Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales y Sistemas de Transmisión I
Febrero 1995 (Con libros y apuntes)

$\alpha, \beta > 0$

1.-Un sistema de vigilancia aérea está constituido por N subsistemas y un control central; cada subsistema toma, en un determinado instante, una medida tal que en condiciones de ausencia de aeronave puede modelarse como una variable aleatoria $\mathbf{X}_i(i=1..N)$ uniforme entre 0 y 1. Cada variable $\mathbf{X}_i$ es sometida a un proceso de acondicionamiento mediante la función $g(\mathbf{X}_i)=\frac{1}{\alpha}\left[-\ln(\mathbf{X}_i)\right]^{\frac{1}{\beta}}$, originando nuevas variables $\mathbf{Y}_i$, más apropiadas para basar en ellas las decisiones. El funcionamiento de cada subsistema puede considerarse independiente del resto de ellos. El control central combinará la información que recibe de los subsistemas para gestionar la presencia o ausencia de aeronave. La forma en que el sistema central combina la información dependerá de la estrategia de detección a seguir. En estas condiciones:

a)Considerando que la función de transformación $g(\mathbf{X}_i)$ (i=1..N) es biunívoca, obtenga la función de densidad de probabilidad y la media de cada variable $\mathbf{Y}_i$.

b)Cada subsistema envía al control central un señal de alarma (presencia de aeronave) si la amplitud de la $\mathbf{Y}_i$ recibida supera un cierto umbral(μ). Calcule el valor de éste para que la probabilidad de falsa alarma (Pfa) en cada subsistema sea igual a λ. Particularice para $\lambda=0.6$, $\alpha=4$ y $\beta=3$.

c)Para aumentar en fiabilidad el control central sigue una estrategia de decidir presencia de blanco si al menos M subsistemas han enviado señal de alarma. Calcule la expresión de la Pfa del sistema, así como su valor numérico si M=13, N=20 (N>>1) y el umbral μ es del apartado anterior.

d)Con el fin de reducir el número de operaciones a realizar por el sistema de control para tomar una decisión se propone otra estrategia; ésta consiste en examinar los subsistemas en orden creciente de índice (1 a N), y dar alarma en cuanto alguno de ellos haya enviado señal de alarma. Obtenga el umbral μ para cada subsistema de modo que la Pfa de esta estrategia de funcionamiento coincida con la del apartado c), así como el número medio de operaciones realizadas por el sistema de control para tomar una decisión, suponiendo que la consulta a cada subsistema requiere P operaciones.

(4 puntos)

2.-Suponga una variable bidimensional (**X**,**Y**) cuya fdp es constante y no nula en el interior de un cuadrado de lado 2a (a>1), centrado en el origen, y lados paralelos a los ejes coordenados. Se pide:

a)Función de densidad de probabilidad de la variable **Z=X/Y**.

b)P(**X**≥**Y**)

c)P(**XY** <a)

d)Estimador óptimo sin restricciones de **Y** como una función de **Z**.

(3 puntos)

3.-Considere el proceso estocástico real $\mathbf{X}[n]$ ($n\in N$), estacionario en sentido amplio y de media nula, con secuencia de autocorrelación $\mathbf{R}_x[m]$ conocida.

a)Identifique el valor de a_{11} que hace que $\hat{\mathbf{X}}[n]=a_{11}\mathbf{X}[n-1]$ sea el estimador lineal de $\mathbf{X}[n]$ de error cuadrático medio mínimo. Obtenga la varianza del error en la estima(σ_1^2).

b)Un filtro causal con $H(z)=\frac{1}{1-a_{11}z^{-1}}$ es excitado por un ruido blanco, real y estacionario, de media nula y secuencia de autocorrelación $\mathbf{R}_W[m]=\sigma_1^2\delta[m]$ originando un nuevo proceso $\mathbf{Y}[n]$. Obtenga la secuencia de autocorrelación de dicho proceso para valores de m iguales a 0 y 1, suponiendo que $\mathbf{W}[n]$ está incorrelado con valores pasados de $\mathbf{Y}[n]$ (n-1, n-2 ...).

c)Para mejorar la calidad de la estima de $\mathbf{X}[n]$ se propone el estimador $\hat{\mathbf{X}}[n]=a_{21}\mathbf{X}[n-1]+a_{22}\mathbf{X}[n-2]$. Obtenga los valores de los coeficientes a_{21} y a_{22} para que $\hat{\mathbf{X}}[n]$ sea de error cuadrático medio mínimo y deduzca la relación entre a_{22}, a_{11} y σ_1^2.

(3 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales y Sistemas de Transmisión I

Septiembre 1997 (Con libros y apuntes)

1.- Dos llamadas telefónicas llegan a una central en dos instantes cualesquiera, e independientemente, dentro de un intervalo $[0, T]$. La duración de las llamadas es de a unidades de tiempo para la primera, y de b para la segunda. Considerando que las duraciones a y b son pequeñas con respecto a la longitud del intervalo T, se pide:

a) Probabilidad de que la primera llamada llegue antes que la segunda.

b) Probabilidad de que las llamadas se solapen temporalmente.

c) Probabilidad de que la primera llamada llegue antes que la segunda, supuesto que se han solapado temporalmente.

(3.5 puntos)

2.- La función de densidad de probabilidad $f_{XY}(x,y)$ de la variable aleatoria $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ tiene la expresión $f_{XY}(x,y)= K|x|y$, en el interior del triángulo de vértices A(1,0), B(-1,0) y C(0,1), siendo nula en el exterior del mismo. Se pide:

a) El valor de la constante K, y las densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$. ¿Son independientes?

b) La función de densidad conjunta $f_{ZW}(z,w)$ y funciones de densidad marginales $f_Z(z)$ y $f_W(w)$ de las variables aleatorias $\mathbf{Z} = \mathbf{X}^2$ y $\mathbf{W} = \mathbf{Y}^2$.

c) $E\{\mathbf{W}|_{\mathbf{Z}}\}$ y $E\{\mathbf{W}|_{\mathbf{Y}}\}$.

(3 puntos)

3.- Un proceso estocástico $\mathbf{X}(t)$, real, gaussiano, de media nula y función de autocorrelación $R_X(\tau) = exp(-\alpha|\tau|)$ $(\alpha \geq 0)$ es muestreado a intervalos de T segundos, originándose así el proceso estocástico de índice discreto $\mathbf{X}[n]= \mathbf{X}(nT)$, $n \in Z$. En tales condiciones, se pide:

a) Media y autocorrelación del proceso $\mathbf{X}[n]$. ¿Es estacionario en sentido amplio?

b) Densidad espectral de potencia del proceso $\mathbf{X}$[n].

A partir del proceso $\mathbf{X}[n]$ se obtiene el proceso $\mathbf{Y}[n]$ mediante la transformación

$$\mathbf{Y}[n] = a_0\mathbf{X}[n] + a_1\mathbf{X}[n-1]$$

c) Obtenga la funciones de densidad de probabilidad de primer y segundo orden del proceso $\mathbf{Y}$[n].

Finalmente, se crea el proceso $\mathbf{Z}[n]$ mediante la transformación

$$\mathbf{Z}[n] = \frac{1}{\sigma_Y[n]\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\mathbf{Y}[n]} e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma_Y^2[n]}} d\tau$$

siendo $\sigma_Y[n]$ la desviación típica del proceso $\mathbf{Y}[n]$ definido anteriormente.

d) Obtenga la función de densidad de probabilidad de primer orden del proceso $\mathbf{Z}[n]$.

(3.5 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales y Sistemas de Transmisión I

Septiembre 1999 (Con libros y apuntes)

1.- Una red de ordenadores está configurada de forma que un servidor central envía la información a los N terminales conectados. Para hacer la transmisión fiable, el ordenador central envía un mensaje y espera a recibir el acuse de recibo del mismo por parte de cada terminal conectado. Sólo cuando ha recibido el acuse de recibo de los N terminales procede a enviar el siguiente mensaje. Denominemos p a la probabilidad de 'envío de mensaje a un terminal-recepción de acuse de recibo de dicho terminal' de manera correcta. Consideremos los dos casos siguientes:

a) El ordenador central, si no recibe respuesta satisfactoria de algún terminal, reenvía el mensaje y espera respuesta de nuevo de los N. Obtenga, en este caso, la probabilidad de que la comunicación se produzca de forma correcta en un número de transmisiones menor o igual que k ($k = \{1, \ldots\}$).

b) Suponga ahora que cada acuse de recibo viene identificado con la dirección del terminal que lo envió, de forma que el ordenador central sabe quién no ha recibido el mensaje correctamente. Se cambia entonces la estrategia y ahora el ordenador central, en las sucesivas retransmisiones, espera sólo el acuse de recibo de aquellos terminales de los que todavía no lo ha recibido. Obtenga, en estas nuevas condiciones, la probabilidad de que la comunicación se produzca de forma correcta en un número de transmisiones menor o igual que k.

(3 puntos)

2.- La variable $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3]$ es una variable trinomial, es decir,

$$P(\mathbf{X}_1 = k_1, \mathbf{X}_2 = k_2, \mathbf{X}_3 = k_3) = \frac{(k_1 + k_2 + k_3)!}{k_1!k_2!k_3!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$$

con $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ y $k_1 + k_2 + k_3 = N$, siendo N un número entero determinado. Se pide:

a) Justifique que $P(\mathbf{X}_1 = k_1, \mathbf{X}_2 = k_2) = P(\mathbf{X}_1 = k_1, \mathbf{X}_2 = k_2, \mathbf{X}_3 = k_3)$.

b) $P(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 = y)$.

c) Suponga que los valores de las variables $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ no son directamente observables, sino que sólo se tiene acceso a su suma $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$. Obtenga los estimadores de mínimo error cuadrático medio de $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ como función de $\mathbf{Y}$.

(3.5 puntos)

3.- Sea un proceso estocástico $\mathbf{X}(t)$, gaussiano, estacionario al menos en sentido amplio, con función de autocorrelación $R_X(\tau)$. A partir de dicho proceso se crea $\mathbf{X_d}(t) = \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}$. Se pide:

a) Demuestre que el proceso $\mathbf{X_d}(t)$ es gaussiano y obtenga su media y varianza.

b) Considerando el instante temporal $t = t_0$, razone si las variables aleatorias $\mathbf{X}(t_0)$ y $\mathbf{X_d}(t_0)$ son incorreladas.

c) Razone si los procesos $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{X_d}(t)$ son incorrelados.

(3.5 puntos)

NOTA:

Respecto al primer problema, recuerde que $p(A) = 1 - p(\overline{A})$. En su segundo apartado se recomienda que resuelva para $N = 1$ y, a continuación, generalice.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido **(SAR)**/Señales y Sistemas de Transmisión I **(SSTI)**

Febrero 2000 (Con libros y apuntes)

1.- Tres prisioneros A, B y C han sido juzgados y están a la espera de la sentencia. No obstante se ha filtrado que sólo uno de ellos será condenado, quedando así pues libres los otros dos. El prisionero A le pregunta al guardia 'Dime quién de los otros dos prisioneros será liberado; dado que ambos sabemos que al menos uno de los dos lo será, no me das ninguna información adicional sobre mi situación, de forma que no te comprometo al decirmelo'. El guardia, al que supondremos inicialmente sincero y sin preferencias por ningún prisionero, le dice 'B será liberado'. Denominando C_A al suceso 'El prisionero A será condenado', L_B al suceso 'el prisionero B será liberado', e L_{GB} al suceso 'el guardia ha dicho que el prisionero B será liberado', se pide:

a) $P(C_A)$ y $P(C_A|L_B)$.

b) $P(C_A|L_{GB})$. ¿Tiene razón el prisionero A en su afirmación?

c)**(SAR)** A partir del siguiente fragmento de código:

```
N             =1000;
Experimento   =fix(3*rand(N,1))+1;
Datos         =zeros(N,3);
for i=1:N
              Datos(i,Experimento(i)) =1;
end;
```

añada las sentencias necesarias para estimar las probabilidades de los apartados a) y b). Explique mediante pseudocódigo dichas sentencias.

c)**(SSTI)** Suponga que, cuando el guardia tenga opción, la probabilidad de que éste se pronuncie en favor del prisionero B es una variable aleatoria uniforme entre 0 y 1. Manteniendo la premisa de sinceridad por parte del guardia, obtenga, en estas condiciones, $P(C_A|L_{GB})$. Si no respondió al apartado anterior, describa en detalle el procedimiento operativo a seguir en éste. (3.0 puntos)

2.- Considere que $\mathbf{X}$ es una variable aleatoria que sólo puede tomar valores reales no negativos. Se pide:

a) Demuestre que $P(\mathbf{X} \geq \delta) \leq \frac{E\{\mathbf{X}\}}{\delta}$.

b) Considere N variables $\mathbf{X}_i$, exponenciales de parámetro λ, e independientes. Se forma la variable $\mathbf{Z} = K \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}})^2$, con $\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i$. Se pide que obtenga el valor de la constante K que garantiza que $E\{\mathbf{Z}\} = \frac{1}{\lambda^2}$.

c) Obtenga una cota a la probabilidad de que $\mathbf{Z}$ supere un cierto valor μ_0. (3.5 puntos)

3.- Sea $\mathbf{X}(t)$ un proceso estocástico gaussiano, SSS, de media nula y función de autocorrelación $R_X(\tau)$. Se pide:

a)**(SAR)** Escriba las sentencias MATLAB necesarias para general una matriz de N filas y 2 columnas tal que cada fila tenga una muestra de la realización de la variable aleatoria $(\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t+\lambda))$, con t y λ dos parámetros. Explique dichas sentencias mediante pseudocódigo.

a)**(SSTI)** Sabiendo que $\mathbf{X}(t) = x_0$, obtenga el valor de $\mathbf{X}(t+\lambda)$ para el cual la función $f_X(x, t+\lambda|X(t))$ es máxima.

b) Se ha observado en el instante t el proceso, y se sabe que $x_1 < \mathbf{X}(t) \leq x_2$. Obtenga $E\{\mathbf{X}(t)|x_1 < \mathbf{X}(t) \leq x_2\}$ (es necesaria una expresión cerrada).

c) Denominando $\overline{x}$ a la expresión del apartado anterior (con independencia de que la haya-o no- obtenido explícitamente) calcule $E\{\mathbf{X}(t+\lambda)|x_1 < \mathbf{X}(t) \leq x_2\}$.

(3.5 puntos)

NOTA:

En el primer problema, háganse las suposiciones que se estimen convenientes.

Recuerde que si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son variables equidistribuidas, conjuntamente gaussianas y de media nula, el estimador óptimo en sentido MSE (de una variable con respecto de la otra) es lineal, y proporcional al coeficiente de correlación.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido **(SAR)**/Señales y Sistemas de Transmisión I **(SSTI)**

Septiembre 2000 (Con libros y apuntes)

1.- Las variables $\mathbf{X}_i$ $i = \{1, \dots, N\}$ son IID, gaussianas, de media η y desviación típica σ. A partir de éstas se definen las variables:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{X}} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i \\ \mathbf{Z} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}}\right)^2 \end{aligned}$$

Se pide:

a) $R_{\overline{\mathbf{X}}\mathbf{Z}}$.

b) Se definen las variables $\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}}$, $i = \{1, \dots, N-1\}$ e $\mathbf{Y}_N = \overline{\mathbf{X}}$. Demuestre que las variables $\mathbf{Y}_i$ son independientes de $\mathbf{Y}_N$ $\forall i \neq N$.

c) Escriba la variable $\mathbf{Z}$ como función de las variables $\mathbf{Y}_i$ de forma tal que pueda afirmar que las variables $\overline{\mathbf{X}}$ y $\mathbf{Z}$ son independientes.

