionar a los robots desde las posiciones indicadas arriba) tantas veces como sea preciso hasta que choquen. Considere que las ejecuciones son independientes entre sí. Se pide que calcule la probabilidad de que los robots choquen después del cuarto intento. Considere que la probabilidad p a que hemos hecho referencia antes es $p = a^j$, con $0 < a < 1$, y que el índice j indica el número de orden del experimento ($j \geq 1$). Si no resolvió el apartado anterior considere que la probabilidad pedida es $P(p)$.

(2.0 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Mayo 2017



2.- Considere una función de densidad de probabilidad bidimensional con valor constante en el dominio rayado en la figura y cero fuera. Se pide lo siguiente:

a) Determine el estimador lineal $\hat{\mathbf{Y}}$ de $\mathbf{Y}$ a partir de $\mathbf{X}$ y calcule la varianza del error $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$.

b) Determine el estimador sin restricciones de $\mathbf{Y}$ a partir de $\mathbf{X}$.

c) Determine la función de densidad de probabilidad de la variable $\mathbf{Z} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$.

(2.0 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Junio 2017

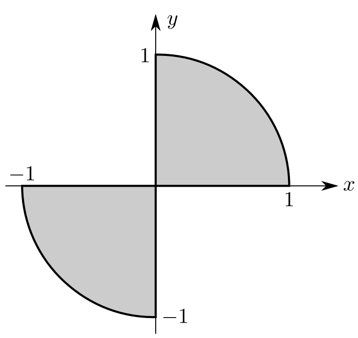
1.- En un sorteo de cuartos de final de una determinada competición deportiva (8 equipos) coinciden tres equipos españoles, dos franceses y otros tres equipos de distintos países entre sí y distintos a los países anteriores. Se pide:

a) Suponiendo que el sorteo no tiene ninguna restricción, calcule la probabilidad de que coincidan dos equipos españoles en algún cruce.

b) Suponga ahora que la reglas del sorteo son tales que no se permite que coincidan en el mismo cruce dos equipos del mismo país. El sorteo se hace por ordenador pero el programa que lo implementa se limita a hacer una selección aleatoria y, si el resultado no cumple con la restricción, se descarta el resultado y se vuelve a emitir otro, procedimiento que se repite hasta que el resultado cumpla con la restricción. En estas condiciones, calcule la probabilidad de que un sorteo no sea válido.

c) En las condiciones del apartado b), calcule la probabilidad de que se descarten k sorteos antes de aceptar el resultado (suponga que las ejecuciones de los sorteos son independientes entre sí). Si no resolvió el apartado anterior, y le hiciese falta su resultado, considere que la probabilidad allí solicitada es p_b.

(2.0 puntos)



2.- Considere una función de densidad de probabilidad bidimensional con valor

$$f_{\mathbf{XY}}(x,y) = k|x|,$$

en el dominio rayado en la figura adjunta y cero fuera.
Se pide lo siguiente:

a) Calcule la constante k y determine el estimador óptimo de $\mathbf{Y}$ a partir de $\mathbf{X}$.

b) Calcule $P(\mathbf{X} > \mathbf{Y})$.

c) Si se define una nueva variable $\mathbf{Z} = \mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2$, determine su función de distribución $F_{\mathbf{Z}}(z)$.

(2.0 puntos)

3.- Se define el proceso $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}_1 \cos(\omega_1 t + \boldsymbol{\Theta}_1) + \mathbf{A}_2 \cos(\omega_2 t + \boldsymbol{\Theta}_2)$, con $\boldsymbol{\Theta}_1$ y $\boldsymbol{\Theta}_2$ variables aleatorias independientes entre sí, discretas, que toman los valores $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ de manera equiprobable. Por otra parte, las variables $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ son variables exponenciales de parámetro $\lambda > 0$, independientes entre sí e independientes de $\boldsymbol{\Theta}_1$ y $\boldsymbol{\Theta}_2$.

a) Justifique si el proceso $\mathbf{X}(t)$ es WSS.

b) Suponga que $h_1(t)$ y $h_2(t)$ son respuestas al impulso de dos filtros ideales, centrados respectivamente en las pulsaciones ω_1 y ω_2 y con ancho de banda $\Delta\omega$ cada uno. Aceptemos que $\omega_2 - \omega_1 > \Delta\omega > 0$. Si $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t) \star h_1(t)$ y $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{X}(t) \star h_2(t)$, obtenga el estimador linear de $\mathbf{Y}(t_1)$ como función de $\mathbf{Z}(t_2)$, $\forall t_1, t_2$.

c) Suponga ahora que $\mathbf{X}(t) = \mathbf{B}\cos(\omega t + \boldsymbol{\Theta})$, donde $\boldsymbol{\Theta}$ toma los valores $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ con probabilidades respectivas $\{\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\}$ y se sabe que $E\{\mathbf{B}|\boldsymbol{\Theta}\} = \boldsymbol{\Theta}^2$. Se pide que calcule $E\{\mathbf{X}(t)\}$.

(3.0 puntos)

NOTA: puede utilizar la siguiente expresión si lo necesita:

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{1-x^2} + C.$$

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Julio 2017

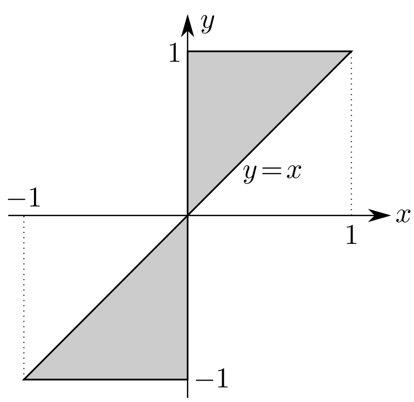
1.- Suponga que las selecciones nacionales de baloncesto de España y Francia disputan el "Torneo Estival Galo-Español de Baloncesto". En este torneo se considera vencedor al primer equipo que gane cuatro partidos. Considere que la probabilidad de que la selección española gane un partido es 0.6 (recuerde que en baloncesto no puede concluir un partido en empate). Asuma, a su vez, que dichas probabilidades no cambian a lo largo del torneo y que los partidos son independientes entre sí. Se pide:

a) Probabilidad de que cada selección gane dos partidos durante los cuatro primeros enfrentamientos. Probabilidad de que el torneo finalice en 5 partidos.

b) Probabilidad de que gane España si sabemos que el torneo ha durado 7 partidos.

c) Suponga ahora que este torneo se ha celebrado durante cien ediciones y que las condiciones en cada edición son las mismas a lo largo de todas ellas. Suponga, además, que las ediciones son independientes. Se pide que calcule la probabilidad de que la selección francesa no gane ningún partido del torneo en, al menos, 5 de tales ediciones.

