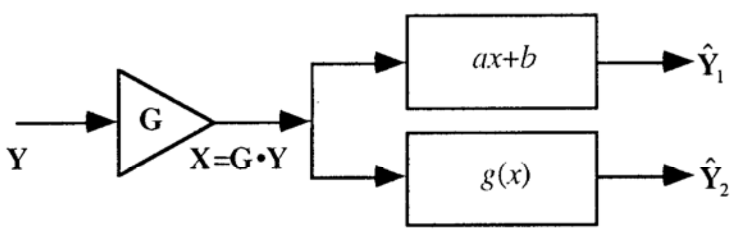
18.- En el esquema de la figura, **Y** representa una tensión desconocida e inaccesible que sufre una atenuación también desconocida, **G**, de forma que sólo se pueden obtener medidas de **X=G•Y**. Tanto **Y** como **G** pueden suponerse uniformes en (0,1) e independientes. Se trata de estimar **Y** a partir de **X** mediante los dos bloques de la figura:



a) Obtenga las constantes a y b del bloque superior, de forma que $\hat{\mathbf{Y}}_1$ sea la estimación lineal de **Y** de mínimo error cuadrático medio.

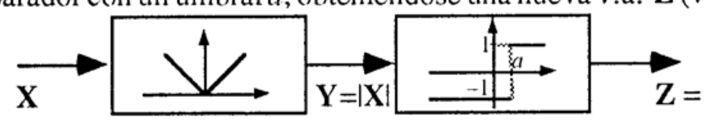
b) Obtenga la función $g(x)$ del bloque inferior que hace que $\hat{\mathbf{Y}}_2$ sea la estimación no lineal de **Y** de mínimo error cuadrático medio.

c) Calcule el coeficiente de correlación de **X** e $\hat{\mathbf{Y}}_1$ y la covarianza de **X** e $\hat{\mathbf{Y}}_2$.

19. Sean **X** e **Y** dos v.a.'s independientes. **X** es uniforme en (0,1) e **Y** es normal estándar. Se define la v.a. **Z=X+Y**. Determinar:

a) f(x,z).
b) f(z).
c)E(**X**/z).
d) Suponga que **X** modela una magnitud cuyo valor desea conocerse a partir de una medida que se ve afectada por una perturbación (v.a. **Y**). Si el valor medido z, resultara ser igual a 1, ¿qué valor proporcionaría para la magnitud x el estimador no lineal mínimo cuadrático (línea de regresión) de **X** en función de z ?.
(NOTA: G(1)=0.8413).

20.- Un sistema de detección de intrusos está formado por un emisor que envía pulsos ultrasónicos y un receptor que decide dar o no dar señal de alarma en función de los ecos recibidos al rebotar los pulsos en los objetos circundantes. El eco recibido al enviar un único pulso puede modelarse como una v.a. **X**, que es $N(0,\sigma_0)$ cuando no hay intruso y $N(0,\sigma_1)$ cuando lo hay ($\sigma_0<\sigma_1$). Dicho eco se pasa por un rectificador de onda completa y un comparador con un umbral a, obteniéndose una nueva v.a. **Z** (ver figura). Se pide:



$$\mathbf{Z} = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathbf{Y} > a \\ -1 \text{ si } \mathbf{Y} \leq a \end{cases}$$

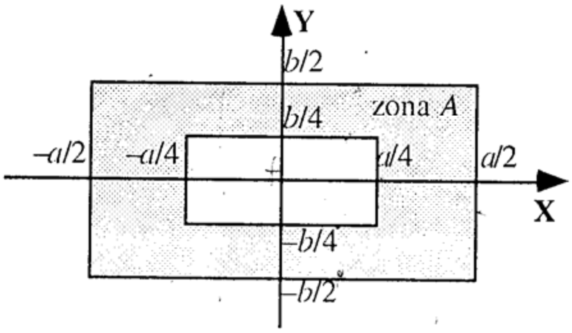
a) Umbral a de forma que, cuando no hay intruso, la v.a. **Z** sea de media nula.
b) Para el umbral del apartado anterior, calcular la media y varianza de **Z** cuando hay intruso y $\sigma_1=2\sigma_0$.
c) Se emiten 100 pulsos, obteniéndose de esta manera otras tantas v.a.'s $\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2,\ldots,\mathbf{Z}_{100}$ a la salida del esquema de la figura, que supondremos independientes; se forma la v.a. $\mathbf{W}=\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2+\ldots+\mathbf{Z}_{100}$ y el receptor decide dar señal de alarma cuando **W** sea mayor que un nuevo umbral b; calcular éste de forma que la probabilidad de dar alarma cuando no hay intruso (falsa alarma) sea de 0.01.
d) En las condiciones y para el umbral del apartado anterior, calcular la probabilidad de dar alarma cuando hay intruso (detección correcta), siendo $\sigma_1=2\sigma_0$.