(3.5 puntos)

2.- Considere N variables aleatorias $\mathbf{X}_i$, $i = \{1, \dots, N\}$, discretas, con un recorrido de M valores; uno de tales valores será el valor x, valor que toman con probabibilidad $P(\mathbf{X}_i = x) = p_i$. Se define la variable aleatoria $\mathbf{Z}$ como 'número de variables $\mathbf{X_i}$ que han tomado el valor x'. Se pide:

a) Escriba la variable $\mathbf{Z}$ como una función de las variables $\mathbf{X_i}$ ($i = \{1, \dots, N\}$).

b) Para el caso en que las variables $\mathbf{X_i}$ sean independientes y $p_i = p$ $\forall i = \{1, \dots, N\}$ obtenga la media y la varianza de la variable $\mathbf{Z}$.

c) Considerando conocida la probabilidad conjunta de las N variables $\mathbf{X}_i$, calcule, en un caso general, la media y la varianza de la variable $\mathbf{Z}$. Compruebe que los resultados coinciden con los obtenidos en b) cuando se cumplan las condiciones allí exigidas.

(3.0 puntos)

3.- Sobre el proceso estocástico $\mathbf{X}(t) = Acos(\omega_0 t + \mathbf{\Theta})$, (con A y ω_0 constantes y $\mathbf{\Theta} \sim U[-\pi, \pi]$) se suma accidentalmente un segundo proceso $\mathbf{I}(t)$.Para paliar el efecto del proceso $\mathbf{I}(t)$ sobre el primero se filtra la suma con un filtro lineal e invariante, con respuesta al impulso $h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, con $\alpha > 0$. Se define la relación señal a ruido a la salida del filtro como $SNR = \frac{E\{\mathbf{X}_f^2(t)\}}{E\{\mathbf{I}_f^2(t)\}}$, donde $\mathbf{X}_f(t)$ y $\mathbf{I}_f(t)$ son las versiones filtradas respectivas de los procesos $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{I}(t)$. Se pide:

a) Considere que el proceso $\mathbf{I}(t)$ es un ruido blanco de media nula, WSS, e independiente de $\mathbf{X}(t)$. Se pide que obtenga el valor de α que maximiza la SNR.

b) Considere ahora que $\mathbf{I}(t) = Bcos(\omega_1 t + \mathbf{\Phi})$, con B y ω_1 constantes y $\mathbf{\Phi} \sim U[-\pi, \pi]$ e independiente de $\mathbf{\Theta}$. Discuta, en estas condiciones, la existencia de un valor de α que maximice la SNR.

c)**(SAR)** Considere que la variable `datos` es una matriz de M filas y dos columnas tal que, en cada fila, se dispone de una realización de la variable $(\mathbf{X}(t_i), \mathbf{I}(t_i))$, $i = \{1, \dots, M\}$ en las condiciones del apartado b). Se pide que describa (con palabras o mediante un gráfico) y justifique, lo que observaría en pantalla tras ejecutar la orden `scatter(datos(:,1),datos(:,2))`.

c)**(SSTI)** Deduzca la expresión de la función de densidad de probabilidad conjunta de orden 2, $f_{\mathbf{XI}}(x, i; t_1, t_2)$, de los procesos $\mathbf{X}(t)$ e $\mathbf{I}(t)$ en las condiciones del apartado b).

(3.5 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Enero 2006 (Conv. extraordinaria) (Con libros y apuntes)

1.- Responda a las siguientes cuestiones:

a) Suponiendo que $\mathbf{X}$ es una variable aleatoria exponencial de parámetro λ y que $\mathbf{Y} = (\mathbf{X} - x_0)^2$, con $x_0 > 0$, obtenga $F_{\mathbf{XY}}(x, y)$ como función de $F_{\mathbf{X}}(x)$.

b) Sean dos variables $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ marginalmente gaussianas no independientes. Proponga una función de densidad distinta a una gaussiana bivariante que se traduzca en el comportamiento marginal indicado.

c) Suponiendo que para los procesos estocásticos $\mathbf{X}(t)$ e $\mathbf{Y}(t)$ se verifica la igualdad

$$f_{\mathbf{XY}}(x_1, x_2, y_1, y_2; t_1, t_2, t'_1, t'_2) = f_{\mathbf{XY}}(x_1, x_2, y_1, y_2; t_1 + c, t_2 + c, t'_1 + c, t'_2 + c)$$

para todo valor de c y cualquier agrupación de cuatro instantes ($t_1 \neq t_2$ y $t'_1 \neq t'_2$), justifique si tal propiedad se traduce en estacionariedad conjunta (en sentido amplio) de ambos procesos.

(3.25 puntos)

2.- El siguiente fragmento de código genera muestras de las VAs $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, y almacena los valores de primera y segunda variable, respectivamente, en la primera y segunda columna de la matriz `Datos`:

```
x1      =1;
x2      =3;
x3      =5;
a       =0.3;
b       =0.5;
N       =10000;
Datos        =zeros(N,2);
Datos(:,1)  =rand(N,1);
Datos(:,1)=(  (Datos(:,1)<a).*x1)+(((Datos(:,1)>=a)&(Datos(:,1)<a+b)).*x2)+...
((Datos(:,1)>a+b).*x3);
Datos(:,2)=Datos(:,1)+sqrt(Datos(:,1)).*randn(N,1);
```

En relación con ello y bajo el supuesto que N sea suficientemente grande como para que haya coincidencia perfecta entre resultados teóricos y muestrales, se pide:

a) Expresión analítica de la función $f_{\mathbf{XY}}(x, y)$.

b) Valor obtenido tras ejecutar la sentencia: `sum((Datos(:,1)==x2)&(Datos(:,2)>2*x2))/N`

c) Valor obtenido tras ejecutar la sentencia: `sum(Datos(:,2))/N` (3.25 puntos)

3.- Considere el proceso estocástico real $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}cos(\omega_0 t + \mathbf{\Theta})$, donde $\mathbf{A}$ es una variable aleatoria que toma los valores ± 1 de forma equiprobable y $\mathbf{\Theta}$ es una variable uniforme en el rango $(-\pi, \pi)$. Ambas variables son independientes. Se pide:

a) Media y autocorrelación del proceso $\mathbf{X}(t)$. ¿Es el proceso WSS?

b) En recepción el proceso $\mathbf{X}(t)$ se procesa de la forma

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \mathbf{X}(t) cos(\omega_0 t + \mathbf{\Psi}) dt$$

con $\mathbf{\Psi}$ una variable uniforme en el rango $(-\pi, \pi)$ e independiente de las anteriores y $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Obtenga la expresión de $\mathbf{Y}$ como función de las otras variables aleatorias del enunciado, así como su media y su varianza.

c) Si cuando $\mathbf{Y} > 0$ el receptor decide que se ha enviado el valor $\mathbf{A} = 1$ y decide el valor $\mathbf{A} = -1$ en caso contrario, obtenga la probabilidad de equivocación del sistema.

(3.5 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Febrero 2006 (Con libros y apuntes)

1.- Responda a las siguientes cuestiones:

a) Suponga tres sucesos distintos, A, B y C, con probabilidades no nulas. Aceptemos que A es independiente de B y que B es independiente de C. Razone si A y C deben ser independientes.

b) La variable $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene una función de densidad proporcional a $e^{-\lambda\sqrt{x^2+y^2}}$, definida en todo el plano. Obtenga la expresión de la función de densidad de la variable así como la probabilidad de que ésta tome valores en los cuadrantes primero y tercero.

c) La variable $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ toma los valores indicados en la tabla, con las probabilidades que también se indican. Calcule $P(\mathbf{X} = 1|\mathbf{X}+\mathbf{Y} \geq 8)$. Indique, asimismo, si las variables $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son independientes.

$x_i \backslash y_j$	1	3	5	7
1	0,15	0,05	0,10	0,13
2	0,02	0,08	0,19	0,12
3	0,08	0,06	0,02	0

(3.0 puntos)

2.- El siguiente fragmento de código genera muestras de las variables $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{W}$:

```
N           =100000;
a           =0.5;
b           =0.25;
X           =2*rand(N,1)-1;
Y           =2*rand(N,1)-1;
S           =((abs(X)<a).*(abs(Y)<b));
Z           =X.*(1-S);
W           =Y.*(1-S);
```

En relación con ellas y bajo el supuesto que N sea suficientemente grande como para que haya coincidencia perfecta entre resultados teóricos y muestrales, se pide que responda justificadamente a las siguientes cuestiones:

a) $f_{\mathbf{ZW}}(z, w)$, $\forall(z, w) \neq (0, 0)$ así como $P(\mathbf{Z}^2 + \mathbf{W}^2 \leq (b/2)^2)$.

b) Valor obtenido tras ejecutar la sentencia: `sum(abs(Z)<=(a/2))/N`

c) Valor obtenido tras ejecutar la sentencia: `sum(W.*(Z>a))/sum(Z>a)` (3.0 puntos)

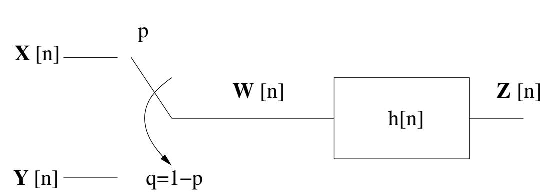
3.- Los procesos $\mathbf{W}[n]$ y $\mathbf{Z}[n]$ se construyen como indica la figura adjunta, en la que el conmutador conecta con la rama superior con probabilidad p y con la inferior con probabilidad $q = 1 - p$ (la apertura y cierre de éste no es función del tiempo). El proceso $\mathbf{X}[n]$ es gaussiano, de media $\eta_{\mathbf{X}}$ y función de autocorrelación $R_{\mathbf{X}}[m]$. El proceso $\mathbf{Y}[n]$ es un proceso de ruido blanco en sentido estricto, formado por variables aleatorias uniformes entre 0 y 1. Ambos procesos son independientes entre sí, así como independientes del posicionamiento del conmutador. Se pide:

a) Media y autocorrelación del proceso $\mathbf{W}[n]$. ¿Es el proceso WSS?

b) $f_{\mathbf{W}}(w_1, w_2; n_1, n_2)$, con $n_1 \neq n_2$.

c) Suponiendo la respuesta al impulso $h(n) = \delta[n]-\delta[n-N]$, con $N \in \mathcal{N}$, obtenga, únicamente para el caso en que $p = 1$, la probabilidad del suceso $\{\mathbf{Z}[n] < a\}$, con $a \in \mathcal{R}$.

d) Para la misma respuesta al impulso obtenga, únicamente para el caso en que $p = 0$, la función de autocorrelación a la salida del filtro.



(4.0 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Septiembre 2006 (Con libros y apuntes)

1.- Responda a las siguientes cuestiones:

a) Suponga tres sucesos distintos, A, B y C, con probabilidades no nulas. Aceptemos que B es independiente de C. Razone si, en estas condiciones, debe verificarse que $P(A|B \cap C) = P(A|B)P(A|C)$. Caso afirmativo se pide que demuestre tal igualdad. Caso contrario, se pide que proponga un contraejemplo.

b) Suponga tres sucesos distintos, A, B y C, con probabilidades no nulas. Aceptemos que $P(B \cap C|A) = P(B|A)P(C|A)$. Razone si, en estas condiciones, debe verificarse que $P(B \cap C) = P(B)P(C)$. Caso afirmativo se pide que demuestre tal igualdad. Caso contrario, se pide que proponga un contraejemplo.

c) Suponga que $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X}_3$ son tres variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (IID) con función de distribución $F(x)$ conocida. Aceptemos que se lleva a cabo una ordenación de las tres variables (en sentido ascendente o descendente). Denominemos $\mathbf{Z}$ a la variable situada en segundo lugar en la ordenación indicada (repare pues en que es irrelevante que la ordenación sea en uno u otro orden). Se pide que escriba la función de distribución $F_{\mathbf{Z}}(z)$ como función de $F(x)$.

(3.0 puntos)

2.- El siguiente fragmento de código genera muestras de las variables $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$:

```
N           =100000;
a           =3;
b           =(3/2)*a;
X           =a*rand(N,1);
Y           =X+(b*rand(N,1));
```

En relación con ellas y bajo el supuesto que N sea suficientemente grande como para que haya coincidencia perfecta entre resultados teóricos y muestrales, se pide que responda justificadamente a las siguientes cuestiones:

a) $f_{\mathbf{XY}}(x, y)$, en todo el plano.
b) Valor obtenido tras ejecutar la sentencia: `sum((X+Y)<=b)/N`
c) Valor obtenido tras ejecutar la sentencia: `sum((Y<=(b/2)).*(X<=(a/2)))/sum(X<=(a/2))`

(3.0 puntos)

3.- Sean dos procesos gaussianos, $\mathbf{Y}[n]$ y $\mathbf{Z}[n]$. Se sabe que $\mathbf{Z}[n]$ tiene media nula, mientras que de $\mathbf{Y}[n]$ se conocen su media $\eta_{\mathbf{Y}}$, función de autocorrelación $R_{\mathbf{Y}}[m]$ y densidad espectral de potencia $S_{\mathbf{Y}}(\omega)$. Se pide:

a) Demuestre que $E\{e^{Z[n]}\} = e^{\frac{1}{2}E\{Z^2[n]\}}$. Nota: busque un cuadrado perfecto en las expresiones que maneje.

b) Suponiendo que el proceso $\mathbf{Y}[n]$ es la entrada de un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h_2[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-N] - \frac{1}{2}\delta[n-2N]$ (con $n \in \mathcal{N}$) cuya salida es $\mathbf{X}[n]$, obtenga la media y la autocorrelación del proceso de salida como función de de los datos del problema.

c) Se genera el proceso $\mathbf{W}[n]$ de la forma $\mathbf{W}[n] = e^{\lambda \mathbf{X}[n]}$ (con $\lambda \in \mathcal{R}$). Obtenga la función de autocorrelación $R_{\mathbf{W}}[n_1, n_2]$ e indique si dicho proceso es WSS.

d) Suponga que el proceso $\mathbf{Y}[n]$ se ha obtenido filtrando un proceso de variables IID (llámemosle $\mathbf{V}[n]$) mediante un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h_1[n] = a^n u[n]$ (con $0{,}9 < a < 1$). Se pide que proporcione una justificación mediante la cual el proceso $\mathbf{Y}[n]$ pueda considerarse aproximadamente gaussiano, con independencia de la distribución del proceso de partida $\mathbf{V}[n]$.

(4.0 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Enero 2007 (Conv. extraordinaria) (Con libros y apuntes)

1.- Responda a las siguientes cuestiones:

a) Un centro de investigación en ingeniería dispone de tres (y sólo tres) servidores de cálculo que pueden ejecutar los trabajos que se envían. El usuario no elige la máquina en la que su trabajo se ejecutará, sino que el envío se produce mediante un esquema de decisión que encamina los trabajos a las máquinas A, B y C respectivamente con probabilidades p_a, p_b y p_c, siendo $p_a + p_b + p_c = 1$. Se pide que justifique, a partir de los datos del enunciado, si el esquema de decisión puede enviar el trabajo simultáneamente a más de una de las tres máquinas mencionadas.

b)Denotando por m_n y μ_k respectivamente a los momentos no centrales y centrales de órdenes n y k de la variable aleatoria $\mathbf{X}$, se pide que escriba m_n, $n \geq 2$ como función de los μ_k, con $k = \{1, \ldots, n\}$ y de $m_1 = \eta_{\mathbf{X}}$.

c) Sea $\mathbf{X}$ una variable aleatoria de Poisson, de parámetro a. Sobre este parámetro se tiene incertidumbre, de forma que se opta por modelarse también como una variable aleatoria, en este caso exponencial de parámetro λ. Se pide que obtenga la ley de asignación de probabilidades de la variable $\mathbf{X}$ y que compruebe que tal ley suma la unidad en el recorrido apropiado de los valores de la variable.