(2.0 puntos)



2.- Considere una función de densidad de probabilidad bidimensional con valor

$$f_{\mathbf{XY}}(x,y) = k(x^2+y^2),$$

en el dominio rayado en la figura de la izquierda y cero fuera. Se pide:

a) Calcule la constante k y determine las funciones de densidad marginales.

b) Calcule el estimador óptimo sin restricciones de $\mathbf{X}$ como función de $\mathbf{Y}$.

c) Determine $C_{\mathbf{XY}}$.

(2.0 puntos)

3.- La secuencia aleatoria $\mathbf{X}[n]$ se define mediante la ecuación en diferencias $\mathbf{X}[n] = a\mathbf{X}[n-1] + \mathbf{W}[n]$, con $0 < a < 1, \forall n \geq 1$ y $\mathbf{W}[n]$ un secuencia de ruido blanco gaussiano de media nula y varianza σ^2. Se sabe también que $\mathbf{X}[0] \sim N(0, \sigma_0)$, así como que $\mathbf{X}[0]$ es independiente de la secuencia $\mathbf{W}[n]$. Se pide:

a) $R_{\mathbf{X}}[2,1]$.

b) Calcule $P(|\mathbf{X}[n]| \leq \mu)$, con $\mu > 0$.

c) Considere la secuencia $\mathbf{Y}[n] = a\mathbf{Y}[n-1] + \mathbf{U}[n]$, con $0 < a < 1$ y $\mathbf{U}[n]$ una secuencia de ruido blanco gaussiano de media nula y varianza σ^2; considere que $\mathbf{Y}[n]$ se define también $\forall n \geq 1$ y que $\mathbf{Y}[0] \sim N(0, \sigma_0)$. Considere las mismas condiciones del apartado b) para el proceso $\mathbf{X}[n]$, así como que las secuencias $\mathbf{W}[n]$ y $\mathbf{U}[n]$ y las variables $\mathbf{X}[0]$ e $\mathbf{Y}[0]$ son todas independientes entre sí. Suponga que $(\mathbf{X}[n], \mathbf{Y}[n])$ representa las coordenadas de un avión en el instante n sobre una pantalla de radar. Si éstas están dadas en kilómetros, calcule la probabilidad de que el avión esté dentro de un círculo de radio r kilómetros (centrado en el origen de coordenadas) en el instante n. Si no respondió al apartado anterior, considere $\sigma^2_{\mathbf{X}}[n]$ conocida.

(3.0 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Diciembre 2017

1.- Un sistema de detección de intrusos está formado por 5 subsistemas. El sistema puede emplear dos estrategias diferentes para decidir sobre la presencia o ausencia de intrusos, a saber: 1) Consultar todos los subsistemas y decidir la presencia de intrusos si el número de subsistemas que dan alarma es mayor o igual que 3. 2) Realizar una consulta secuencial de los subsistemas. En el momento en que la salida de tres subsistemas coincide, la consulta finaliza y el sistema produce la salida correspondiente (ausencia o presencia de intruso). Considerando un escenario sin intrusos, y subsistemas independientes cuya probabilidad de falsa alarma es p, calcule:

a) Probabilidad de falsa alarma del sistema global para la estrategia 1.

b) Ídem para la estrategia 2.

c) Para la estrategia 2, probabilidad de falsa alarma del sistema global si se sabe que el número de consultas ha sido 3.

d) Escriba las sentencias MATLAB necesarias para simular el funcionamiento del sistema y calcular la probabilidad de falsa alarma de forma experimetal, en las condiciones del apartado a).

(3.0 puntos)

2.- Sea una variable aleatoria $\mathbf{X}$ gaussiana con media nula y desviación modelada por una segunda variable aleatoria $\mathbf{Y}$ cuya distribución viene dada por

$$f_{\mathbf{Y}}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y^2} & y > 1 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Además se definen las variables aleatorias $\mathbf{Z}=\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ y $\mathbf{W}=\mathbf{X}-\mathbf{Y}$. Se pide:

a) Determine $f_{\mathbf{X}}(x)$.

b) Determine $f_{\mathbf{ZW}}(z,w)$ y su dibuje el dominio de definición.

c) Suponiendo que la variable `datosX` represente los datos simulados en MATLAB para la variable aleatoria $\mathbf{X}$, escriba las sentencias MATLAB necesarias para poder representar en la misma figura el histograma normalizado y la curva teórica determinada en el apartado a).

(3.0 puntos)

3.- Sea la secuencia aleatoria $\mathbf{X}[n]=\cos(\Omega_0 n+\mathbf{\Theta})+\mathbf{W}[n]$, donde Ω_0 es una constante real positiva, $\mathbf{\Theta}$ una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0,2\pi)$ y $\mathbf{W}[n]$ una secuencia aleatoria blanca con distribución de Poisson con parámetro $\lambda>0$ e independiente de la variable $\mathbf{\Theta}$. La secuencia aleatoria $\mathbf{X}[n]$ se pasa por el filtro LTI discreto $h[n]=\frac{1}{N}$ para $n=\{0,1,\ldots,N-1\}$ y cero en otro caso, dando lugar a la secuencia $\mathbf{Y}[n]$. Se pide:

a) Determine la media y función de autocorrelación de la secuencia aleatoria $\mathbf{X}[n]$. Verifique que es WSS.

b) Determine la potencia de la secuencia $\mathbf{Y}[n]$.

c) Suponga que la variable `datosX` representa la simulación en MATLAB de la secuencia $\mathbf{X}[n]$ con `Nexp` filas y `M` columnas (cada fila representa un experimento y cada columna una posición temporal del índice n). Suponga además que el vector `h` define los coeficientes del filtro $h[n]$. Escriba las sentencias de MATLAB oportunas para determinar la potencia experimental de la secuencia $\mathbf{Y}[n]$.

(4.0 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Marzo 2018

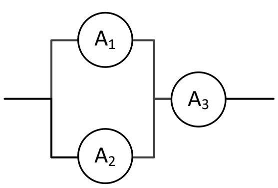
1.- En una red de comunicaciones se establece el enlace mediante dos subredes independientes A y B conectadas en paralelo tal y como se indica en la figura adjunta. La red A está formada por 3 nodos y admite dos posibles configuraciones o modos de funcionamiento. Se sabe que: $P(A_i)=p_1, i=\{1,2,3\}$, $P(A_i|A_j)=p_2, \{i,j\}=\{1,2,3\}, i\neq j$, y $P(A_i|A_jA_k)=p_3, \{i,j,k\}=\{1,2,3\}, i\neq j, i\neq k, j\neq k$, con el suceso $A_i=$"El nodo A_i funciona correctamente", $i=\{1,2,3\}$. Por otra parte, la red B está formada por 5 nodos independientes interconectados de forma inalámbrica. La probabilidad de funcionamiento correcto de cada uno de ellos es $P(B_k)=p, k=\{1,\ldots,5\}$. Dichos nodos se agrupan además en dos subredes como se ve en la figura. Se pide:

a) Probabilidad de comunicación correcta en la red A si las probabilidades de adoptar respectivamente las configuraciones a o b (ver figura adjunta) son $P(A_a)=p_a$ y $P(A_b)=p_b$.