21. Sea **X** el número de "do loop" en un programa Fortran e **Y** el número de ejecuciones necesariaspara que un programador depure el programa. Suponga que las probabilidades conjuntas de **(X,Y)** vienen dadas por la tabla de la figura:

x/y	1	2	3	4
0	0.059	0.100	0.050	0.001
1	0.093	0.120	0.082	0.003
2	0.065	0.102	0.100	0.010
3	0.050	0.075	0.070	0.020

a) Encontrar la probabilidad de que un programa elegido aleatoriamente contenga como mucho, un "do loop" y requiera, al menos dos ejecuciones para su depuración.
b) Obtener E(**XY**).
c) Obtener las probabilidades marginales de X e Y y las medias y varianzas de ambas v.a.´s.
d) Calcular la probabilidad de que un programa elegido aleatoriamente necesite, al menos, 2 ejecuciones para ser depurado supuesto que contiene un "do loop".
e) Calcular Cov(**XY**) y la correlación entre **X** e **Y**. Basándose en el valor correspondiente de "r", ¿se puede decir que **X** e **Y** no son independientes?.

22.- Una v.a. bidimensional **(X,Y)** tiene una fdpc de valor constante en la zona A de la figura y nulo en el resto.



a) Demostrar que las v.a.'s **X** e **Y** están incorreladas.
b) ¿Son **X** e **Y** independientes?
c) Se aplica la transformación: $\mathbf{Z}=\mathbf{X}\cos\theta-\mathbf{Y}\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\mathbf{W}=\mathbf{X}\,\mathrm{sen}\,\theta+\mathbf{Y}\cos\theta$, siendo θ una constante real ($0\leq\theta<2\pi$); determinar el valor de esta constante para el cuál la covarianza de las v.a.'s **Z** y **W** sea máxima.
d) Para la transformación del apartado anterior, calcular la relación que debe existir entre las constantes a y b para que la covarianza de las v.a.'s **Z** y **W** sea nula, independientemente del valor de θ.

23. Sea (**X**,**Y**) una v.a. bidimensional con fdp conjunta $f_{XY}(x,y)=k$ en ($x>0$, $y>0$, $x^2+y^2<1$). Se pide:

a) Determine el ~~rango o~~ recorrido de (**X**,**Y**) y el valor de k.

b) Calcule $f_X(x)$, $E\{\mathbf{Y}/x\}$ y $E\{\mathbf{XY}\}$.

c) Realice el ~~cambio~~ de cartesianas a polares ($x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$) y calcule $f_{\rho\theta}(\rho,\theta)$. ¿Son ρ y θ independientes?.

d) Calcule la probabilidad $P(\rho\cos\theta>0.5)$.

24.- Una fuente de alimentación puede suministrar un máximo de $K_1\alpha$ vatios a un sistema compuesto de $n+1$ elementos. Uno de ellos es distinto a todos los demás y su consumo se modela según una v.a. **X** con fdp $f(x)=q\delta(x)+p\delta(x-\alpha)$. Los n restantes son todos idénticos entre sí (e independientes del anterior) con un consumo *medio por unidad* de β vatios y un consumo *global* (de los n) modelado según una v.a. **Y** de tipo exponencial. Se pide:

a) Caracterice la v.a. "consumo total" **Z=X+Y** y calcule el consumo total medio.

b) Calcule la constante K_1 para que la probabilidad de sobrecarga de la fuente sea inferior a p_0.

c) En el supuesto de utilizar alimentaciones separadas, una de α vatios para el primer elemento y otra de $K_2\alpha$ para los n restantes, calcular el valor de K_2 para mantener la misma probabilidad de sobrecarga.

25.- Sea **X** una v.a. Gaussiana, de media nula y varianza σ^2. Sobre dicha v.a. se aplica la transformación:

$$g(x)=\begin{cases} a & x\geq a \\ x & |x|\leq a \\ -a & x\leq -a \end{cases}$$

obteniéndose la v.a. **Y**=g(**X**).

a) Calcule el valor de a de forma que $P(|\mathbf{Y}|<a)=0.9$.

b) Calcule $E(\mathbf{XY})$. Particularice para el valor de a calculado en el primer apartado.

c) Se define la v.a "distorsión" $\mathbf{D}=\mathbf{Y}-\gamma\mathbf{X}$, donde γ es una constante. Determine el valor de ésta para que las v.a.'s **X** y **D** estén incorreladas y particularice para el valor de a calculado en el primer apartado.