(3.5 puntos)

2.- Las siguientes sentencias Matlab generan muestras de la variable bidimensional ($\mathbf{Z}$, $\mathbf{W}$) de la forma:

```
a       =2;
b       =1;
N       =10000;
X       =(2*a)*rand(N,1)-a;
Y       =(2*b)*rand(N,1)-b;
Z       =X;
W       =(Y.*((X.*Y)>=0))+((-Y).*((X.*Y)<0));
```

En relación con ellas y bajo el supuesto que `N` sea suficientemente grande como para que haya coincidencia perfecta entre resultados teóricos y muestrales, se pide que responda justificadamente a las siguientes cuestiones:

a) Obtenga $f_{\mathbf{ZW}}(z, w)$.

b) Valor obtenido tras ejecutar la sentencia: `sum((Z+W)<=(a/2))/N`.

c) Estimador óptimo sin restricciones de la variable $\mathbf{W}$ como función de la variable $\mathbf{Z}$.

(3.0 puntos)

3.- Suponga que el proceso $\mathbf{W}(t)$ es un proceso en el que se verifica que, escogidos los instantes temporales $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$, las variables $\mathbf{W}(t_1)$, $\mathbf{W}(t_2) - \mathbf{W}(t_1)$, ..., $\mathbf{W}(t_N) - \mathbf{W}(t_{N-1})$, son independientes entre sí. Suponga, asimismo, que $\mathbf{W}(t) \sim N\left(0, \sqrt{\alpha t}\right)$ $(t > 0)$ y que, $\mathbf{W}(t_j) - \mathbf{W}(t_i) \sim N\left(0, \sqrt{\alpha(t_j - t_i)}\right)$, con $t_j > t_i > 0$. En estas condiciones, se pide (considerando todos los índices temporales involucrados no negativos):

a) $R_{\mathbf{W}}(t_1, t_2)$.

b) Si $\mathbf{X}(t) = \mathbf{W}^2(t)$ obtenga $f_{\mathbf{X}}(x; t)$ así como $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1, t_2)$

c) Definiendo la variable $\mathbf{\Delta}$ de la forma $\mathbf{\Delta} = \mathbf{X}(t_2) - \mathbf{X}(t_1)$, $(t_2 > t_1)$, obtenga la covarianza entre las variables $\mathbf{\Delta}$ y $\mathbf{X}(t_1)$.

(3.5 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Febrero 2007 (Con libros y apuntes)

1.- Responda a las siguientes cuestiones:

a) Suponga que la variable aleatoria $\mathbf{X}$ tiene la siguiente función de densidad

$$f_{\mathbf{X}}(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i g(x; \eta_i, \sigma_i)$$

donde los coeficientes a_i son no negativos y suman la unidad, y $g(x; \eta_i, \sigma_i)$ representa la función de densidad (evaluada en el punto x) de una variable gaussiana de media η_i y desviación típica σ_i. Se pide que obtenga $E\{(\mathbf{X} - \eta_j)^3\}$, con $1 \leq j \leq N$.

b) Suponga ahora que dos variables, $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son equidistribuidas, tienen como función de densidad la del apartado anterior y que, asimismo, se verifica que $f_{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2}(x_1, x_2) = f_{\mathbf{X}_1}(x_1) f_{\mathbf{X}_2}(x_2)$. Se pide que obtenga $R_{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2}$.

c) Suponga que la variable $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene la siguiente función de densidad

$$f_{\mathbf{XY}}(x, y) = \sum_{i=1}^{N} a_i g(x, y; \eta_{x_i}, \eta_{y_i}, \sigma_{x_i}, \sigma_{y_i}, \rho_i)$$

donde los coeficientes a_i son no negativos y suman la unidad, y $g(x, y; \eta_{x_i}, \eta_{y_i}, \sigma_{x_i}, \sigma_{y_i}, \rho_i)$ representa ahora la función de densidad (evaluada en el punto (x, y)) de una variable gaussiana bivariante, con parámetros los indicados a partir del punto y coma en el interior del paréntesis de la función. Se pide que obtenga $R_{\mathbf{XY}}$.

(3.5 puntos)

2.- El siguiente fragmento de código genera muestras de las variables $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Z}$:

```
N           =100000;
l1          =3;
l2          =5;
X1          =-(1/l1)*log(rand(N,1));
X2          =-(1/l2)*log(rand(N,1));
Y           =X1./X2;
Z           =X1+X2;
```

En relación con ellas y bajo el supuesto de que N sea suficientemente grande como para que haya coincidencia perfecta entre resultados teóricos y muestrales, se pide que responda justificadamente a las siguientes cuestiones:

a) Valor obtenido tras ejecutar la sentencia: `sum(abs(Y)>a)/N`, con `a` un parámetro previamente definido y mayor que cero.

b) $f_{\mathbf{Y}}(y)$.

c) $E\{\mathbf{X}_2|\mathbf{Z}\}$

(3.0 puntos)

3.- Se define la secuencia aleatoria $\mathbf{X}[n]$ de la forma $\mathbf{X}[n] = \rho\mathbf{X}[n-1] + \mathbf{W}[n]$, para $n \geq 1$, con $\rho \in \mathcal{R}$, $|\rho| < 1$, y $\mathbf{W}[m]$ una secuencia de ruido blanco gaussiano, de media nula y desviación típica σ_w e independiente de $\mathbf{X}[n]$ para $m > n$. Suponga, asimismo, que $\mathbf{X}[0] \sim N(0, \sigma_x)$. Sabiendo que la función de densidad de la variable $\mathbf{X}[n]$ condicionada a todo su pasado es igual a la función de densidad de la variable $\mathbf{X}[n]$ condicionada únicamente a la variable $\mathbf{X}[n-1]$, se pide:

a) $f_{\mathbf{X}}(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0; n, n-1, \ldots, 0)$, $n \geq 1$.

b) $f_{\mathbf{X}}(x; n)$, $n \geq 1$.

c) $R_{\mathbf{X}}[n_1, n_2]$, $n_1, n_2 \geq 1$.

(3.5 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Septiembre 2007 (Con libros y apuntes)

1.- Responda a las siguientes cuestiones:

a) Suponga que el suceso A se define como “hay enlace entre dos terminales móviles” y el suceso B se define como “no hay errores de transmisión entre dos terminales móviles”. Suponga, asimismo, que existen N posibles caminos (digamos, A_i) para que haya enlace entre dos terminales, mutuamente excluyentes. Se pide que exprese la probabilidad de que haya comunicación correcta entre dos terminales móviles como función de las probabilidades $P(B|A_i)$, $i = 1, \ldots, N$.

b) Dada la sucesión (en el parámetro k) $\frac{(k-2)(k-1)}{2}p^3(1-p)^{k-3}$, y supuesto que $0 < p < 1$, se pide que indique si puede constituir una ley de asignación de probabilidades y, en tal caso, exprese el intervalo de variación del parámetro k para tal fin.

c) Dada la función:

$$g(x) = \frac{5\pi^2 C^2}{2} e^{-\lambda x} u(x) + 0{,}3\delta(x+3) + 0{,}2\delta(x-5) + C\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} e^{-\frac{(x+\frac{1}{3})^2}{2}},$$

con $\lambda > 0$, se pide que obtenga el valor de C que garantiza que la función anterior sea una función de densidad de probabilidad y, supuesto que una variable $\mathbf{X}$ tenga tal función de densidad, obtenga $P\left(\mathbf{X} \leq -\frac{1}{3}\right)$.

(3.25 puntos)

2.- El siguiente fragmento de código genera muestras de las variables $\mathbf{U}$, $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{W}$:

```
N          =100000;
l          =2;
X          =randn(N,1);
Y          =randn(N,1);
U          =X./Y;
Z          =(1/2)+(1/pi)*atan(U);
W          =Z+(-1/l)*log(rand(N,1));
```

En relación con ellas y bajo el supuesto que N sea suficientemente grande como para que haya coincidencia perfecta entre resultados teóricos y muestrales, se pide que responda justificadamente a las siguientes cuestiones:

a) $f_{\mathbf{U}}(u)$ y $F_{\mathbf{U}}(u)$.

b) $f_{\mathbf{Z}}(z)$ y $f_{\mathbf{ZW}}(z, w)$.

c) Valor obtenido tras ejecutar la sentencia: `sum((W>a).*(Z>0.5).*(Z<=0.75))./N`, con `a` un parámetro previamente definido y mayor que 0.

(3.25 puntos)

3.- Suponga que el proceso $\mathbf{X}(t)$ es un proceso real para el que se verifica que $R_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = R_{\mathbf{X}}(t_1 + k_1 T, t_2 + k_2 T)$, $\forall (t_1, t_2)$, donde $k_1, k_2 \in \mathcal{Z}$. Se pide:

a) Admitiendo que la condición para que un proceso $\mathbf{Y}(t)$ sea periódico, de periodo T, sea $E\{|\mathbf{Y}(t+pT) - \mathbf{Y}(t)|^2\} = 0$, $\forall t$, con $p \in \mathcal{Z}$, se pide que demuestre que el proceso $\mathbf{X}(t)$ arriba mencionado es periódico.

b) El proceso estocástico $\mathbf{Z}(t)$ definido como sigue:

$$\mathbf{Z}(t) = \cos\left(2\pi f_c t + B[n]\right)$$

con $nT < t \leq (n+1)T$, $n \in \mathcal{Z}$, $T > 0$ y $B[n]$ una secuencia de variables independientes que toma los valores $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ de manera equiprobable $\forall n \in \mathcal{Z}$. Se pide que razone si este proceso cumple la condición de la función de correlación indicada en el enunciado.

c) Suponga ahora que el proceso $\mathbf{X}(t)$, además de cumplir las condiciones del enunciado, es WSS. Se pide que demuestre que los coeficientes del desarrollo complejo en serie de Fourier del proceso $\mathbf{X}(t)$, definidos como $\mathbf{A}_k = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{X}(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} \mathrm{d}t$, son variables aleatorias ortogonales.

(3.5 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Enero 2008 (Conv. extraordinaria) (Con libros y apuntes)

1.- El tiempo de vida de un componente electrónico se modela como una variable aleatoria exponencial $\mathbf{Y}$, cuyo parámetro depende de las condiciones en las que funcione éste, a saber, clima cálido, clima moderado y clima frío. Tales condiciones se modelan como una variable aleatoria $\mathbf{X}$ que puede tomar los valores x_1, x_2, y x_3, con probabilidades respectivas p_1, p_2 y p_3, con $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ($x_i > 0, \forall i = \{1, 2, 3\}$). Supongamos que el valor del parámetro de la variable exponencial coincide, en cada caso, con los valores x_i indicados anteriormente. En estas condiciones, se pide:

a) $P(\mathbf{X} = x_j | \mathbf{Y} \leq y_0)$, con $j = \{1, 2, 3\}$, como función de los parámetros del problema así como de esperanzas de funciones de la variable $\mathbf{X}$.

b)$E\{\mathbf{X}|\mathbf{Y} \leq y_0\}$, como función de esperanzas de funciones de la variable $\mathbf{X}$. Indique el valor al que debe tender tal esperanza cuando $y_0 \to \infty$.

c) $E\{\mathbf{X}|\mathbf{Y} = 0\}$, como función de los momentos no centrales de la variable $\mathbf{X}$.

(3.5 puntos)

2.- Las siguientes sentencias Matlab generan muestras de la variable bidimensional ($\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$) de la forma:

```
a        =1;
b        =3*a;
m        =2*a;
N        =10000;
U        =rand(N,3);
X        =m+(a+(b-a)*U(:,1)-m).*sqrt(U(:,2));
Y        =X+2*a*U(:,3);
```

En relacion con ellas y bajo el supuesto que `N` sea suficientemente grande como para que haya coincidencia perfecta entre resultados teóricos y muestrales, se pide que responda justificadamente a las siguientes cuestiones:

a) Obtenga $f_{\mathbf{X}}(x)$.

b) Obtenga $f_{\mathbf{XY}}(x, y)$. Si no resolvió el apartado anterior, suponga que $f_{\mathbf{X}}(x) = k(a - |x|)$, para $x \in [-a, a]$, siendo nula fuera de ese intervalo.

c) Valor obtenido tras ejecutar la sentencia: `sum((X<m).*(Y>X))./sum(Y>X)`. Si resolvió el apartado b) por la segunda vía, sustituya `m` por `a/2` en la expresión indicada.

(3.0 puntos)

3.- Se definen los procesos $\mathbf{Y}_1(t) = h_1(t) * \mathbf{X}(t)$ e $\mathbf{Y}_2(t) = h_2(t) * \mathbf{X}(t)$ a partir del proceso $\mathbf{X}(t)$, el cual es WSS y con densidad espectral de potencia $S_{\mathbf{X}}(\omega)$. Se conocen, así mismo, las respectivas respuestas en frecuencia $H_1(\omega)$ y $H_2(\omega)$ de los sistemas $h_1(t)$ y $h_2(t)$. Se pide:

a) Justifique si los procesos $\mathbf{Y}_1(t)$ e $\mathbf{Y}_2(t)$ son conjuntamente estacionarios. En tal caso, obtenga $S_{\mathbf{Y_1 Y_2}}(\omega)$.

b) Denominando $\mathbf{D}(t)$ al proceso diferencia $\mathbf{Y}_1(t) - \mathbf{Y}_2(t)$, obtenga $E\{|\mathbf{D}(t)|^2\}$.

c) Suponiendo que $S_{\mathbf{X}}(\omega)$ es no nula únicamente en el intervalo $\omega \in [-\omega_0, \omega_0]$ así como que $H_1(\omega) = H_2(\omega)\ \forall \omega \in [-\omega_0, \omega_0]$, se pide que obtenga a qué es igual el proceso $\mathbf{D}(t)$ en estas condiciones. Caso de no haber resuelto el apartado b) se pide que proporcione únicamente una respuesta razonada (sin soporte analítico).

(3.5 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Febrero 2008 (Con libros y apuntes)

1.- Responda a las siguientes cuestiones:

a) Sean dos variables aleatorias $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$. Deduzca la siguiente igualdad:

$$F_{\mathbf{X}}(x|\mathbf{Y} \leq y) = \frac{1}{F_{\mathbf{Y}}(y)} \int_{-\infty}^{y} F_{\mathbf{X}}(x|\mathbf{Y} = \tau) f_{\mathbf{Y}}(\tau) d\tau$$

b) Obtenga $E\{\mathbf{X}^2|\mathbf{Y} \leq y\}$ como función (entre otros) de $E\{\mathbf{X}^2|\mathbf{Y} = \tau\}$.

c) Un sistema puede funcionar ($\mathbf{Y} = 1$) o no funcionar ($\mathbf{Y} = 0$) correctamente dependiendo de la temperatura $\mathbf{X}$ a la que se encuentre. Suponga que la probabilidad de que el sistema funcione, para un determinado valor de la temperatura, es igual a $\frac{x-a}{b}$, con a y b dos números reales positivos. Asuma que $\mathbf{X} \sim U(a, a+b)$. Se pide que obtenga la varianza de la variable $\mathbf{Y}$ en el caso en que se sepa que $\mathbf{X} \leq x_0$, con $a < x_0 < a + b$, como función de los datos del enunciado.