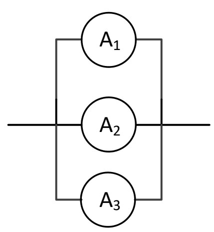
b) Probabilidad de comunicación correcta en la red B si para que ésta exista deben cumplirse simultáneamente las siguientes dos condiciones: 1) que la mayoría de nodos en la primera subred (B_a, formada por B_1, B_2 y B_3) funcione y, 2) que la mayoría de nodos en toda la red B funcione.

c) Suponga que se envían N mensajes independientes por la red. Calcule la probabilidad de que se reciban menos de 3 mensajes incorrectos. Exprese el resultado en función de las respuestas respectivas a cada uno de los apartados anteriores: p_A y p_B.

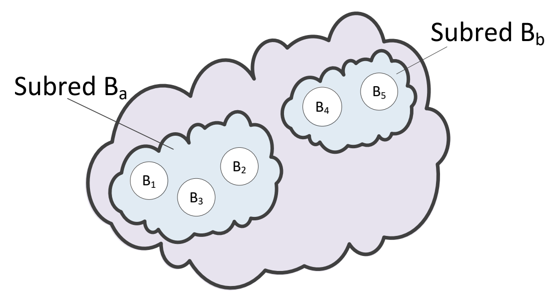
(2.0 puntos)

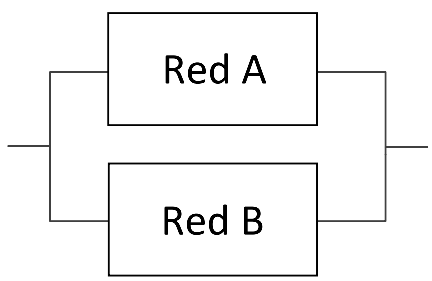


Configuración a para la red A



Configuración b para la red A

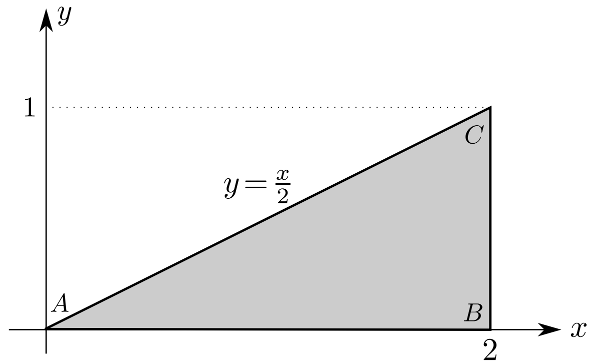




Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Mayo 2018

2.- Sea una variable aleatoria bidimensional con $f_{\mathbf{XY}}(x,y)=ke^{-x}e^{-y}$ en el dominio que se muestra sombreado en la siguiente figura y cero fuera de ella.



Se pide lo siguiente:

a) Determine la constante k.

b) Calcule el estimador óptimo sin restricciones de $\mathbf{Y}$ como función de $\mathbf{X}$.

c) Se define una nueva variable $\mathbf{Z}=\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$. Obtenga $f_{\mathbf{ZX}}(z,x)$.

d) Determine el estimador óptimo sin restricciones de la variable $\mathbf{Z}$, definida en el apartado anterior, como función de $\mathbf{X}$.

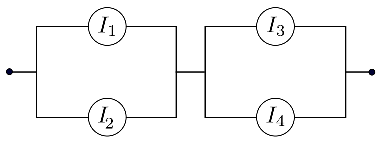
NOTA: se puede usar la siguiente igualdad

$$\int_0^a x^n e^{-x}dx = n!\left(1-e^{-a}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\right).$$

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Junio de 2018

1.- En la siguiente figura se puede ver el esquema equivalente de un dispositivo electrónico, donde los bloques I_1 e I_3 son independientes de los bloques I_2 e I_4.

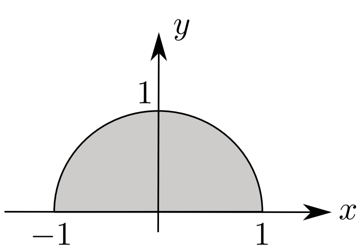


a) Asuma que la probabilidad de funcionamiento correcto de los bloques cumple que $P(I_i)=p$, con $i=\{1,2,3,4\}$ y que $P(I_3|I_1)=P(I_4|I_2)=p_c$. Determine la probabilidad p^a de que el dispositivo funcione correctamente.

b) Suponga ahora que se dispone de lotes de 5 dispositivos independientes numerados del 1 al 5 como el de la figura anterior, pero, por problemas de fabricación, su probabilidad de funcionamiento correcto no es la misma y viene dada por p_j^a, con $j=\{1,2,3,4,5\}$. Un sistema automático de inspección comprueba los lotes examinando por orden los dispositivos y descarta un lote al encontrar un dispositivo defectuoso, de modo que solo inspecciona dispositivos hasta llegar al primero que no funcione o terminar el lote. Calcular la probabilidad de descarte de lote.

c) Considere ahora que se desea llevar a cabo un test de calidad de uno solo de dichos dispositivos, probándolo sucesivamente 6 veces con diversas condiciones de funcionamiento. Suponga que las pruebas se llevan a cabo una a continuación de la anterior, de forma que el funcionamiento del dispositivo en cada prueba va a depender de si funcionó o no en la prueba anterior. Asuma que la probabilidad de funcionamiento correcto del dispositivo en la primera prueba es la determinada en el apartado a), p^a. Para el resto de pruebas suponga que dicha probabilidad es p_f^a, si el dispositivo funcionó en la prueba precedente, y p_n^a, si el dispositivo no funcionó en la prueba precedente. Para que el test de calidad tenga éxito el dispositivo debe funcionar correctamente en al menos 5 de las 6 pruebas. Determine la probabilidad de que se supere dicho test de calidad.

(2.0 puntos)



2.- Una variable aleatoria $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ tiene una función de densidad constante e igual a K y no nula en la región semicircular sombreada en la figura adjunta y nula fuera de dicha región. Se pide:

a) Valor de la constante K.

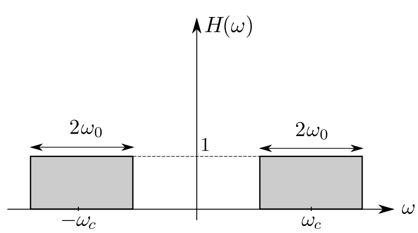
b) $P\left(\mathbf{Y}>\frac{|\mathbf{X}|}{\sqrt{3}}\right)$.

c) Estimador óptimo sin restricciones de la variable $\mathbf{Y}$ como función de $\mathbf{X}$.

d) Obtenga la varianza de la variable transformada $\mathbf{R}=\sqrt{\mathbf{X}^2+\mathbf{Y}^2}$.

(2.0 puntos)

3.- Sea un proceso $\mathbf{X}(t)$ real, gaussiano y estacionario en sentido amplio del que se conocen su media, η, y su función de autocorrelación, $R(\tau)$. Considere también el proceso $\mathbf{S}(t)=\mathbf{X}(t)\cos(\omega_c t+\mathbf{\Theta})$, con $\mathbf{\Theta}$ una variable uniforme en el intervalo $(0,2\pi)$ independiente de $\mathbf{X}(t)$ y ω_c constante. Se pide:



a) Calcular la covarianza $C_{\mathbf{YZ}}$ para las variables $\mathbf{Y}=\mathbf{X}(t+\tau)-\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{Z}=\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}(t-\tau)$.

b) Obtener el estimador óptimo sin restricciones de $\mathbf{Z}$ como función de $\mathbf{Y}$. Si no resolvió el apartado anterior puede expresarlo en función de $C_{\mathbf{YZ}}$.

c) Media y autocorrelación del proceso $\mathbf{S}(t)$ en función de los parámetros del problema.

d) Potencia media de la salida $\mathbf{Y}(t)$ de un sistema LTI con la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ representada en la figura adjunta y cuya entrada es $\mathbf{S}(t)$. Para ello, considere que la densidad espectral de potencia del proceso $\mathbf{X}(t)$ es $S_{\mathbf{X}}(\omega)=N_0\left(1-\frac{|\omega|}{2\omega_0}\right)$, para $-2\omega_0\leq\omega\leq 2\omega_0$, y nula fuera de ese rango. Asuma $\omega_c\gg\omega_0$, con ω_0 y ω_c constantes.

(3.0 puntos)

NOTAS:

- Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son variables conjuntamente gaussianas, ambas con media nula, varianza σ^2 y coeficiente de correlación ρ, entonces $\mathbf{Y}|\mathbf{X}\sim\mathcal{N}(\rho\mathbf{X},\sigma\sqrt{1-\rho^2})$.
- $\cos(\omega_c t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\pi\left[\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)\right]$.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Julio de 2018

1.- Responda a las siguientes cuestiones:

a) Un sistema consta de dos dispositivos de iguales prestaciones. Para dichos dispositivos se sabe que la probabilidad de funcionamiento individual correcto $P(A_i)$, $i=\{1,2\}$, es la misma para ambos, y que la probabilidad de que uno funcione correctamente supuesto que el otro también lo hace es $P(A_i|A_j)=p_c$, $i\neq j$. El sistema solo deja de funcionar si ninguno de los dos dispositivos funciona correctamente. Se sabe que la probabilidad de que el sistema no funcione es p. Calcule $P(A_i)$ y $P\big(A_i|\overline{A}_j\big)$, $i\neq j$, en función de los parámetros del problema.

b) El número de errores ortográficos cometidos por una persona por página escrita sigue una distribución de Poisson de parámetro λ_i. Considerando páginas independientes, obtenga el número medio de errores cometidos al escribir 10 páginas, y la probabilidad de que el número de errores en esas 10 páginas sea mayor que 2.

c) En la primera fase del mundial de fútbol, un equipo juega tres partidos. En cada uno de ellos, puede ganar, empatar, o perder con probabilidades respectivas, p_g, p_e y p_p. Un equipo pasa a la segunda fase si gana dos o más partidos o bien, si gana uno y empata al menos otro. Calcule la probabilidad de que dicho equipo pase de ronda asumiendo independencia entre partidos.

(2.0 puntos)

2.- Sean dos variables aleatorias independientes $\mathbf{U}\sim\mathcal{U}(0,1)$ y $\mathbf{V}\sim\mathcal{U}(0,1)$. Se pide:

a) Función de densidad de probabilidad de la variable $\mathbf{R}=\sqrt{-2\ln(\mathbf{U})}$.
b) Función de densidad de probabilidad de la variable $\mathbf{X}=\mathbf{R}\cos(2\pi\mathbf{V})$.
c) Media y varianza de la variable $\mathbf{Z}=\rho\mathbf{R}\cos(2\pi\mathbf{V})+\sqrt{1-\rho^2}\,\mathbf{R}\,\mathrm{sen}(2\pi\mathbf{V})$, con $|\rho|\leq 1$.
d) $P\Big(|\mathbf{Z}|>\sqrt{1-\rho^2}\Big)$.

(2.0 puntos)

3.- Sean los procesos reales $\mathbf{Y}_1[n]=\mathbf{X}_1[n]\mathrm{sen}(\Omega_c n+\mathbf{\Theta})$ e $\mathbf{Y}_2[n]=\mathbf{X}_2[n]\cos(\Omega_c n+\mathbf{\Theta})$, donde $\mathbf{X}_1[n]$ y $\mathbf{X}_2[n]$ son dos procesos reales, gaussianos, blancos con media η y varianza σ^2 independientes entre sí e independientes de la variable aleatoria $\mathbf{\Theta}$, que se sabe es uniforme en el intervalo $(-\pi,\pi)$. Se pide lo siguiente:

a) Determine el estimador lineal de $\mathbf{Y}_2[n+k]$ como función de $\mathbf{Y}_1[n]$.

b) Suponga que $\eta=0$. Se define el proceso $\mathbf{U}[n]=\mathbf{Y}_1[n]\mathbf{Y}_2[n]$. Compruebe si dicho proceso es WSS.

c) Bajo el supuesto que $\eta=0$, se define ahora el proceso $\mathbf{W}[n]=\mathbf{Y}_1[n]+\mathbf{Y}_2[n]$. Este proceso se aplica a la entrada de un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h[n]=a^n u[n]$, con $0<a<1$ y $u[n]$ la función escalón, para dar lugar al proceso $\mathbf{Z}[n]$ a la salida de dicho sistema. Determine la potencia del proceso de salida $\mathbf{Z}[n]$.

(3.0 puntos)

NOTA: la suma de dos variables independientes de Poisson con parámetros a_1 y a_2 es también una variable de Poisson con parámetro a_1+a_2.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Marzo 2019

1.- Un examen tipo test de respuesta múltiple posee $N=10$ preguntas, cada una de las cuales presenta 4 opciones posibles (a, b, c y d), de las cuales solo una es correcta en cada pregunta. Suponiendo que un alumno contesta todas las preguntas de forma independiente y eligiendo totalmente al azar la respuesta de cada una, calcule:

a) Probabilidad de que el alumno conteste correctamente a un máximo de 3 preguntas.

b) Denominando α al número de respuestas acertadas, calcule el valor de α más probable.

c) Considere que el examen es tipo MIR y está formado por $N=500$ preguntas. Calcule la probabilidad de que el alumno acierte un número de preguntas superior a 100 pero inferior a 150.

d) (OPTATIVO) Suponga ahora que el alumno puede repetir cuantas veces desee la realización del cuestionario (con $N=10$). Si se establece que para aprobar se necesitan al menos 7 respuestas correctas, determine la probabilidad de que apruebe el examen en un número máximo de 250 intentos. Suponga intentos independientes.