(3.5 puntos)

2.- Sea $\mathbf{R}$ una variable aleatoria que toma valores en el intervalo $[0, \infty)$. Sea $f_{\mathbf{R}}(r)$ la función de densidad de probabilidad de la mencionada variable.

a) Demostrar, que si se aplica la transformación $\mathbf{X} = \mathbf{R}\cos(2\pi\mathbf{U})$, $\mathbf{Y} = \mathbf{R}\sin(2\pi\mathbf{U})$, con $\mathbf{U}$ una variable aleatoria uniforme entre 0 y 1, e independiente de $\mathbf{R}$, se cumple:

$$f_{\mathbf{X}}(x) = \int_{0}^{\infty} \frac{f_{\mathbf{R}}(\sqrt{x^2+y^2})}{\pi\sqrt{x^2+y^2}} dy$$

Las siguientes sentencias Matlab generan muestras de la variable aleatoria bidimensional $(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ de la forma:

```
N       =10000;
U       =rand(N,2);
R       =sqrt(-2*log(U(:,1)));
X       =R.*cos(2*pi*U(:,2));
Z       =X+randn(N,1);
```

En relación con ellas y bajo el supuesto que `N` sea suficientemente grande como para que haya coincidencia perfecta entre resultados teóricos y muestrales, se pide que responda justificadamente a las siguientes cuestiones:

b) Obtenga $f_{\mathbf{X}}(x)$.

c) Valor obtenido tras ejecutar la sentencia: `sum(Z>X)/N`.

(3.25 puntos)

3.- Se define el proceso estocástico $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A} - \mathbf{B}t$, donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos variables aleatorias gaussianas, de media nula, desviación típica σ e independientes. Se define, así mismo, el proceso estocástico $\mathbf{Y}(t)$ como un proceso de ruido blanco de media nula y función de autocorrelación $R_{\mathbf{Y}}(t_1, t_2) = q(t_1)\delta(t_1 - t_2)$. En relación con estos procesos, se pide:

a) $P(\mathbf{X}(t) \leq x_0)$

b) $P(0 < T_c \leq T)$, con T_c el instante temporal en el que el proceso $\mathbf{X}(t)$ se anula y T un parámetro dado.

c) Suponiendo que el proceso $\mathbf{Y}(t)$ arriba definido atraviesa un sistema lineal e invariante de respuesta al impulso $h(t)$ para dar lugar a un proceso $\mathbf{Z}(t)$, obtenga $R_{\mathbf{YZ}}(t_1, t_2)$.

(3.25 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Septiembre 2008 (Con libros y apuntes)

1.- Responda a las siguientes cuestiones:

a) Suponga que adquiere un teléfono móvil y no está seguro de conocer con certeza su nuevo número. Para identificarlo, decide hacer una prueba que consiste en llamar desde su nuevo móvil al número que Vd. cree que corresponde a dicho terminal. Si al marcar dicho número la línea comunica, concluirá que, en efecto, el número marcado es el que corresponde al teléfono adquirido. Si la probabilidad de que el número marcado sea correcto es de 0.5, calcule la probabilidad de que dicho número sea correcto supuesto que la línea comunica. Asuma que la probabilidad de que una línea esté ocupada por una llamada externa es de 10^{-3}.

b) Sea la variable aleatoria $\mathbf{X}$ uniforme en el intervalo $[0,1]$. Se define el suceso condicionante $A = \{\mathbf{X} > t\}$ con $t \in \mathbb{R}$ y $t \leq 1$. Se define adicionalmente la variable $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - t$. Se pide obtener $f_{\mathbf{Y}}(y|A)$.

c) La variable aleatoria bidimensional $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ presenta la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f_{\mathbf{XY}}(x,y) = \begin{cases} c, & \text{si } 0 < y < x \leq 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Definiendo $\mathbf{Z} = \mathbf{X}/\mathbf{Y}$, se pide obtener $E\{\mathbf{Y}|\mathbf{Z} = z\}$. (3.5 puntos)

2.- Las siguientes sentencias Matlab generan muestras de las variables aleatorias $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ de la forma:

```
N       =10000;
U       =rand(N,2);
X       =U(:,1).*U(:,2);
Y       =X-X.*log(X)+rand(N,1);
```

En relación con ellas y bajo el supuesto que `N` sea suficientemente grande como para que haya coincidencia perfecta entre resultados teóricos y muestrales, se pide que responda justificadamente a las siguientes cuestiones:

a) Obtenga $f_{\mathbf{X}}(x)$ y $F_{\mathbf{X}}(x)$.

b) Valor obtenido tras ejecutar la sentencia: `sum(X)/N`.

c) Valor obtenido tras ejecutar la sentencia: `sum(Y>1.5)/N`.

NOTA:

$\lim_{x\to 0^+} x\log(x) = 0$

(3.25 puntos)

3.- Sea $\mathbf{X}(t)$ un proceso estocástico gaussiano, de media nula y función de autocorrelación $R_{\mathbf{X}}(\tau)$ conocida. A partir de él se define el proceso estocástico $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}^2(t)$, así como el proceso $\mathbf{Z}(t)$, de la forma:

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{cases} 1 & \mathbf{X}(t) \geq 0 \\ -1 & \mathbf{X}(t) < 0 \end{cases}$$

En estas condiciones, se pide:

a) Razone si el proceso $\mathbf{Y}(t)$ es estacionario de primer orden, de segundo orden y/o WSS.

b) Demuestre que la función de autocorrelación del proceso $\mathbf{Z}(t)$, esto es, $R_{\mathbf{Z}}(t_1,t_2)$, se puede obtener como función de la probabilidad de sucesos definidos sobre la variable $\mathbf{W} = \frac{\mathbf{X}(t_1)}{\mathbf{X}(t_2)}$.

c) Obtenga la función de autocorrelación $R_{\mathbf{Z}}(t_1,t_2)$ del proceso $\mathbf{Z}(t)$. Caso de no haber respondido al apartado anterior obtenga $P(\mathbf{W} \geq 0)$, con $\mathbf{W}$ definida en ese apartado.

(3.25 puntos)

NOTA:

Si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son variables conjuntamente gaussianas, ambas con media nula, varianza σ^2 y coeficiente de correlación ρ, entonces $f_{\mathbf{X}}(x|y) \sim N(\rho y, \sigma\sqrt{1-\rho^2})$.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Enero 2009 (Conv. extraordinaria) (Con libros y apuntes)

1.- Responda a las siguientes cuestiones:

c) Suponga un juego de dados de dos jugadores en el que cada jugador tira, cuando es su turno, dos dados. Cuando uno de ellos consigue que la suma de las caras de los dados sea igual a 2 el jugador gana y el juego concluye. Se pide que obtenga la probabilidad de que venza el jugador que no comienza la partida lanzando.

b) Suponiendo que $\mathbf{X} \sim N(\eta, \sigma)$, obtenga $E\{|\mathbf{X}|\}$ como función de esos dos parámetros.

c) Suponga que $\mathbf{Y} = k\mathbf{X}$, con k una constante real no negativa. Obtenga la $f_{\mathbf{Y}}(y|\mathbf{X} > 0)$ como función de $f_{\mathbf{X}}(x)$.

(3.25 puntos)

2.- A partir del siguiente fragmento de código:

```
N            =10000;
DatosX       =rand(N,2);
DatosY(:,1)  =DatosX(:,1)./DatosX(:,2);
DatosY(:,2)  =DatosX(:,2);
```

y bajo el supuesto que N sea suficientemente grande como para que haya coincidencia perfecta entre resultados teóricos y muestrales, se pide:

a) Función de densidad de la variable aleatoria cuyas muestras se encuentran almacenadas en la variable `DatosY(:,1)`.

b) Valor obtenido tras ejecutar la sentencia: `sum(DatosY(:,2)>DatosY(:,1))/N`

c) Valor obtenido tras ejecutar la sentencia:
`sum((DatosY(:,2)>DatosY(:,1))&( DatosY(:,1)<(1/2)))/sum( DatosY(:,1)<(1/2))`

(3.25 puntos)

3.- Suponga que un móvil se desplaza equiprobablemente d posiciones a la derecha o d posiciones a la izquierda en instantes temporales equiespaciados y de manera independiente entre instantes. Considere que $\mathbf{Y}[n]$ es la secuencia aleatoria que contiene las posiciones del móvil en cada instante n (suponga que el móvil parte del origen de coordenadas). Se pide:

a) Función de densidad de primer orden $f_{\mathbf{Y}}(y;n)$ para $n = \{1, 2, 3\}$.

b) Demuestre que las variables $\mathbf{Y}[n_2] - \mathbf{Y}[n_1]$ e $\mathbf{Y}[n_1]$ son incorreladas para $n_2 > n_1$.

c) Obtenga, haciendo uso del resultado anterior, la función de autocorrelación de la secuencia $\mathbf{Y}[n]$.

(3.5 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Febrero 2009 (Con libros y apuntes)

1.- Un terminal móvil A desea comunicarse con un terminal móvil B. Para ello dispone de dos caminos, a saber, un camino a través de un satélite y un camino a través de una red terrestre. La probabilidad (extremo a extremo) de comunicación correcta a través del satélite es de p_S y la probabilidad de comunicación correcta a través de la red terrestre es de p_T. Si no se produce comunicación correcta de un mensaje, el sistema reenvía el mensaje hasta que tiene éxito. La separación temporal entre retransmisiones es tal que puede considerarse independencia entre las mismas. Se pide:

a) Suponga que el terminal A escoge, con una determinada probabilidad, si establecer la comunicación por una red u otra; una vez seleccionada la red, el sistema trata de comunicarse haciendo uso únicamente de esa red. Suponga que la probabilidad de seleccionar la red de satélite es p. Definiendo la variable $\mathbf{X}$ como el número de intentos hasta la comunicación correcta del mensaje, obtenga $E\{\mathbf{X}\}$.

b) Suponga que, de forma distinta al apartado anterior, el terminal A envía el mensaje simultáneamente por las dos vías mencionadas. Obtenga la probabilidad de que se produzca comunicación correcta al tercer intento (considere que la comunicación es correcta cuando el mensaje llega por, al menos, uno de los dos caminos).

c) Suponga que los mensajes se codifican a través de una variable $\mathbf{Z}$, la cual toma los valores ± 1 con probabilidades respectivas p_1 y p_{-1}. Aceptemos que, sea cual sea el procedimiento de comunicaciones empleado, la señal recibida en el terminal B es una variable $\mathbf{Y}$ cuya función de densidad condicionada a que $\{\mathbf{Z} = k\}$ es la correspondiente a una variable gaussiana de media el valor de la variable $\mathbf{Z}$ y desviación típica σ. Se pide que obtenga el intervalo de valores de y en el cual se verifica que $P(\mathbf{Z} = 1|y) \geq P(\mathbf{Z} = -1|y)$.

(3 puntos)

2.- Una variable aleatoria $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene función de densidad constante y no nula en la región $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq e^{-|x|}$, y nula fuera de ella. En relación con ella, se pide:

a) $f_{\mathbf{X}}(x)$ y $f_{\mathbf{Y}}(y|x)$.

b) $P(\mathbf{Y} > 1 - |\mathbf{X}|)$.

c) Escriba las sentencias matlab necesarias para crear `N` muestras de $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Si no resolvió el apartado a) considere que $f_{\mathbf{X}}(x) = ke^{-(x+1)}$ (k constante positiva) para $|x| \leq 1$ y nula fuera de ese intervalo y que $f_{\mathbf{Y}}(y|x) = e^{x+1}$ en el mismo rango de x y con $0 \leq y \leq f_{\mathbf{X}}(x)/k$.

(3 puntos)

3.- En una aplicación de acceso a datos bancarios por ordenador dispone Vd. de un teclado virtual en pantalla cuyas teclas se seleccionan mediante pulsaciones de ratón cuando el puntero del mismo se encuentra sobre el icono de tal tecla. Con el objetivo de que posibles programas espía no detecten sus datos personales, con cada pulsación de una tecla el teclado virtual bien permanece donde está (con probabilidad q), bien se desplaza a unidades a la derecha (con probabilidad $p = 1 - q$), de forma independiente para las diferentes pulsaciones. Considere que $\mathbf{X}[n]$ es la secuencia de posiciones en pantalla de una determinada tecla del teclado hasta la n-ésima pulsación del ratón. Tomando como origen de coordenadas la posición de esa tecla al comienzo de las pulsaciones, se pide:

a) Caracterización de la variable aleatoria $\mathbf{X}[n]$ (valores que puede tomar y probabilidades con que los toma), $\forall n$.

b) $P(\mathbf{X}[n] = ka \mid \mathbf{X}[n-2] = ka)$, con k cualquier número entero positivo ($k \leq n - 2$).

c) Denominando $\mathbf{Z}_1[n] = \mathbf{X}[n+1] - \mathbf{X}[n]$ y $\mathbf{Z}_2[n] = \mathbf{X}[n-1] - \mathbf{X}[n]$, covarianza cruzada $C_{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}[n_1, n_2]$.

(2.5 puntos)

NOTA: Las funciones $1 - |x|$ y $e^{-|x|}$ únicamente se cortan en $x = 0$.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Septiembre 2009 (Con libros y apuntes)

1.- Un sistema de transmisión envía una señal de forma simultánea por dos vías paralelas (que son dos cables). Asimismo, para cada vía emplea dos repetidores, digamos A y B, puestos uno a continuación del otro y separados una determinada distancia. La cuestión es que el repetidor A de la vía superior (denominémosle A_1) es físicamente el mismo dispositivo que el repetidor A de la vía inferior (al que denominaremos A_2) pero cada cable se conecta a puertas de entrada del dispositivo distintas. Ello hace que los errores de A_1 y A_2 estén relacionados de la forma que se indica más abajo. Lo mismo sucede para el repetidor B (nos referiremos al repetidor B de cada vía como B_1 y B_2). Los repetidores A y B son independientes entre sí. Se sabe, por otra parte, que la probabilidad de funcionamiento correcto de al menos uno de los dos repetidores del dispositivo A es igual a p_1; se sabe, asimismo, que la probabilidad de que funcione el repetidor A_1 supuesto que no funcione correctamente el A_2 es p_2. Por otra parte, se conoce que la probabilidad de que funcione el repetidor A_1 es igual a la probabilidad de que funcione el repetidor A_2, e igual a p_3. El repetidor B tiene las mismas prestaciones que el A. En estas condiciones se pide:

a) Valor de p_3 como función de p_1 y de p_2, así como probabilidad de que funcione A_2 supuesto que no ha funcionado A_1.

b) Supuesto que el mensaje llega correctamente si funciona al menos una de las dos transmisiones, probabilidad de recepción correcta de mensaje.

c) Suponiendo ahora que si el mensaje llega correctamente por ambas transmisiones ésta se destruye por la superposición de ambas señales, probabilidad de recepción correcta del mensaje.

(3.0 puntos)

2.- Sea la variable aleatoria $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{W_1}^2 + \mathbf{W_2}^2}$ con $\mathbf{W_1}$, $\mathbf{W_2}$ variables gaussianas de media nula, desviación típica σ e independientes entre sí. Se define el coeficiente de variación de dicha variable como $\mathrm{CV}_{\mathbf{U}} = \sigma_{\mathbf{U}}/\eta_{\mathbf{U}}$, siendo $\sigma_{\mathbf{U}}$ la desviación típica de $\mathbf{U}$ y $\eta_{\mathbf{U}}$ su media. Se pide:

a) Calcule $P(\mathbf{U} > \eta_{\mathbf{U}})$ y justifique que $\eta_{\mathbf{U}}$ es mayor que la mediana de $\mathbf{U}$.

b) Demostrar que $\mathrm{CV}_{\mathbf{U}}$ no depende de la varianza de las variables $\mathbf{W_1}$ y $\mathbf{W_2}$. En caso de no haber resuelto el apartado a) asuma que $\eta_{\mathbf{U}} = k\sigma, k > 0$.

c) Escriba las sentencias matlab necesarias para crear `N` muestras de la variable $\mathbf{U}$ y calcule a partir de ellas el valor de $\mathrm{CV}_{\mathbf{U}}$ de forma muestral.

(3.0 puntos)

3.- Sea $\mathbf{X}(t)$ un proceso estocástico real, gaussiano, de media η y función de autocorrelación $R_{\mathbf{X}}(\tau)$. A partir de él se define el proceso estocástico

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t-\alpha) + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{X}(t-\xi)d\xi,$$

con α, t_1 y t_2 constantes conocidas ($0 < t_1 < t_2$). Por comodidad, definimos el parámetro $T = t_2 - t_1$. Se pide:

a) Escriba el proceso $\mathbf{Y}(t)$ como la salida de un sistema lineal e invariante cuya entrada sea el proceso $\mathbf{X}(t)$, especificando el valor de la respuesta al impulso $h(t)$.

b) Obtenga la densidad espectral de potencia del proceso $\mathbf{Y}(t)$ como función de $S_{\mathbf{X}}(\omega)$. Si no respondió al apartado anterior, considere que la respuesta al impulso es la suma de una función delta con la singularidad situada en $t = -\alpha$ más un pulso de altura unidad, anchura $T/2$, centrado en $t = T/2$.

c) Para el supuesto en que $R_{\mathbf{X}}(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T/2}$ con $0 < |\tau| < T/2$ y nula fuera de esa región, y suponiendo que $\alpha < t_1 - T/2$, obtenga la función de densidad de primer orden del proceso $\mathbf{Y}(t)$, especificando los parámetros necesarios a partir de los datos del enunciado. Si no respondió al apartado a), considere que $\alpha > T/4$.

(2.5 puntos)

NOTAS:

$\Gamma(p) = k^p \int_0^\infty \tau^{p-1} exp(-k\tau)d\tau$; $\mathrm{Re}(p), \mathrm{Re}(k) > 0$

$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \mathrm{Re}(p) > 0$; $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma(z+1) = z!, z \in \mathbb{N}$

La transformada de Fourier de un pulso de altura unidad y anchura T centrado en t=0 es $T\frac{sen(\omega T/2)}{\omega T/2}$

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Diciembre 2009 (Examen voluntario, con libros y apuntes)

Sea una red formada por cuatro terminales móviles (A, B, C y D); para que exista comunicación en ella tienen que cumplirse dos requisitos, a saber, que exista enlace entre los terminales que se quieran comunicar (bien de forma directa entre ellos, bien a través de los otros terminales, de la forma que se indica más abajo) y que, además, no existan errores de comunicación entre los terminales involucrados en la comunicación. Al respecto de la creación del enlace, la gestión es la siguiente: si A desea comunicarse con D, y A tiene enlace directo con D, se comunican entre sí; caso contrario A escoge indistintamente uno de los terminales restantes y, si tiene enlace con el escogido (pongamos, el B) le encarga que éste establezca enlace con D. Caso de no conseguirlo, se lo encargaría al restante (en este caso, al C). El terminal elegido (B ó C) tratará de enlazar con D de forma directa. Si no lo consigue, trataría de buscar enlace con D a través del cuarto terminal (C ó B, según corresponda). Suponga que lo que suceda entre un par de terminales, tanto en términos de existencia de enlace como en términos de errores de transmisión, es independiente de lo que suceda en cualquier otro par. Denominemos, por una parte, p_{ij} a la probabilidad de que el terminal i tenga enlace directo con el terminal j y, por otra, p a la probabilidad de que no haya errores de transmisión entre cada dos terminales que tienen enlace directo. En estas condiciones, se pide:

a) Probabilidad de que exista enlace entre los terminales A y D.

b) Se define la variable aleatoria $\mathbf{X}$ como el número de *saltos* que debe dar un mensaje hasta llegar a su destino final. Se pide la probabilidad de que la comunicación entre A y D se dé en el salto k-ésimo, $\forall k \geq 1$.

c) Suponga ahora que, en el caso de no haber comunicación correcta en el primer intento entre dos terminales con enlace directo, el mensaje es reenviado entre ellos dos tantas veces como sea necesario hasta que la haya. Se define la variable aleatoria $\mathbf{Y}$ como el número de *saltos* que debe dar un mensaje hasta llegar a su destino final, pero la palabra *salto* engloba ahora tanto los pasos intermedios del mensaje desde origen (A) a destino final (D) como los reenvíos entre cada dos terminales en los que pueda haber habido error de comunicación. Para el supuesto en que $p_{CB} = p_{BC} = 0$, se pide la probabilidad de que la comunicación entre A y D se dé en el salto k-ésimo, $\forall k \geq 1$.

(3.0 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Enero 2010 (Conv. extraordinaria) (Con libros y apuntes)

1.- Responda a las siguientes cuestiones:

a) Sean las variables aleatorias $(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1)$ y $(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2)$. La segunda se obtiene a partir de la primera mediante una rotación, a saber,

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_2 &= \mathbf{X}_1 \cos\varphi - \mathbf{Y}_1 \operatorname{sen}\varphi \\ \mathbf{Y}_2 &= \mathbf{X}_1 \operatorname{sen}\varphi + \mathbf{Y}_1 \cos\varphi\end{aligned}$$

Demuestre que si se verifica que $f_{\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1}(x_1, y_1) = f_{\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1}(\sqrt{x_1^2 + y_1^2})$ entonces las variables aleatorias $(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1)$ y $(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2)$ son equidistribuidas.

b) Obtenga $E\{(\mathbf{X} - \eta_{\mathbf{X}})^4\}$, con $\mathbf{X} \sim exp(\lambda)$.

c) Sea la variable $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ de la que se sabe que $f_{\mathbf{Y}}(y|x) = xe^{-xy}u(y)u(x)$ así como que $f_{\mathbf{X}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} u(x)$. Obtenga $f_{\mathbf{Y}}(y)$.

(3 puntos)

2.- Una variable aleatoria $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene función de densidad constante y no nula en el interior de la circunferencia de radio unitario, y nula fuera de ella. Se lleva a cabo la siguiente transformación para obtener la variable $(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$: $\mathbf{Z} = \mathbf{X}\cos\varphi - \mathbf{Y}\operatorname{sen}\varphi$, $\mathbf{W} = \mathbf{X}\operatorname{sen}\varphi + \mathbf{Y}\cos\varphi$. En relación con la nueva variable, se pide:

a) $C_{\mathbf{ZW}}$ y $P(\mathbf{Z} \leq 1 - |\mathbf{W}|)$.

b) Estimador óptimo sin restricciones de la variable $\mathbf{W}$ como función de la variable $\mathbf{Z}$.

c) Escriba las sentencias matlab necesarias para crear `N` muestras de $(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$.

(3 puntos)

3.- Sea el proceso $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\cos(\omega_0 t) + \mathbf{B}\operatorname{sen}(\omega_0 t)$, con $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos variables aleatorias. Se pide:

a) Obtenga las condiciones que deben cumplir determinados momentos (conjuntos e individuales) de las variables $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ para que el proceso $\mathbf{X}(t)$ sea WSS. Si lo desea, puede utilizar valores particulares de $E\{\mathbf{X}(t)\}$ y $E\{\mathbf{X}^2(t)\}$ para extraer sus conclusiones.

b) Suponiendo que las variables $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son tales que $f_{\mathbf{AB}}(a, b) = f_{\mathbf{AB}}(\sqrt{a^2 + b^2})$, justifique, con independencia del apartado anterior, si el proceso $\mathbf{X}(t)$ es WSS.

c) Suponga ahora que $\mathbf{A} \sim N(0, \sigma)$, $\mathbf{B} \sim N(0, \sigma)$ y que las variables son independientes entre sí. Suponiendo que el proceso $\mathbf{X}(t)$ atraviesa un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = e^{-t}u(t)$ cuya salida es el proceso $\mathbf{Y}(t)$, obtenga $f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2; t_1, t_2)$.

(2.5 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Febrero 2010 (Con libros y apuntes)

1.- Responda a las siguientes cuestiones:

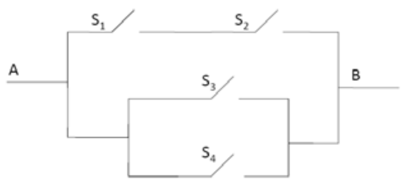


Figura 1: Esquema de conexión para el problema 1.

a) Sea el esquema de conexión de la figura 1, donde S_i es el suceso "cierre del interruptor i" $i = 1, \ldots, 4$. Se verifica que $P(S_1) = P(S_2) = p$ así como que $P(S_3|S_1) = P(S_4|S_2) = p_{c1}$ y que $P(S_3|\overline{S}_1) = P(S_4|\overline{S}_2) = p_{c2}$. Bajo el supuesto de que los interruptores 1 y 3 sean independientes de los interruptores 2 y 4 obtenga la probabilidad de que haya corriente entre los puntos A y B del diagrama.

b) La variable aleatoria $\mathbf{X}$ tiene una función de densidad igual a $f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{2}{b}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}u(x-a)$, con a y b parámetros reales positivos. Obtenga $E\{\mathbf{X}^k\}$, con k un número entero positivo.

c) Sea la variable $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ de la que se sabe que $f_{\mathbf{X}}(x|y) = ye^{-yx}u(x)$ así como que $f_{\mathbf{Y}}(y) = \lambda e^{-\lambda y}u(y)$. Obtenga $f_{\mathbf{X}}(x|y_1 < \mathbf{Y} \leq y_2)$.

(3 puntos)

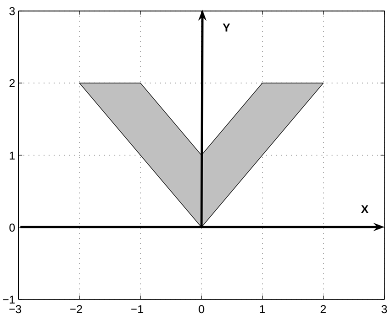


Figura 2: Dominio de definición de la variable $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

2.- Una variable aleatoria $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene función de densidad constante y no nula en el interior de la región sombreada en la figura 2 y nula fuera de ella. En relación con esta variable, se pide:

a) Estimador óptimo sin restricciones de la variable $\mathbf{Y}$ como función de la variable $\mathbf{X}$.

b) $F_{\mathbf{Y}}(y)$ y $f_{\mathbf{Y}}(y)$.

c) Considere que la variable `datos` es una matriz $N \times 2$ tal que, en cada una de las N filas se dispone de una realización de la variable $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Escriba las sentencias necesarias para obtener, a partir de la matriz `datos`, una representación gráfica convenientemente normalizada de $f_{\mathbf{Y}}(y)$. Proporcione el código necesario para superponer a dicha representación la curva teórica obtenida en el apartado b).

(3 puntos)

3.- Un móvil se desplaza sobre un plano con una trayectoria dada por sus coordenadas cartesianas $\mathbf{X}(t) = t + \mathbf{N}_1(t)$ e $\mathbf{Y}(t) = 2t + \mathbf{N}_2(t)$ con $\mathbf{N}_1(t)$ y $\mathbf{N}_2(t)$ dos procesos de ruido gaussiano, con media nula y funciones de autocorrelación $R_{\mathbf{N}_1}(\tau) = R_{\mathbf{N}_2}(\tau) = ae^{-\lambda_1|\tau|}, a > 0, \lambda_1 > 0$.

a) Suponiendo que los procesos de ruido son ortogonales, calcule la probabilidad de que el móvil se encuentre en el instante t $(t > 0)$ en el interior de un cuadrado de coordenadas (t,t), $(t+T,t)$, $(t,t+T)$ y $(t+T,t+T)$, con $T > t$.

b) Para disminuir la varianza de los procesos de ruido se opta por filtrar los procesos $\mathbf{X}(t)$ e $\mathbf{Y}(t)$ mediante el filtro LTI con respuesta al impulso $h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, con $\alpha > 1$. Calcule el valor de la varianza de los procesos de ruido filtrados.

c) Suponga ahora que los procesos $\mathbf{N}_1(t)$ y $\mathbf{N}_2(t)$ tienen una correlación cruzada de valor $R_{\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2}(\tau) = be^{-\lambda_2|\tau|}, b > 0, \lambda_2 > 0$. Obtenga el estimador lineal de la variable $\mathbf{X}(t+t_0)$ como función de $\mathbf{Y}(t)$.

(2.5 puntos)

NOTAS:
$\Gamma(p) = k^p \int_0^\infty \tau^{p-1} exp(-k\tau)d\tau$; $\mathrm{Re}(p), \mathrm{Re}(k) > 0$

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Julio 2010 (Con libros y apuntes)

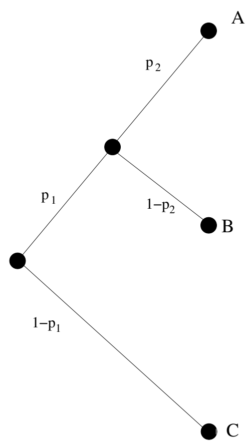


Figura 1:

1.- Sea $\mathbf{X}$ una variable aleatoria que modela el tiempo de duración de la conversación en una llamada telefónica, la cual se distribuye como una exponencial de parámetro λ. Para establecer la llamada existen tres caminos disponibles (A, B y C), de los cuales se elige uno para cada llamada según el diagrama de la figura 1, con las probabilidades que se indican para cada rama. La duración del establecicimiento de la llamada en cada rama se modela como una variable $\mathbf{Y}_i$, uniforme entre cero y a_i, con $i = \{A, B, C\}$. Asumiendo independencia entre las variables involucradas, se pide:

a) Denominando $\mathbf{Z}$ a la variable aleatoria "tiempo total de duración de la llamada telefónica", escriba las sentencias MATLAB necesarias para generar `N` realizaciones de la variable $\mathbf{Z}$.

b) Obtenga la media y el valor cuadrático medio de la variable $\mathbf{Z}$.

c) Obtenga $F_{\mathbf{Z}}(z)$.

(3 puntos)

2.- Sean $\mathbf{X}_i$, $i = \{1, \ldots, N\}$, variables aleatorias uniformes entre cero y uno e independientes. Se define $\mathbf{Z} = \text{máx}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N)$ y $\mathbf{W} = \text{mín}(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N)$. En estas condiciones, se pide:

a) Sabiendo que la función de densidad conjunta de las variables máximo ($\mathbf{Z}$) y mínimo ($\mathbf{W}$) de N variables aleatorias IID cualesquiera es $f_{\mathbf{ZW}}(z, w) = N(N-1)[F_{\mathbf{Y}}(z) - F_{\mathbf{Y}}(w)]^{N-2} f_{\mathbf{Y}}(z) f_{\mathbf{Y}}(w)$, $0 \leq w \leq z$, y nula fuera de esa región (con $F_{\mathbf{Y}}(y)$ la función de distribución y $f_{\mathbf{Y}}(y)$ la función de densidad de una cualquiera de esas N variables), obtenga $F_{\mathbf{Z}}(z|\mathbf{W} \leq w)$ para las variables $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{W}$ definidas a partir de las variables $\mathbf{X}_i$ indicadas anteriormente.

b) Obtenga la función de densidad de la variable "rango de las variables $\mathbf{X}_i$", definida como $\mathbf{Y} = \mathbf{Z} - \mathbf{W}$.

c) Para $N = 2$, obtenga $P(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2| \leq \tau)$.

(3 puntos)

3.- Sea el proceso $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\cos(\omega_1 t + \mathbf{\Theta}_1)\cos(\omega_2 t + \mathbf{\Theta}_2)$, donde $\mathbf{A}$ es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(-A_m, A_m)$, $\mathbf{\Theta}_1$ y $\mathbf{\Theta}_2$ son variables uniformes en el intervalo $(0, 2\pi)$, independientes entre sí e independientes de $\mathbf{A}$ y ω_2 es una constante determinística conocida. Se pide:

a) Suponiendo que ω_1 es una variable aleatoria definida de la forma $\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{\omega_m}{A_m}\mathbf{A}$, con ω_m una constante determinística conocida, obtenga la media del proceso $\mathbf{X}(t)$.

b) En las mismas condiciones que el apartado anterior, justifique si el proceso $\mathbf{X}(t)$ es WSS.

c) Suponga que el proceso $\mathbf{X}(t)$ atraviesa un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)\cos(\omega_2 t)$, con $\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ un pulso rectangular de altura unidad, anchura T y centrado en $t = 0$. Considerando ahora que ω_1 es una constante determinística conocida (es decir, que no es una variable aleatoria), que $\omega_1 << \omega_2$ y que $\frac{1}{T} << \omega_2$, obtenga un valor para el parámetro T que haga que la densidad espectral de potencia del proceso de salida del filtro sea idealmente nula ("idealmente" significa "tomando en consideración que $\omega_1 << \omega_2$ y que $\frac{1}{T} << \omega_2$").