(2.0 + 0.5 puntos)

2.- Sea una variable aleatoria $\mathbf{X}$ cuya función densidad de probabilidad viene dada por $f_{\mathbf{X}}(x)=ke^{-|x|}$. Se pide lo siguiente:

a) Determine la constante k, así como la media y varianza de la variable $\mathbf{X}$.

b) Suponga que se define una nueva variable $\mathbf{Y}=\mathbf{X}^4$, determine $f_{\mathbf{Y}}(y)$ y verifique que cumple las propiedades de función densidad de probabilidad.

c) Suponga ahora que un barco recibe una señal en su antena cuya amplitud viene representada por la variable aleatoria $\mathbf{X}\sim N(3,1)$. Además se sabe que en ausencia de señal la amplitud observada sigue la distribución definida en el apartado a). Suponiendo que en un cierto instante la amplitud es $\mathbf{X}=2$ y que la probabilidad de recibir la señal es de $p=0.3$, determine la probabilidad de que dicha amplitud haya sido debida a que se recibió señal en la antena.

d) (OPTATIVO) Considere que la variable $\mathbf{X}$ sigue la distribución definida en el apartado a) y que el evento $\{\mathbf{X}>1\}$ se ha cumplido, calcule $F_{\mathbf{X}}(x|\mathbf{X}>1)$ y $f_{\mathbf{X}}(x|\mathbf{X}>1)$.

(2.0 + 0.5 puntos)

Nota: puede hacer uso de la expresión:

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

Universidad de Valladolid – ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Mayo de 2019

1.- Una fábrica de bombones puede fabricar 20 tipos diferentes de éstos. Entre ellos, hay 3 de chocolate blanco y dos con avellana. Se va a lanzar una nueva caja de forma circular donde se sitúan 12 unidades describiendo una circunferencia. Dentro de la caja no puede repetirse un producto. Calcule:

a) Considerando que los 3 modelos de chocolate blanco y los 2 de avellana han de estar siempre en las cajas generadas, ¿cuál es la probabilidad de que eligiendo al azar los 12 productos que componen ésta, la caja confeccionada cumpla esta restricción?

b) A lo largo de un día se fabrican N cajas en las condiciones del apartado anterior, es decir, para cada caja se eligen al azar 12 productos de entre los 20 tipos posibles, no se repite ninguno, y la caja solo es válida si están los 5 productos especificados. Calcule la probabilidad de que al menos la mitad de las cajas sean válidas, teniendo en cuenta que N pueda ser un número par o impar. Asuma que la probabilidad pedida en el apartado a) es p_a.

c) Considerando ahora que se decide parar la producción si se producen 10 cajas no válidas (en las condiciones del primer apartado), determine la probabilidad de que se pare la producción después de haber producido M cajas.

(2.0 puntos)

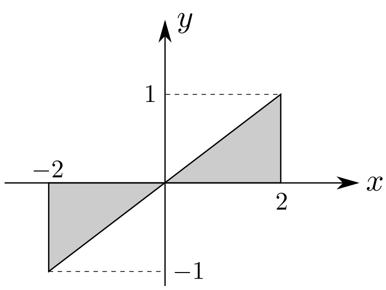
2.- Considere que la amplitud de una señal en una antena se modela como una variable aleatoria $\mathbf{X}$. Se sabe que dicha amplitud tiene distribución normal con media cero y desviación σ los días soleados y distribución uniforme en el intervalo $(-a, a)$ los días de lluvia, siendo a y σ constantes positivas. Además, la probabilidad de que un día sea soleado es p, con $0<p<1$, y entonces $q=1-p$ es la probabilidad de día lluvioso. Se pide lo siguiente:

a) Si se define la variable $\mathbf{Y}=\mathbf{X}^2$, determine su media $\eta_{\mathbf{Y}}$ y su varianza $\sigma^2_{\mathbf{Y}}$.

b) Suponiendo que se verifica el suceso $\{\mathbf{X}>a\}$, calcule en este caso la función de distribución, $F_{\mathbf{X}}(x|\mathbf{X}>a)$.

c) Considerando ahora que se cumple que $a=\sigma$ y que $p=q$, se observa una amplitud en antena de $\mathbf{X}=\frac{\sigma}{2}$. Determine en este caso la probabilidad de que el día sea soleado.

(2.0 puntos)



3.- Considere una variable bidimensional $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ cuya función densidad de probabilidad es constante en la zona definida en la figura y cero fuera. Se pide lo siguiente:

a) Determine la constante k y la covarianza $C_{\mathbf{XY}}$.

b) Determine el estimador óptimo sin restricciones de $\mathbf{Y}$ como función de $\mathbf{X}$.

c) Determine la función densidad de probabilidad de la variable $\mathbf{Z}=\mathbf{X}+\mathbf{Y}$.

(2.0 puntos)

4.- Se define el proceso estocástico $\mathbf{X}(t)=\sqrt{\mathbf{I}^2+\mathbf{Q}^2}\cos(\omega_c t+\mathbf{\Theta})$, con $\mathbf{I}$ y $\mathbf{Q}$ variables aleatorias gaussianas con media nula y desviación típica σ, y $\mathbf{\Theta}$ una variable aleatoria uniforme, todas ellas independientes entre sí. Se define también un proceso $\mathbf{W}(t)$ de ruido blanco con media nula y función de autocorrelación $R_{\mathbf{W}}(\tau)=N_0\delta(\tau)$, independiente de $\mathbf{X}(t)$.

a) Si $\mathbf{\Theta}\sim\mathcal{U}(0,\pi)$, determine si el proceso es WSS. ¿Cuánto vale $E\{\mathbf{X}(t)\}$?

b) Para $\mathbf{\Theta}\sim\mathcal{U}(-\pi,\pi)$, calcule $E\{\mathbf{X}(t)\}$ y $R_{\mathbf{X}}(t_1,t_2)$.

Se hace pasar el proceso $\mathbf{Y}(t)=\mathbf{X}(t)+\mathbf{W}(t)$ por un sistema lineal e invariante de respuesta al impulso $h(t)=e^{-at}u(t)$ con a una constante real positiva para dar lugar a un nuevo proceso $\mathbf{Z}(t)$.

c) Determine la potencia media del proceso $\mathbf{Z}(t)$ en las condiciones del apartado b).

(2.0 puntos)

NOTA: se puede hacer uso, para cualquier número natural n, de la relación:

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 2^{n-\frac{1}{2}}\sigma^{2n+1}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

donde $\Gamma(p)$ representa la integral Gamma para la que se cumple $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$, para todo número real $p>0$ y $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Universidad de Valladolid – ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Junio de 2019

1.- Un equipo de fútbol cuenta con la siguiente plantilla: 8 defensas, 8 centrocampistas, 8 delanteros y 2 porteros. Para jugar un partido, el entrenador selecciona uno a uno 11 jugadores, siendo equiprobable la selección de cada jugador sobre el conjunto disponible en cada momento.

a) Probabilidad de que elegidos 11 jugadores, se obtenga un equipo *válido* (un equipo es *válido* si tiene un portero y 10 jugadores del tipo que sea).

b) Probabilidad de seleccionar un *buen equipo* (un *buen equipo* es aquel formado por 1 portero, 4 defensas, 3 centrocampistas y 3 delanteros).

c) Probabilidad de que en los 3 primeros jugadores elegidos no haya ningún portero.

d) Suponga ahora que en una jornada del campeonato hay 20 partidos independientes donde se emparejan equipos diferentes cuyos jugadores son seleccionados, en cada equipo, de la forma antes descrita y con independencia entre equipos. ¿Cuál es la probabilidad de que más de la mitad de los encuentros tengan ambos equipos del tipo *buen equipo*? Si no calculó el apartado b), denomine p_b a su solución.

(2.0 puntos)

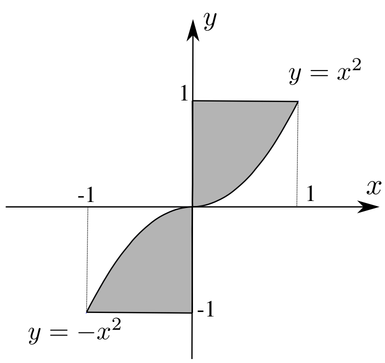
2.- Sea una variable $\mathbf{X}\sim exp(\lambda)$. Se pide lo siguiente:

a) Para la variable transformada $\mathbf{Y}=\sqrt{\mathbf{X}}$, calcule $f_{\mathbf{Y}}(y)$.

b) Determine la media y la varianza de la variable $\mathbf{Y}$ definida en el apartado anterior.

c) Calcule la función de densidad condicionada $f_{\mathbf{X}}(x|\mathbf{X}<\lambda)$.

(2.0 puntos)



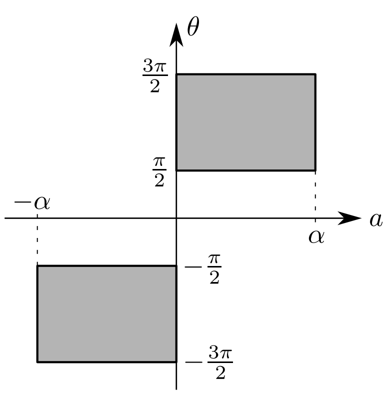
3.- La variable bidimensional $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ tiene una función de densidad $f_{\mathbf{XY}}(x,y)=k$ en la región sombreada en la figura y nula fuera de ella. Se pide:

a) Valor de la constante k y $f_{\mathbf{Y}}(y)$.

b) Estimador óptimo sin restricciones de $\mathbf{Y}$ como función de $\mathbf{X}$.

c) $P\left(|\mathbf{X}|>\frac{1}{2}\right)$.

(2.0 puntos)



4.- Sea la señal aleatoria $\mathbf{X}(t)=\mathbf{A}\cos(\omega_c t+\mathbf{\Theta})$, donde ω_c es una constante real positiva. Las variables $\mathbf{A}$ y $\mathbf{\Theta}$ se distribuyen de forma uniforme en la zona sombreada de la figura adjunta, con α una constante real positiva. Además, se define la señal aleatoria $\mathbf{Y}(t)$ como la salida del sistema $h_1(t)=\delta(t)-\delta(t-1)$, cuando la entrada es la señal aleatoria $\mathbf{W}(t)$, siendo esta última, una señal de ruido blanco con media cero y con $C_{\mathbf{W}}(\tau)=N_0\delta(\tau)$, donde N_0 es una constante real positiva. Se sabe además que la señal aleatoria $\mathbf{W}(t)$ es independiente de las variables $\mathbf{A}$ y $\mathbf{\Theta}$. Calcule lo siguiente:

a) Media y autocorrelación de la señal $\mathbf{X}(t)$.

b) Media y autocorrelación de la señal $\mathbf{Y}(t)$.

c) Si la señal $\mathbf{Z}(t)$ es la salida de un sistema con respuesta al impulso $h_2(t)=1$, para $0\le t\le T$ y cero para el resto, cuando a la entrada se tiene $\mathbf{X}(t)+\mathbf{Y}(t)$, determine la densidad espectral de potencia de la señal $\mathbf{Z}(t)$ a la salida de dicho sistema.

(2.0 puntos)

NOTA: se puede hacer uso, para cualquier número natural n, de la relación:

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = 2^{n-\frac{1}{2}}\sigma^{2n+1}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

donde $\Gamma(p)$ representa la integral Gamma para la que se cumple $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$, para todo número real $p>0$ y $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Abril 2021 (Examen voluntario)

1.- Una bolsa contiene 100 relojes digitales. Cada reloj muestra una hora al azar, en el formato `HH:MM`, donde `HH` puede tomar valores de `00` a `23`, y `MM` de `00` a `59`. Asuma que la hora que marca un reloj no tiene ninguna influencia en la del resto.

a) Calcule la probabilidad de que en la bolsa haya exactamente tres relojes que marquen las `16:00`.

b) Considere ahora que se extraen tres relojes al azar de la bolsa. Calcule la probabilidad de que el primer reloj marque una hora comprendida entre las `9:00` y `9:50` (ambas inclusive), el segundo reloj entre las `11:00` y las `11:30` (ambas inclusive) y el tercer reloj entre las `20:00` y las `21:59` (ambas inclusive).

c) Supongamos ahora que se dispone de un número ilimitado de relojes en la bolsa. Se lleva a cabo el siguiente experimento: se van sacando relojes de la bolsa hasta que el reloj extraído tenga la hora correcta y entonces se para. Determinar la probabilidad de que el número de relojes que se han sacado de la bolsa sea mayor o igual a 50.

d) (LABORATORIO) Suponga que la variable de Matlab `Reloj` contiene una matriz $N \times 2$, donde la primera columna contiene la hora del reloj y la segunda los minutos. `N` representa el número de simulaciones llevadas a cabo, es decir, cada fila representa una simulación del reloj en cuestión. Considere el siguiente código Matlab:

```
sum(((Reloj(:,1)==18)&(Reloj(:,2)>=55))|((Reloj(:,1)==19)&(Reloj(:,2)<=4)))/N.
```

Explique dicho código e indique a qué equivale analíticamente, determinando su valor.