(2.5 puntos)

NOTA: La transformada de Fourier de un pulso rectangular de altura unidad y anchura T centrado en $t = 0$ es $T\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$. La transformada de Fourier de $\cos(\omega_0 t)$ es $\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$. Recuerde que la transformada de Fourier del producto de dos señales es igual a la convolución de las transformadas de cada una de ellas.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Diciembre 2010 (Conv. extraordinaria y ex. voluntario) (Con libros y apuntes)

1.- Un policía en un ejercicio de tiro debe conseguir s dianas en el menor número de lanzamientos posibles. Definimos la variable aleatoria $\mathbf{Z}_s$ como el número de lanzamientos necesarios hasta conseguir ese número de dianas. Suponiendo que los lanzamientos son independientes entre sí y que la probabilidad de acertar en la diana un lanzamiento cualquiera es igual a p, se pide:

a) Caracterización de $\mathbf{Z}_s$.

b) Suponga que la variable $\mathbf{Y}_i$ $(i = \{1, \dots, s\})$ se define como el número de lanzamientos necesarios a partir del acierto $i-1$-ésimo hasta acertar la diana i-ésima (para $i = 1$ se empezaría a contar desde el primer lanzamiento). Se sospecha que $\mathbf{Z}_s$ se distribuye como $\mathbf{W}_s = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{Y}_i$. Para comprobarlo, se pide en primer lugar que obtenga la caracterización de la variable $\mathbf{W}_2$ y compare con la de $\mathbf{Z}_2$ obtenida en a). En segundo lugar, y suponiendo que la caracterización de la variable $\mathbf{W}_{s-1}$ es la misma que la de la variable $\mathbf{Z}_{s-1}$ del apartado a), obtenga la caracterización de la variable $\mathbf{W}_s$ y compare con lo obtenido en a). Si no resolvió el apartado a) considere que $P(\mathbf{W}_{s-1} = k) = \binom{k-1}{s-2} q^{k-2s} p^{4s}$ (con k variando en el rango oportuno) y obtenga la caracterización de las variables $\mathbf{W}_2$ y $\mathbf{W}_s$.

c) Considerando que la sospecha del apartado b) es correcta (haya resuelto o no dicho apartado) obtenga $E\{\mathbf{Z}_s\}$ y $\sigma^2_{\mathbf{Z}_s}$.

(3 puntos)

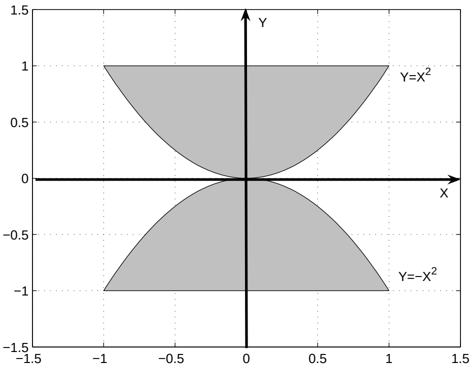


Figura 1: Dominio de definición de la variable $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

2.- Una variable aleatoria $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene función de densidad constante y no nula en el interior de la región sombreada en la figura 1 y nula fuera de ella. Partiendo de $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, se define una nueva variable $(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$ mediante la transformación: $\mathbf{Z} = \mathbf{X}^2\mathbf{Y}^2, \mathbf{W} = \mathbf{Y}^2$. Se pide:

a) $f_{\mathbf{W}}(w)$ y $f_{\mathbf{Z}}(z|w)$.

b) $P(\mathbf{Z} \leq \mathbf{W}^2)$.

c) Escriba las sentencias matlab necesarias para generar N muestras de la variable $(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$.

(3 puntos)

3.- Sea la secuencia aleatoria $\mathbf{X}[n] = \sum_{p=-1}^{1} \delta[Y[n-p] - k_0]$, donde $Y[n]$ es una secuencia de variables aleatorias IID de Poisson de parámetro a $(a > 0)$ y k_0 es un número entero positivo. Se pide:

a) $E\{\mathbf{X}[n]\}$.

b) $R_{\mathbf{X}}[n, m]$. ¿Es el proceso WSS?

c) $E\{\mathbf{Y}[n] | \mathbf{X}[n] = 2\}$.

(2.5 puntos)

NOTA: Recuerde que $\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}, k \leq N$. Por otra parte, se verifica que $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$.
Los alumnos que realicen el examen voluntario de SAR deben responder únicamente a los problemas 1 y 2.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Enero 2011 (Con libros y apuntes)

1.- Se dispone de R cadenas de fabricación de transistores; se sabe que cada una de ellas fabrica transistores defectuosos con probilidad p_i ($i = \{1, \ldots, R\}$); la fabricación es tal que puede asumirse independencia entre transistores de la misma o distinta cadena. Al término de las líneas existe un brazo robotizado que escoge un transistor de la línea i en una proporción de N_i transistores por cada N seleccionados ($N = \sum_{i=1}^{R} N_i$). Se pide:

a) Calcule la probabilidad de que un transistor escogido por el brazo resulte defectuoso.

b) Se rellena un contenedor con M transistores y se define la variable aleatoria $\mathbf{X}$ como el número de transistores del contenedor que son defectuosos. Obtenga $E\{\mathbf{X}^3\}$. Si no respondió al apartado anterior considere que su solución es p_m.

c) Suponga ahora que $R = 2$ y que se rellena el contenedor con M transistores de los que N_1 proceden de la línea 1 y N_2 de la línea 2 ($M = N_1 + N_2$). Si se extraen K transistores del contenedor ($K \leq M$), calcule la probabilidad de que m transistores procedan de la línea 1 ($m \leq K$).

(3 puntos)

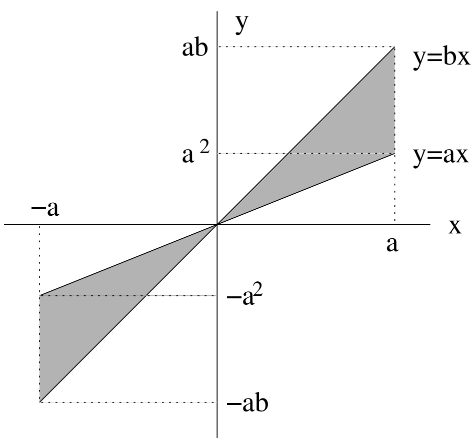


Figura 1: Dominio de definición de la variable $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

2.- Una variable aleatoria $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene una función de densidad constante y no nula en el interior de la región sombreada en la figura 1 y nula fuera de ella. Se define la variable $\mathbf{Z} = \mathbf{X}/\mathbf{Y}$ Se pide:

a) $F_{\mathbf{Z}}(z)$.

b) $f_{\mathbf{Y}}(y|z_1 < \mathbf{Z} \leq z_2\}$ con $\frac{1}{b} \leq z_1 < z_2 \leq \frac{1}{a}$ y únicamente para $0 < y < \frac{a}{z_2}$.

c) Suponiendo que dispone de `N` muestras de la variable $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ en la matriz `Datos` (matriz de dimensiones `N` por 2), escriba las sentencias matlab necesarias para calcular muestralmente $E\{\mathbf{Z}|y_1 < \mathbf{Y} \leq y_2\}$, con y_1 e y_2 dos parámetros definidos.

(3 puntos)

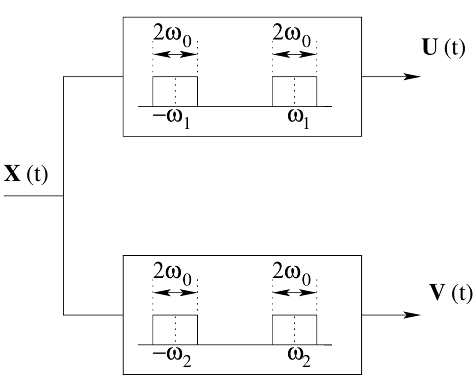


Figura 2: Generación de $\mathbf{U}(t)$ y $\mathbf{V}(t)$.

3.- Sea el proceso $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(t)\cos(\omega_1 t + \mathbf{\Theta}_1) + \mathbf{B}(t)\cos(\omega_2 t + \mathbf{\Theta}_2)$, donde $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ son dos procesos estocásticos gaussianos, independientes entre sí e independientes de $\mathbf{\Theta}_1$ y $\mathbf{\Theta}_2$, conjuntamente estacionarios, de media nula y con la misma función de autocorrelación $R(\tau)$. Se sabe, además, que la densidad espectral de estos procesos es nula $|\omega| > \omega_0$. Por su parte, la variable $\mathbf{\Theta}_1$ es uniforme en el intervalo $(0, 2\pi)$ y se sabe que la variable $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Theta}_2 - \mathbf{\Theta}_1$ tiene una función de densidad condicionada a $\mathbf{\Theta}_1$ uniforme en el intervalo $(-\theta_1, 2\pi - \theta_1)$. Finalmente, ω_1 y ω_2 son dos constantes determinísticas conocidas, con $\omega_2 > \omega_1$ y elegidas de forma tal que $\omega_2 - \omega_1 > 2\omega_0$. Se pide:

a) Justifique si el proceso $\mathbf{X}(t)$ es WSS.

b) El proceso $\mathbf{X}(t)$ atraviesa sendos filtros paso banda ideales centrados en las pulsaciones $\pm\omega_1$ y $\pm\omega_2$ y ajustados a la banda de los procesos $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$, tal y como se muestra en la figura 2. Denominemos a las salidas respectivas $\mathbf{U}(t)$ y $\mathbf{V}(t)$. Obtenga $S_{\mathbf{UV}}(\omega)$.

c) $P(\mathbf{Z}(t) > 1)$, con $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{A}(t)/\mathbf{B}(t)$.

(2.5 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Julio 2011 (Con libros y apuntes)

1.- Un tren de mercancías está formado por una locomotora y dos vagones. En el tren existe un sistema que localiza a los vagones de forma secuencial (locomotora localiza a vagón 1, vagón 1 a vagón 2 y vagón 1 informa a locomotora de la localización del 2) y su funcionamiento es el siguiente: la locomotora envía un mensaje de L bits para localizar al vagón 1 el cual, al recibir todos los bits correctamente, espera en responder una cantidad dada por una variable aleatoria $\mathbf{T}_1$, modelable como una exponencial de parámetro λ (sg^{-1}). La locomotora da al vagón 1 por localizado si el tiempo de espera en enviar el mensaje de respuesta (de K bits, de duración igual a Δ segundos) es inferior a t_0 segundos y si ella recibe todos los bits correctamente. A partir de este momento, el vagón 1 lleva a cabo este protocolo (protocolo 1) para la localización del vagón 2 (en este caso, el tiempo de espera es $\mathbf{T}_2$, variable IID respecto de $\mathbf{T}_1$). La probabilidad de error de bit es igual a p en el protocolo 1. En el caso en que la locomotora no localice al vagón 1 por esta vía, acude al protocolo 2, consistente en enviar una nueva trama de L bits pero con más potencia, de forma que la probabilidad de error de bit es en este protocolo igual a p^2. La cuestión es que con esta potencia ambos vagones (y no sólo el 1) pueden oir la petición, de forma que cada uno espera un tiempo dado por $\mathbf{T}_i$, $i = \{1, 2\}$ y, transcurrido éste, responde a la locomotora con el mensaje de K bits. Para que la locomotora dé por localizado ahora al vagón 1 es necesario que llegue primero el mensaje de este vagón, que no se solapen temporalmente ambos mensajes y que todos los bits del mensaje sean correctos (protocolo 2). Si tal es el caso, el vagón 1 se da por localizado y éste lleva a cabo el protocolo 1 para la localización del vagón 2. Aceptemos que la probabilidad de que la locomotora dé por localizado el 2 es igual a p_{l2} tras ser localizado por el 1. Asumiendo independencia entre bits y entre las diferentes comunicaciones, se pide:

a) Probabilidad de que el mensaje enviado por el vagón 1 sea anterior al del vagón 2 y no se solape con éste.

b) Probabilidad de que la locomotora localice a los dos vagones. Si no respondió al apartado anterior, considere que la probabilidad allí pedida es igual a p_s.

c) Si la locomotora no localiza a los dos vagones vuelve a ejecutar el procedimiento anterior tantas veces como sea necesario hasta que consiga localizarlos. Aceptando que los reintentos son independientes, se pide que obtenga la probabilidad de que la locomotora localice a ambos vagones antes de M intentos. Si no respondió al apartado anterior, considere que la probabilidad allí pedida es igual a p_{2v}.

(3 puntos)

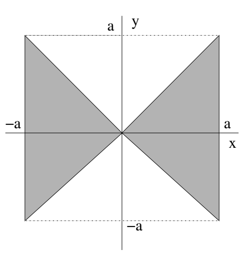


Figura 1: Dominio de definición de la variable $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

2.- Una variable aleatoria $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene una función de densidad constante y no nula en el interior de la región sombreada en la figura 1 y nula fuera de ella. Se pide:

a) Suponga que p es una muestra de una variable aleatoria uniforme entre cero y uno. Se pide que obtenga las expresiones necesarias para generar una muestra de la variable $\mathbf{X}$ como función de p.

b) Se definen las variables $\mathbf{Z} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$ y $\mathbf{W} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$. Justifique si son independientes.

c) Obtenga el estimador óptimo sin restricciones de la variable $\mathbf{Y}$ como función de la variable $\mathbf{Z}$ antes definida.