(3.0 puntos)

2.- Sea una variable aleatoria $\mathbf{Z}=\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ con $\mathbf{X}\sim\exp(\lambda)$ e $\mathbf{Y}\sim\mathcal{U}(0,1)$, variables independientes. Se pide:

a) Obtener la función densidad de probabilidad $f_{\mathbf{Z}}(z)$.

b) $P\left(\frac{1}{2}<\mathbf{Z}\leq\frac{3}{2}\right)$.

c) Estimador óptimo sin restricciones de la variable $\mathbf{Z}$ como función de la $\mathbf{Y}$.

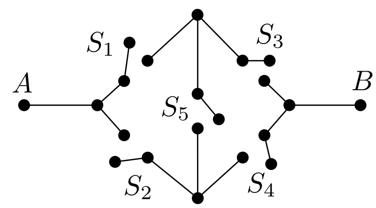
d) (LABORATORIO) Suponga que la variable de Matlab `datosZ` contiene un vector columna con `N` muestras de la variable aleatoria $\mathbf{Z}$. Escriba las sentencias de Matlab necesarias para calcular el valor cuadrático medio de la variable $\mathbf{Z}$ y determine su valor teórico, $E\{\mathbf{Z}^2\}$.

(4.0 puntos)

Universidad de Valladolid – ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

4 de junio de 2021 – Convocatoria ordinaria

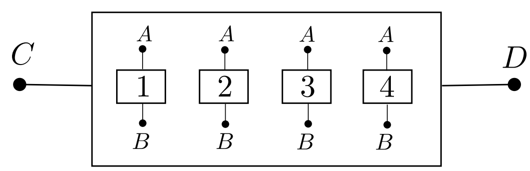
1.- Consideremos el circuito de la figura:



a) Calcule la probabilidad de que haya corriente entre los puntos A y B. Suponga que los interruptores S_i son independientes y que p_i es la probabilidad de que pase corriente por el interruptor i, con $i=1,\ldots,5$. (Sugerencia: conviene utilizar la partición del espacio muestral dada por el cierre/apertura del interruptor S_5).

b) Suponga ahora que se desea estudiar el efecto de la temperatura en el circuito resuelto en el apartado anterior. Se tienen 4 circuitos independientes como el anterior, cada uno a diferente temperatura. Suponga que la probabilidad de que haya corriente entre los puntos A y B para cada circuito es ahora $p_{AB}^{(k)}$ siendo k el número de circuito con $k=1,\ldots,4$. Determine la probabilidad de que en al menos 2 de las 4 simulaciones haya corriente entre A y B.

c) Asumamos la configuración mostrada en la siguiente figura:



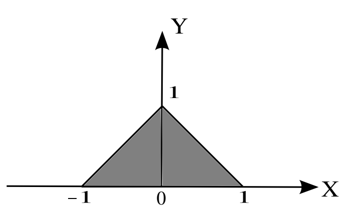
Con esta configuración para que haya corriente entre los puntos C y D, tienen que conducir exactamente 3 de los 4 circuitos AB. Considere que la probabilidad de que el primer circuito AB_1 conduzca es p, que el circuito AB_j sólo depende del circuito AB_{j-1} para $j=2,3,4$ y que $P(AB_j|AB_{j-1})=pc_1$ y $P\big(AB_j|\overline{AB_{j-1}}\big)=pc_2$. Determine la probabilidad de que haya corriente entre C y D.

d) Suponiendo que `Int1`, ..., `Int5` son vectores columna en MATLAB, cada uno de ellos con `N` simulaciones. Cada vector corresponde a las `N` simulaciones para cada uno de los 5 interruptores, donde cada elemento toma el valor `1` cuando el interruptor conduzca corriente y `0` en caso contrario. Suponga ahora que la siguiente línea de Matlab estima la probabilidad de que haya corriente en un cierto circuito:

```
sum((Int1|Int2)&Int3&(Int4|Int5))/N
```

Se pide dibujar el circuito del que se está calculando su probabilidad.

(3.0 puntos)



2.- La variable bidimensional $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ tiene una función de densidad $f_{\mathbf{XY}}(x,y)=k$ en la región sombreada en la figura y nula fuera de ella. Se pide:

a) Valor de la constante k y probabilidad de que la variable tome valores fuera de la circunferencia centrada en el origen y con radio $\frac{1}{2}$.

b) $f_{\mathbf{Y}}(y)$ y $E\{\mathbf{Y}\}$.

c) Para $\mathbf{Z}=\mathbf{X}+\mathbf{Y}$, obtenga $f_{\mathbf{Z}}(z)$ y $E\{\mathbf{Z}\}$.

d) Suponga que las variables de MATLAB `datosX` y `datosY` son dos vectores columna que contienen muestras de las variables $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ respectivamente. Explique qué obtendría al ejecutar `var(datosX+datosY)` y calcule su valor analítico.

(4.0 puntos)

3.- Se tiene un proceso $\mathbf{X}(t)$ blanco, gaussiano, con media $E\{\mathbf{X}(t)\} = \eta$ y función de autocovarianza $C_{\mathbf{X}}(\tau) = N_0\delta(\tau)$. A partir de dicho proceso se define un segundo proceso como $\mathbf{S}(t) = \mathbf{X}(t)\cos(\omega_c t + \mathbf{\Theta})$, con $\mathbf{\Theta}$ una variable independiente de $\mathbf{X}(t)$ y uniforme en el intervalo $[0, m\pi]$, siendo m un entero positivo y ω_c una constante determinista.

a) Calcule la media y la autocorrelación del proceso $\mathbf{S}(t)$ y determine para qué valores de m dicho proceso es estacionario en sentido amplio.

Considere ahora un sistema LTI cuya respuesta en frecuencia es:

$$H(\omega) = \begin{cases} |\omega| & -\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

con $\omega_c > 2\omega_0$.

b) Calcule la potencia del proceso $\mathbf{Y}(t)$ que resulta de aplicar como entrada al sistema descrito el proceso $\mathbf{X}(t)$. Obtenga asimismo la función de densidad de primer orden para dicho proceso.

c) Asuma $m = 2$. Obtenga y dibuje $S_{\mathbf{Z}}(\omega)$, densidad espectral de potencia del proceso $\mathbf{Z}(t)$ que resulta de aplicar como entrada al sistema descrito el proceso $\mathbf{S}(t)$.