(3 puntos)

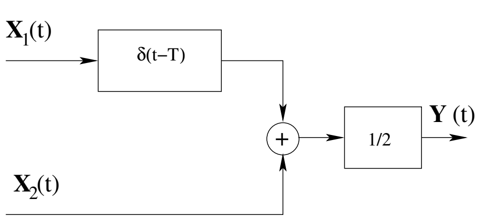


Figura 2: Generación de $\mathbf{Y}(t)$

3.- Sea el proceso $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}e^{j(\mathbf{\Omega}t+\mathbf{\Theta})}$, donde $\mathbf{A}$, $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Theta}$ son variables aleatorias independientes entre sí, de las que se conoce $E\{|\mathbf{A}|^2\}$, $\mathbf{\Omega} \sim U(\omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega)$ y $\mathbf{\Theta} \sim U(0, 2\pi)$. Se pide:

a) Justifique si el proceso $\mathbf{X}(t)$ es WSS.

b) $S_{\mathbf{X}}(\omega)$.

c) Se dispone en las ramas superior e inferior de la figura 2, respectivamente, de los procesos $\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{A}e^{j(\omega_0 t+\mathbf{\Theta})} + (\mathbf{N}_1(t) + j\mathbf{N}_2(t))e^{j\omega_0 t}$ y $\mathbf{X}_2(t) = \mathbf{A}e^{j(\omega_0(t-T)+\mathbf{\Theta})} + (\mathbf{M}_1(t) + j\mathbf{M}_2(t))e^{j\omega_0 t}$, donde $\mathbf{N}_1(t)$, $\mathbf{N}_2(t)$, $\mathbf{M}_1(t)$ y $\mathbf{M}_2(t)$ son procesos de ruido, WSS, de media nula, función de autocorrelación $R(\tau)$ e independientes entre sí (así como de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{\Theta}$). Obtenga la potencia del proceso $\mathbf{Y}(t)$. (2.5 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Noviembre 2011 (Examen voluntario de seguimiento) (Con libros y apuntes)

1.- Se desea estudiar las prestaciones de un sistema de comunicaciones digitales y para ello se establecen diversas opciones de diseño:

a) En primer lugar, consideraremos que los mensajes están formados por grupos de N bits y se sabe que la probabilidad de error de un bit depende de si el anterior bit fue recibido con error (en tal caso la probabilidad es p_e) o si fue recibido correctamente (en tal caso, la probabilidad es $p_{\overline{e}}$). Se sabe, asimismo, que la probabilidad de error de un bit, condicionada a todos los bits enviados anteriormente, en realidad está únicamente condicionada al bit enviado de forma inmediatamente anterior. Considerando que el mensaje se recibe correctamente si al menos $N-1$ de los bits se reciben de forma correcta, y que la probabilidad de error del primer bit enviado es p, obtenga la probabilidad de error en el mensaje.

b) Supongo ahora que se consigue eliminar la dependencia con los bits previamente enviados de forma que los bits pueden considerarse independientes entre sí y con probabilidad de error p. Los mensajes de nuevo constan de N bits y el sistema comprueba a partir del quinto bit enviado (y no antes) si en k bits enviados ($k \geq 5$) se han producido, al menos, $k-2$ errores. Tan pronto como detecte tal circunstancia, el sistema se interrumpe. Se pide que obtenga la probabilidad de que el envío del mensaje de N bits no sea interrumpido.

c) Se prescinde ahora del sistema de monitorización del apartado anterior y se desea enviar M mensajes de N bits cada uno. El grupo de M mensajes se divide en tres subgrupos de M_1, M_2 y M_3 mensajes cada uno ($\sum_{i=1}^{3} M_i = M$). Para que el grupo de M mensajes se reciba correctamente es necesario que el número de bits erróneos que se reciba en el subgrupo i no supere el valor k_i, $i = \{1, 2, 3\}$. Se pide que obtenga la probabilidad de que el grupo de M mensajes sea recibido correctamente (siga considerando, como hizo en el apartado anterior, bits independientes y probabilidad de error de bit p).

(2.5 puntos)

2.- El retardo $\mathbf{T}$ en una red de comunicaciones se modela como una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0, \theta)$. Sobre el extremo superior de ese intervalo se tiene incertidumbre, por lo que se decide modelarlo también como una variable aleatoria $\mathbf{\Theta}$, la cual resulta no directamente observable. Sin embargo, la variable transformada $\mathbf{Y} = \ln\left(\frac{\mathbf{\Theta}}{\theta_m}\right)$ con $\theta_m > 0$ sí que es observable, la cual sigue una distribución exponencial de parámetro λ. Se pide:

a) Función de distribución de la variable $\mathbf{\Theta}$: $F_{\Theta}(\theta)$.

b) Estimador óptimo sin restricciones de la variable $\mathbf{T}$ como función de $\mathbf{Y}$.

c) $P(\mathbf{\Theta} > \theta | t)$ para $t > \theta_m$, con t un determinado valor de la variable $\mathbf{T}$.

(2.5 puntos)

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Diciembre 2011 (Examen extraordinario) (Con libros y apuntes)

1.- En relación con un sistema de comunicaciones digitales en el que los bits son independientes y tienen probabilidad de error p, se pide:

a) Recibidos k bits, con k un número impar mayor o igual que 3, probabilidad de que el número de bits incorrectos sea mayor que el número de bits correctos.

b) Se envían ahora mensajes de k bits, con k un número par. El sistema espera a recibir cada mensaje y, en ese momento, comprueba si el número total de bits erróneos recibidos hasta ese momento es superior a la mitad del total de bits recibidos (es decir, espera a recibir el primer mensaje y comprueba si hay más de $k/2$ errores, de no haberlos, espera a recibir el segundo mensaje y comprueba si entre los dos mensajes hay más de k errores, y así sucesivamente). Tan pronto como se produzca esa circunstancia, el sistema interrumpe la transmisión. Se pide que obtenga la probabilidad de que el sistema no interrumpa la transmisión al recibir el segundo mensaje.

c) El tiempo entre llegadas entre dos bits consecutivos se puede modelar como una variable exponencial; la experiencia indica que si el segundo de esos dos bits se recibe sin error el parámetro de la exponencial es λ_1 y si se recibe con error el parámetro es λ_2, con $\lambda_2 < \lambda_1$. Suponiendo que en las condiciones que se plantean en este apartado los tiempos entre llegadas son variables independientes entre sí y que el contador de tiempos se pone a cero a la llegada del bit k-ésimo, obtenga la probabilidad de que el tiempo necesario para que llegue el bit $k+2$-ésimo sea menor o igual que un umbral $\mu > 0$, supuesto que el bit $k+1$ ha sido correcto y el $k+2$ incorrecto.

(2.5 puntos)

2.- Sean dos variables $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ de Poisson, independientes y con parámetros respectivos α y β.

a) Demuestre que la variable $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ se distribuye también como una variable de Poisson y exprese el parámetro de dicha distribución en función de α y β.

Suponga que un equipo de fútbol disputa 3 partidos, los cuales son independientes entre sí. El número de goles marcados en el partido $i-$ésimo puede modelarse como una variable aleatoria de Poisson $\mathbf{X}_i$ de parámetro a ($\forall i = 1, \ldots, 3$). Se pide (si no respondió al apartado anterior, considere que el parámetro allí pedido es $(\alpha + 1) + (\beta + 1)$) :

b) Supuesto que se han marcado m goles en los tres partidos, obtenga la probabilidad de que en el primer partido no haya habido goles.

c) Obtenga el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio del número de goles marcados en el primer partido como función del número de goles marcados en los tres.

(2.5 puntos)

3.- El proceso $\mathbf{X}(t)$ es un proceso gaussiano, de media nula y función de autocorrelación $R_{\mathbf{X}}(\tau)$. Este proceso da lugar al proceso $\mathbf{Y}(t)$ mediante la operación $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}^2(t)$ y, a continuación, se obtiene el proceso $\mathbf{Z}(t)$ al hacer pasar a $\mathbf{Y}(t)$ por un sistema LTI de respuesta al impulso $h(t) = e^{-\lambda t}u(t)$ ($\lambda > 0$). Se pide:

a) $f_{\mathbf{Y}}(y;t)$ y $E\{\mathbf{Y}(t)\}$.

b) $R_{\mathbf{Y}}(t_1, t_2)$.

c) La función de densidad espectral de potencia $S_{\mathbf{Z}}(\omega)$ observada para el proceso $\mathbf{Z}(t)$ es $S_{\mathbf{Z}}(\omega) = \mu\delta(\omega) + g(\omega)$, $\forall\omega$. Determine μ y $g(\omega)$ suponiendo conocida la función $S_{\mathbf{X}}(\omega)$. Si no respondió al apartado anterior, considere que $R_{\mathbf{Y}}(t_1, t_2) = R_{\mathbf{Y}}(\tau) = a + R^2_{\mathbf{X}}(\tau)$ con a una constante real que debe identificar.

(2.5 puntos)

NOTA: Si $\mathbf{X} \sim N(\eta_{\mathbf{X}}, \sigma_{\mathbf{X}})$ e $\mathbf{Y} \sim N(\eta_{\mathbf{Y}}, \sigma_{\mathbf{Y}})$ y, además, son conjuntamente gaussianas con coeficiente de correlación $\rho_{\mathbf{XY}}$, entonces

$$\mathbf{Y}|x \sim N\left(\eta_{\mathbf{Y}} + \rho_{\mathbf{XY}}\frac{\sigma_{\mathbf{Y}}}{\sigma_{\mathbf{X}}}(x - \eta_{\mathbf{X}}), \sigma_{\mathbf{Y}}\sqrt{1 - \rho^2_{\mathbf{XY}}}\right)$$

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Enero 2012 (Con libros y apuntes)

1.- Un sistema de comunicaciones digitales por satélite consta de N receptores, los cuales reciben el mensaje que en cada instante se esté enviando. Los mensajes detectados en cada receptor son enviados a un receptor central (RC) el cual, a partir de esa información, toma la decisión sobre qué mensaje finalmente se ha enviado. Aceptemos que las líneas de comunicación entre cada uno de los N receptores y el RC no introducen error alguno. Consideremos, asimismo, que los receptores son independientes entre sí. Se pide:

a) Supongamos, en primer lugar, que el procesado se realiza bit a bit. Consideremos que la probabilidad de envío de un '0' es p_0 y la de un '1' es $p_1 = 1 - p_0$. Consideremos, asimismo que la probabilidad de error en cada uno de los N receptores cuando se envía un '1' es p_{e1} y cuando se envía un '0' es p_{e0}. Considere que el RC da como resultado un '1' si al menos M de los N sensores ($M < N$) han detectado un '1' y el RC decide '0' en caso contrario. Calcule, en estas condiciones, la probabilidad de error de bit.

b) Considere ahora que la probabilidad de error de bit en el receptor $n-$ésimo (con independencia de que se envíe uno o cero) es p_n, $1 \leq n \leq N$ y que ambos símbolos son equiprobables. Considere, asimismo que los receptores trabajan ahora con mensajes de $k > 2$ bits y son capaces de detectar correctamente el mensaje si se producen un máximo de 2 errores en él. El RC recibe ahora los N mensajes detectados y supongamos que decide correctamente el mensaje enviado si, como máximo, 2 de los N mensajes ($N > 2$) se han detectado incorrectamente. Obtenga una expresión para la probabilidad de error en la recepción del mensaje, que sea función (no es necesario simplificar) de los parámetros del apartado.

c) El tiempo de retraso en la recepción de un bit en el receptor i ($i \neq 1$, $i \leq N$) con respecto al receptor 1 se puede modelar como una variable aleatoria exponencial de parámetro λ_i (seg^{-1}). Considere que la duración en el tiempo de la señal que codifica cada bit es τ segundos. Para que el sistema de N receptores y RC estén sincronizados es necesario que todos los retrasos con respecto al receptor 1 sean, como máximo, del 10 % de la duración del bit. Para el caso en que $N = 3$ y suponiendo los tiempos entre llegadas independientes, se pide que calcule la probabilidad de que los tres receptores y el RC estén sincronizados, supuesto que el retraso en llegar al receptor 2 es menor que el retraso en llegar al 3.

(2.5 puntos)

2.- Sean tres variables aleatorias $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ conjuntamente gaussianas de media 0 y varianza σ^2, que además cumplen que $\rho_{\mathbf{XY}} = \rho_{\mathbf{XZ}} = \rho_{\mathbf{YZ}} = \rho$. Definiendo las variables $\mathbf{W} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ y $\mathbf{V} = \mathbf{X}^2$ se pide:

a) Estimador óptimo sin restricciones de la variable $\mathbf{Z}$ como función de $\mathbf{W}$.

b) Función de densidad $f_{\mathbf{ZW}}(z, w)$.

c) Estimador lineal óptimo de la variable $\mathbf{V}$ como función de $\mathbf{Z}$.

(2.5 puntos)

3.- El proceso $\mathbf{X}(t)$ es un proceso real, gaussiano, de media η y función de autocovarianza $C_{\mathbf{X}}(\tau)$. A partir de este proceso se define el proceso $\mathbf{Y}(t) = a\mathbf{X}(t) + b\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}$, con a y b dos constantes reales. Se pide:

a) $E\{\mathbf{Y}(t)\}$.

b) $f_{\mathbf{Y}}(y;t)$.

c) $C_{\mathbf{Y}}(t_1, t_2)$.

(2.5 puntos)

NOTA: Si $\mathbf{X} \sim N(\eta_{\mathbf{X}}, \sigma_{\mathbf{X}})$ e $\mathbf{Y} \sim N(\eta_{\mathbf{Y}}, \sigma_{\mathbf{Y}})$ y, además, son conjuntamente gaussianas con coeficiente de correlación $\rho_{\mathbf{XY}}$, entonces

$$\mathbf{Y}|x \sim N\left(\eta_{\mathbf{Y}} + \rho_{\mathbf{XY}}\frac{\sigma_{\mathbf{Y}}}{\sigma_{\mathbf{X}}}(x - \eta_{\mathbf{X}}), \sigma_{\mathbf{Y}}\sqrt{1 - \rho^2_{\mathbf{XY}}}\right)$$

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Julio 2012 (Con libros y apuntes)

1.- Dispone de S bolsas, cada una de ellas con N_s bolas (con $s = 1, \ldots, S$) y de las que se sabe que la bolsa s-ésima tiene k_s bolas rojas (y $N_s - k_s$ de otros colores). Se pide:

a) Suponga que se extraen al azar j bolas de la bolsa s-ésima. Calcule la probabilidad de sacar alguna bola roja (suponga que $j < N_s - k_s$).

b) Suponga que las S bolsas se introducen en un saco. Se extrae entonces al azar una de esas bolsas de forma tal que la probabilidad de sacar una determinada bolsa es directamente proporcional al número de bolas en ella. A continuación se procede como en a). Se pide que proponga una ley de asignación de probabilidades para el suceso "se extrae del saco la bolsa s-ésima" , así como que calcule, en estas nuevas condiciones, la probabilidad pedida en a). Si no resolvió dicho apartado, considere que el valor allí pedido es $p_s^{(a)}$.

c) Suponga que se realiza el experimento planteado en b) varias veces, de manera independiente entre ellas, y se sabe que la probabilidad de extraer (del saco) la bolsa s-ésima va variando en cada experimento, de manera que la probabilidad de extraer esa bolsa en el intento i-ésimo es p_{si}. Se pide que calcule la probabilidad de que tengamos que esperar hasta el tercer intento para que salga alguna bola roja.

(2.5 puntos)

2.- Una variable aleatoria $\mathbf{X} \sim N(0, \sigma)$ da lugar a una variable $\mathbf{Y}$ de la forma:

$$\mathbf{Y} = \begin{cases} \mathbf{X} & \text{si } |\mathbf{X}| \leq a \\ -\mathbf{X} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

con a una constante real positiva. Se pide:

a) $f_{\mathbf{Y}}(y)$.

b) Estimador lineal óptimo de $\mathbf{Y}$ como función de $\mathbf{X}$.

c) Justifique si la variable $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ es continua, discreta o mixta y, a partir de ello, justifique si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son variables conjuntamente gaussianas.

(2.5 puntos)

3.- El proceso $\mathbf{X}(t)$ es un proceso real, gaussiano, de media cero y función de autocorrelación $R_{\mathbf{X}}(\tau)$. A partir de él se crea el proceso $\mathbf{Y}(t)$ de la forma:

$$\mathbf{Y}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} \mathbf{X}(\alpha) d\alpha$$

Supongamos que $R_{\mathbf{X}}(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T}$ con $|\tau| < T$ y nula fuera de esa región. En relación con estos procesos, se pide:

a) Estimador óptimo sin restricciones de $\mathbf{Y}(t)$ como función de $\mathbf{X}(t)$.

b) Valores de τ para los cuales las variables $\mathbf{X}(t+\tau)$ e $\mathbf{Y}(t)$ son incorreladas.

c) Valores de τ para los cuales las variables $\mathbf{Y}(t+\tau)$ e $\mathbf{Y}(t)$ son independientes.

(2.5 puntos)

NOTAS:
1. Dé por conocida la función gamma incompleta, definida de la forma $ginc(x, a) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$.
2. Tenga en mente las relaciones entrada-salida en los sistemas lineales e invariantes con entradas estocásticas.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Noviembre 2012 (Con libros y apuntes)

.

1.- Un código QR como el de la figura está formado por una matriz de N elementos cuadrados binarios (a los que nos referiremos en adelante como *elementos*, cada uno de los cuales o es negro o es blanco). Suponga que las filas entre los dos cuadrados de las esquinas superiores tiene M_1 elementos, las filas siguientes tienen M_2 elementos y las filas a partir del cuadrado de la esquina inferior izquierda tiene M_3 elementos. El número de filas es, respectivamente, K_1, K_2 y K_3 (en consecuencia, $M_1K_1 + M_2K_2 + M_3K_3 = N$). Suponga que únicamente existen tres dominios web (`.com`, `.org` y `.edu`); cada uno de estos dominios se caracteriza por cómo se estructura la primera fila; en concreto, el dominio `.com` tiene los $M_1/3$ primeros elementos negros (y el resto valores arbitrarios), el dominio `.org` como los $M_1/3$ elementos centrales negros (y el resto, recuerde, arbitrarios) y lo propio para el dominio `.edu` en los últimos $M_1/3$ elementos (asuma que M_1 es múltiplo de 3). Se ha estimado que, salvo por esos $M_1/3$ elementos que en cada caso toman valores negros determinísticamente, el resto de elementos toman valores negros (independientemente de los demás) con probabilidades p_c, p_o y p_d respectivamente para los tres dominios. Se pide:

a) Definiendo los sucesos $I_i =$"el código puede interpretarse como perteneciente al dominio i" (con $i = c, o, d$) y $D_c =$"el código pertenece al dominio `.com`", obtenga la probabilidad de que un código pueda interpretarse como perteneciente al menos a dos dominios simultáneamente supuesto que pertenece al dominio `.com`.

El lector del código QR de este problema lee cada código por filas; para cada fila, la probabilidad de cometer un error en la lectura depende de que haya habido un error en el elemento anterior (en tal caso, la probabilidad es p_{e_a}) o de que no haya habido (en tal caso, la probabilidad es $p_{\overline{e}_a}$) y no depende de lo que haya pasado en ningún otro elemento. Asimismo, se sabe que la probabilidad de error en el primer elemento de cada fila es p_e.

b) Calcule la probabilidad de que se lean al menos dos filas incorrectamente en el bloque central de K_2 filas (recuerde que cada una de esas filas tiene M_2 elementos), sabiendo que se define fila leída incorrectamente como fila en la que al menos dos de sus elementos se leen incorrectamente.

Supongamos que el lector se refina y se consigue que los errores sean independendientes entre sí, con probabilidad de error en cada elemento igual a p_e.

c) Probabilidad de que un código proveniente del dominio `.org` (y sin ambigüedad con los otros dos dominios) no sea identificado correctamente como perteneciente a ese dominio.

(2.5 puntos)

2.- Las variables $\mathbf{X}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ son IID, con distribución uniforme en el intervalo $[0, a]$. Se definen las variables:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \max_i \mathbf{X}_i \\ \mathbf{Z} &= \min_i \mathbf{X}_i \end{aligned}$$

a) $E\{\mathbf{Y}\}$.
b) $E\{\mathbf{Z}^2\}$
c) $E\{\mathbf{X}_i|\mathbf{Y} \leq x_0\}$, para un valor de i cualquiera tal que $1 \leq i \leq N$, y $0 \leq x_0 \leq a$.

(2.5 puntos)

NOTA: $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ $(a, b > 0)$ y $\Gamma(N+1) = N!$ si $N \in \mathbb{N}$.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Febrero 2013 (Con libros y apuntes)

1.- En una partida de cartas de dos jugadores se reparten 7 cartas a cada uno (asuma que se juega con una baraja española). Se pide:

a) Probabilidad de que se verifique el suceso A definido como "al primer jugador le salen 3 ases, 3 reyes y una sota".

b) Probabilidad de que se verifique el suceso B, definido como "al segundo jugador le sale un único as y un único rey ", supuesto que se ha verificado el suceso A.

c) $P(\overline{A}|\overline{B})$. Si no resolvió los apartados anteriores, puede dar esas probabilidades por conocidas.

(2.5 puntos)

2.- La variable obtenida como $\mathbf{X} = e^{\mu+\sigma\mathbf{Z}}$ con $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(0,1)$ se conoce como *lognormal* de parámetros μ y σ.

a) Obtenga $f_{\mathbf{X}}(x)$.

b) Obtenga $E\{\mathbf{X}\}$ y $\sigma^2_{\mathbf{X}}$.

c) Definiendo la variable $\mathbf{W} = \left(\prod_{i=1}^{N} \mathbf{X_i}\right)^{\frac{1}{\sqrt{N}}}$ con $\mathbf{X}_i$ N variables IID de tipo *lognormal* con parámetros μ y σ, obtenga $f_{\mathbf{W}}(w)$. Si lo desea, puede expresar el resultado en función del obtenido en el apartado a), expresando éste como $f_{\mathbf{X}}(x) = g(x;\mu,\sigma)$.

(2.5 puntos)

3.- Se obtiene el proceso $\mathbf{Z}(t)$ de la forma

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{X}(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$$

donde $\mathbf{X}(t)$ es un proceso gaussiano, de media nula y función de autocorrelación $R_{\mathbf{X}}(\tau)$ y las respuestas al impulso $h_1(t)$ y $h_2(t)$ son tales que $H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) = 0, \forall\omega$. Todas las magnitudes involucradas son reales. Se pide:

a) $R_{\mathbf{Z}}(t_1,t_2)$

b) $E\{\mathbf{X}(t)|\mathbf{Z}(t)\}$

c) Denominando $\mathbf{Y}_i(t) = \mathbf{X}(t) * h_i(t), i = \{1,2\}$, deduzca si los procesos $\mathbf{Y}_1(t)$ e $\mathbf{Y}_2(t)$ son ortogonales.

(2.5 puntos)

NOTA: Si $\mathbf{X} \sim N(\eta_{\mathbf{X}},\sigma_{\mathbf{X}})$ e $\mathbf{Y} \sim N(\eta_{\mathbf{Y}},\sigma_{\mathbf{Y}})$ y, además, son conjuntamente gaussianas con coeficiente de correlación $\rho_{\mathbf{XY}}$, entonces

$$\mathbf{Y}|x \sim N\left(\eta_{\mathbf{Y}} + \rho_{\mathbf{XY}}\frac{\sigma_{\mathbf{Y}}}{\sigma_{\mathbf{X}}}(x-\eta_{\mathbf{X}}), \sigma_{\mathbf{Y}}\sqrt{1-\rho^2_{\mathbf{XY}}}\right)$$

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Julio 2013 (Con libros y apuntes)

1.- Se lanza un dado seis veces de forma consecutiva. Se pide:

a) Suponiendo independencia entre lanzamientos y equiprobabilidad de las seis caras, obtenga la probabilidad de obtener la secuencia de resultados $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$, así como la probabilidad de obtener el resultado $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con cualquier ordenación entre los dígitos.

b) Denominemos S_i^j al suceso "Se obtiene la cara i ($i = 1 \dots 6$) en el lanzamiento j". Suponga ahora que los lanzamientos no son independientes entre sí, de tal forma que para $j \geq 2$

$$\begin{aligned} P(S_i^{j+1}|S_i^j) &= \frac{1}{6}P(S_i^j) \\ P(S_k^{j+1}|S_i^j) &= P(S_k^j) + \frac{1}{6}P(S_i^j), k \neq i \end{aligned}$$

(es decir, la probabilidad de obtener la cara i en el lanzamiento $j+1$ cuando en el j se ha obtenido esa cara es un sexto de la probabilidad de obtener esa cara en el lanzamiento j, y la probabilidad condicionada de las otras caras aumenta esa misma cantidad). Asúmase que en el primer lanzamiento sigue existiendo equiprobabilidad entre caras. Se pide que compruebe $\sum_{k=1}^{6} P(S_k^{j+1}|S_i^j) = 1 \; \forall j \geq 1$, así como que obtenga $P(S_k^j) \; \forall k \in \{1, \dots, 6\}$ y $j = 2$.

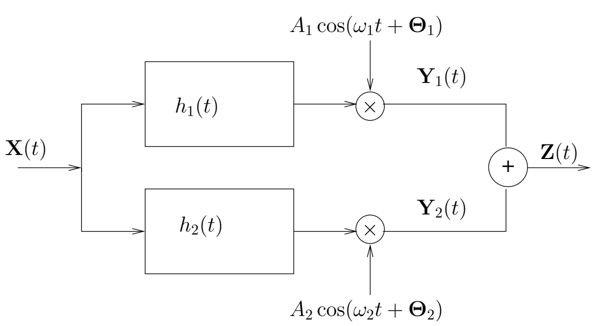
c) Suponiendo que el resultado $P(S_k^j)$ del apartado anterior es válido $\forall j \geq 2$ (es decir, no sólo para $j = 2$) y que cada lanzamiento (salvo el primero) se ve afectado exclusivamente por el lanzamiento anterior, calcule, en esas condiciones, la probabilidad de obtener la secuencia de resultados $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$. Si no resolvió dicho apartado, asuma que $P(S_i^j) = p, \forall j \geq 2, \forall i \in \{1, \dots, 6\}$.

(Ing. Telecom 2.5 puntos, Grados 2.0 puntos)

2.- Las variables $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son independientes y uniformes en el intervalo $(-a, a)$ (con $a > 3$). A partir de ellas se define la variable $\mathbf{Z}$ de la forma $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + e^{\mathbf{Y}}$. Se pide

a) $\rho_{\mathbf{XZ}}$.
b) $P(\mathbf{Y} \leq -\frac{a}{2}, \mathbf{Z} \leq a + e^{-a})$.
c) $f_{\mathbf{Z}}(z)$.

(Ing. Telecom 2.5 puntos, Grados 2.0 puntos)



3.- Se obtienen los procesos $\mathbf{Y}_1(t)$, $\mathbf{Y}_2(t)$ y $\mathbf{Z}(t)$ de la forma que se indica en la figura, donde $\mathbf{X}(t)$ es un proceso gaussiano, de media nula y función de autocorrelación $R_{\mathbf{X}}(\tau)$, las respuestas al impulso $h_1(t)$ y $h_2(t)$ son tales que $H_1(\omega) \neq 0, |\omega| \in [\omega_a, \omega_b]$ y $H_2(\omega) \neq 0, |\omega| \in [\omega_c, \omega_d]$ ($\omega_a < \omega_b < \omega_c < \omega_d$) y son nulas fuera de sus correspondientes intervalos —a tales filtros se les denomina filtros paso banda— y los parámetros A_1, A_2, ω_1 y ω_2 son constantes determinísticas conocidas (con $\omega_1 \in [\omega_a, \omega_b]$ y $\omega_2 \in [\omega_c, \omega_d]$. Se sabe, asimismo, que las fases $\mathbf{\Theta}_1$ y $\mathbf{\Theta}_2$ son uniformes en el intervalo $(-\pi, \pi)$, independientes entre sí e independientes de $\mathbf{X}(t)$. Todas las magnitudes involucradas son reales. Se pide:

a) $E\{\mathbf{X}(t)\mathbf{Z}(t)\}$.
b) Demuestre que los procesos $\mathbf{Y}_1(t)$ e $\mathbf{Y}_2(t)$ son incorrelados.
c) Teniendo en cuenta el resultado del apartado anterior (lo haya demostrado o no), calcule $S_{\mathbf{Z}}(\omega)$.

(Ing. Telecom 2.5 puntos, Grados 3.0 puntos)

NOTA: $e^a - e^{-a} > 2a$ para $a > 3$.

Universidad de Valladolid-ETS Ingenieros de Telecomunicación
Señales Aleatorias y Ruido

Enero 2014 (Con libros y apuntes)

1.- Un juego infantil consiste en N teclas situadas en lo alto de un recipiente y una mosca de plástico; las teclas están situadas en una línea recta, de forma que la primera tecla es la situada en el extremo izquierdo de la línea y la última es la situada en el extremo derecho. Cuando la mosca se introduce en el recipiente se lanza un mecanismo que activa una (y sólo una) de las teclas, de forma que los jugadores van apretando las teclas por turnos hasta que, al apretarse la tecla activada, la mosca sale de su escondite y el jugador que ha apretado tal tecla pierde (una tecla, una vez apretada, no forma parte ya del juego). Suponga, asimismo, que existen dos jugadores (y entenderemos por *el primer jugador* aquél que comienza el juego). Considere que el mecanismo activa la tecla i con probabilidad p_i, $i = \{1, 2, \ldots, N\}$. Se pide:

a) Considere, en primer lugar, que los jugadores deben apretar las teclas en el orden dado por el índice i indicado antes. Calcule la probabilidad de que ningún jugador pierda antes de apretar la tecla k, para cada valor de k en el intervalo $1 \leq k \leq N$.

b) Con el mismo protocolo que en el apartado a), y denominando A_i al suceso "el jugador pierde al apretar la tecla i", calcule $P(A_{N-1} | \bigcap_{i=1}^{N-2} \overline{A}_i)$.

c) Considerando ahora —a diferencia de los apartados anteriores— que los jugadores pueden apretar las teclas en el orden que consideren conveniente calcule, para $N = 5$, la probabilidad de que el primer jugador pierda (si lo desea, puede razonar para $N = 3$ y extender sus conclusiones a $N = 5$).

(2.5 puntos)

2.- Responda a las siguientes cuestiones:

a) Las variables $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_N$, son variables de Bernouilli de parámetro p e independientes. Se define la variable $\mathbf{Z}$ de la forma

$$\mathbf{Z} = \text{mín}\{i : \mathbf{Y}_i = 1\}$$

es decir, $\mathbf{Z}$ toma el valor i si $\mathbf{Y}_j = 0$, con $\forall j < i$ e $\mathbf{Y}_i = 1$ (y el valor cero si ninguna variable cumple la condición). Se pide que caracterice la variable $\mathbf{Z}$ y que compruebe que la ley de asignación de probabilidades así definida es correcta.

b) Calcule el valor medio de la variable anterior. Si no respondió a la pregunta, considere que $P(\mathbf{Z} = k) = (qp)^{k+2}$, con $k = \{1, \ldots, N\}$.

c) Las variables $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_N$ son variables binomiales de parámetros N y p e independientes entre sí. Se define la variable $\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i$. Denominemos z_0 el valor máximo que puede tomar la variable $\mathbf{Z}$, esto es, $z_0 = \text{máx}(\mathbf{Z})$. Se pide que calcule $P(\mathbf{Z} = z_0 - 1)$.

(2.5 puntos)

3.- Sea el proceso estocástico $\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\cos(\omega t + \mathbf{\Theta})$ donde $\mathbf{\Theta}$ es una variable uniforme en el intervalo $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ y $f_A(a|\mathbf{\Theta}) = \frac{1}{\mathbf{\Theta}} e^{(-\frac{1}{\mathbf{\Theta}} a)} u(a)$. En estas condiciones, se pide:
Se pide:

a) $E\{\mathbf{X}^2(t)|\mathbf{\Theta}\}$ y $E\{\mathbf{X}^2(t)\}$

b) $C_{\mathbf{X}}(t_1, t_2|\mathbf{\Theta})$.

c) Se crea el proceso $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{W}(t)$ con $\mathbf{W}(t)$ un proceso de ruido blanco, de media nula y autocorrelación $R_{\mathbf{W}}(\tau) = k\delta(\tau)$, e independiente de $\mathbf{X}(t)$. Considerando ahora que $\mathbf{\Theta} \sim U(0, 2\pi)$ así como que $\mathbf{A} \sim exp(\lambda)$ y que las variables $\mathbf{A}$ y $\mathbf{\Theta}$ son independientes, obtenga $S_{\mathbf{Y}}(\omega)$.

(2.5 puntos)

NOTA: Por simplicidad en los cálculos, denominemos:

$$I_1(\mu, a, b) = \int_a^b \alpha^2 \cos(\mu\alpha) d\alpha$$

$$I_2(\mu, a, b) = \int_a^b \alpha^2 \sin(\mu\alpha) d\alpha$$