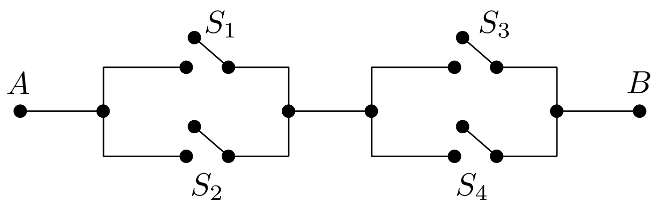
d) Asuma $m = 3$. Suponga que la matriz $M \times N$ `datosS` contiene M realizaciones del proceso $\mathbf{S}(t)$ para los instantes temporales $t = 0, 1, 2, 3, \ldots, N-1$. Escriba las sentencias MATLAB necesarias para estimar $E\{\mathbf{S}(0)\}$ y $E\{\mathbf{S}(N-1)\}$. Razone si estos valores deben ser similares para ambos instantes.

(3.0 puntos)

Universidad de Valladolid – ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

21 de junio de 2021 – Convocatoria extraordinaria

1.- Consideremos el circuito de la figura



a) Suponga que $P(S_1)=P(S_3)=p$, que $P(S_2|S_1)=P(S_4|S_3)=p_{c1}$ y que $P(S_2|\overline{S_1})=P(S_4|\overline{S_3})=p_{c2}$. Calcule la probabilidad de que haya corriente entre los puntos A y B.

b) Suponga ahora que llevamos a cabo experimentos independientes del circuito de figura anterior. Vamos a llamar p_k^{AB} a la probabilidad de que haya corriente entre los puntos A y B para el experimento número k, con k un entero positivo. Asuma además que se cumple que $p_{k+1}^{AB}<p_k^{AB}$, para entero positivo, es decir, la probabilidad de que haya corriente entre los puntos A y B va disminuyendo a lo largo de los experimentos. Se repite el experimento hasta que el circuito conduzca y entonces se para. Determine la probabilidad de que haya que hacer entre 50 y 100 (ambos incluidos) experimentos para que haya corriente.

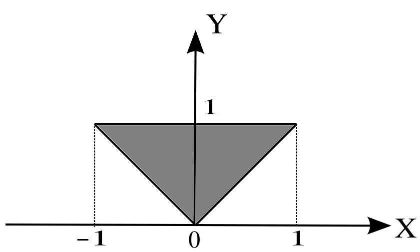
c) Asuma ahora que la probabilidad de que haya corriente es constante a lo largo de los experimentos y la denotamos por p_{AB}. Llevamos a cabo N experimentos del circuito de la figura. Determine la probabilidad de que en más de la mitad de dichos experimentos el circuito haya conducido. Distinga los casos N par y N impar.

d) Suponga que la matriz de MATLAB $N\times 4$ `Int` contiene `N` simulaciones para los cuatro interruptores colocados por columnas en dicha matriz, donde cada elemento toma el valor 1 cuando el interruptor correspondiente conduce corriente y 0 en caso contrario. Además, suponga que el vector de MATLAB `AB` contiene un 1 cuando haya corriente entre A y B y 0 en caso contrario. Explique qué obtendría al ejecutar

```
sum(AB(Int(:,1)==1))/length(Int(:,1)==1)
```

y calcule su valor analítico.

(3.0 puntos)



2.- La variable bidimensional $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ tiene una función de densidad $f_{\mathbf{XY}}(x,y)=k$ en la región sombreada en la figura y nula fuera de ella. Se pide:

a) Covarianza $C_{\mathbf{XY}}$ y probabilidad $P(\mathbf{Y}\leq 1-|\mathbf{X}|)$.

b) Estimador óptimo sin restricciones de $\mathbf{Y}$ como función de $\mathbf{X}$.

c) Función de densidad de probabilidad $f_{\mathbf{Z}}(z)$ para la variable $\mathbf{Z}=\mathbf{X}+\mathbf{Y}$.

d) Suponga que las variables de MATLAB `datosX` y `datosY` son dos vectores columna que contienen `N` muestras de las variables $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ respectivamente. Explique qué obtendría al ejecutar

```
sum(datosY<=(1-datosX))/N
```

y calcule su valor analítico.

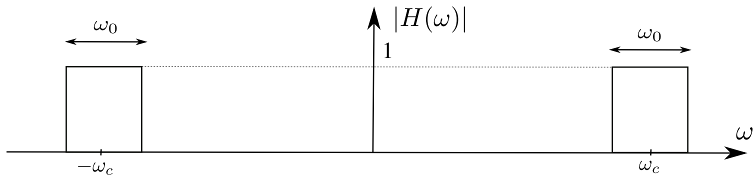
(4.0 puntos)

3.- Se tiene un proceso $\mathbf{X}(t)$ real, WSS, con media nula y función de autocorrelación $R(\tau)$. A partir de dicho proceso se define un segundo proceso como $\mathbf{S}(t)=\mathbf{X}(t)\cos(\omega_c t+m\mathbf{\Theta})$, con $\mathbf{\Theta}$ una variable independiente de $\mathbf{X}(t)$ y uniforme en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, siendo m un entero positivo y ω_c una constante determinista. Se tiene además un proceso $\mathbf{N}(t)$ de ruido blanco, también real, con media $E\{\mathbf{N}(t)\}=\eta$, función de autocovarianza $C_{\mathbf{N}}(\tau)=N_0\delta(\tau)$, e independiente de $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{\Theta}$. Dicho proceso se multiplica por una señal sinusoidal para obtener $\mathbf{W}(t)=\mathbf{N}(t)\text{sen}(\omega_c t+\mathbf{\Phi})$, con $\mathbf{\Phi}$ una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$, independiente de $\mathbf{N}(t)$, $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{\Theta}$.

a) Calcule la media y la autocorrelación del proceso $\mathbf{S}(t)$ y determine para qué valores de m dicho proceso es estacionario en sentido amplio.

b) Asuma $m=2$. Determine si los procesos $\mathbf{S}(t)$ y $\mathbf{W}(t)$ son conjuntamente estacionarios en sentido amplio.

c) Se define ahora el proceso $\mathbf{Y}(t)=\mathbf{S}(t)+\mathbf{W}(t)$ con $m=2$. Dicho proceso atraviesa un sistema lineal e invariante cuyo módulo de la respuesta en frecuencia se representa en la figura adjunta (asuma $\omega_c \gg \omega_0$).



Obtenga y represente la densidad espectral de potencia del proceso $\mathbf{Z}(t)$ obtenido a la salida del sistema si la densidad espectral del proceso $\mathbf{X}(t)$ viene dada por la siguiente expresión

$$S_{\mathbf{X}}(\omega)=\begin{cases} \omega^2 & |\omega|\leq\omega_0 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

d) Con $m=2$ y asumiendo que $S_{\mathbf{X}}(\omega)$ es la del apartado c), suponga que la matriz de MATLAB $M\times N$ `datosS` contiene `M` realizaciones del proceso $\mathbf{S}(t)$ para los instantes temporales $t=0,1,\ldots,N-1$. Escriba las sentencias MATLAB necesarias para estimar $E\{\mathbf{S}^2(t)\}$ y obtenga su valor analítico.

(3.0 puntos)