26. Suponga un sistema RADAR encargado de la vigilancia del espacio aéreo de una región; el tiempo que tarda en detectarse un intruso puede modelarse como una v.a. **Z=X+Y**, donde **X** es una v.a uniforme en el intervalo (1,3) expresado en milisegundos que modela el tiempo necesario para que el sistema RADAR verifique la detección, e **Y** una v.a. gaussiana de media μ_Y=5 mseg, y desviación típica σ_Y=2 mseg que modela el tiempo de acceso de la información al centro de control.Asuma que **X** e **Y** son v.a.´s independientes. Calcule:

a) Media y varianza de **Z**.

b) Coeficientes de correlación de **Y**,**Z**, por un lado, y de **X**,**Z** por otro.

c) Calcule los estimadores lineales óptimos de **Z** en función de **Y** por un lado, y de **Z** en función de **X** por otro.

27. Suponga un sistema de comunicaciones en un entorno urbano en el que la amplitud recibida está compuesta por la señal que llega mediante un rayo directo a la que se le añaden las señales procedentes de múltiples reflexiones. Modelamos la amplitud recibida por el camino directo como una variable aleatoria uniforme **X** (0,1) mientras que de las amplitudes de las "n" señales (n>>1) procedentes del multicamino **X1, X2,...Xn** se sabe que son v.a.'s independientes de media nula y varianza "σ^2".Calcule:

a) Calcule la fdp de la v.a. **Y** definida como: **Y=(X1+X2+.....Xn) / n.**

Si definimos **Z=X+Y**, donde se puede considerar a la v.a. **X** como señal deseada y a la **Y** como señal perturbadora, y asumiéndose **X** e **Y** independientes:

b) f.d.p. conjunta de **Z** y **X**. Calcule asímismo la marginal de **Z.**

c) Obtenga el estimador no lineal óptimo de **X** en función de **Z.**

28- El tiempo en milisegundos necesario para transferir un archivo de datos desde una unidad de disco a la memoria central de un ordenador puede modelarse como una v.a. **Z**, que es de la forma **Z**=**X**+c**Y**, donde **X** es el tiempo que tarda la cabeza lectora en colocarse al principio del archivo, **Y** el tamaño en Kbytes de éste y c una constante. Supondremos **X** uniforme entre 30 y 50 ms, **Y** normal de media η_Y=100 Kbytes, desviación tipica σ_Y=10Kbytes e independiente de **X** y c=0.5 ms/Kbyte. Calcule: a) La media y varianza de **Z** y el coeficiente de correlación de **Y** y **Z**. b) La fdp de **Z**. c) Los estimadores lineal y no lineal óptimos (recta y línea de regresión respectivamente) de **Z** en función de **Y**.

29- Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ v.a.'s uniformes en (a,b) e independientes y $g(x)$ una función definida $\forall x \in (a,b)$. Se forma la v.a.: $\mathbf{Y} = [(b-a)/n]\sum_{i=1}^{n} g(\mathbf{X}_i)$. a) Calcule la media de **Y** en función de $g(\bullet)$. b) Suponga que la fdp de $\mathbf{X}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ es ahora una función genérica $f_X(x)>0$ $(a<x<b)$, $f_X(x)=0$ (resto) e $\mathbf{Y} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} g(\mathbf{X}_i)/f_X(\mathbf{X}_i)$; calcule la nueva media de **Y**. c) Compare las varianzas de **Y** en las condiciones del apartado b), con a=0, b=1 y $g(x)=x^2$, para los dos casos siguientes: i) $f_X(x)=1$ $(0<x<1)$; ii) $f_X(x)=2x$ $(0<x<1)$

30.- Un móvil avanza en línea recta en instantes discretos de tiempo; en cada instante tiene una probabilidad p de avanzar 1m. y q=1-p de permanecer parado. Se consideran dos instantes de tiempo consecutivos y se definen las va's **X** : " distancia avanzada solo en el primer instante", e **Y**: " distancia avanzada en los dos instantes".

a) Obtener las probabilidades de los puntos del rango o recorrido de la va bidimensional (**X**,**Y**) , y sus probabilidades marginales. ¿ Son independientes ?.

b) Calcular el coeficiente de correlación de **X** e **Y** y el estimador lineal óptimo de **Y** en función de **X**. ¿ Son **X** e **Y** incorreladas?.

c) Obtener el estimador óptimo (sin restricciones) de **Y** en función de **X**.

31.- Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ v.a.'s independientes, de media η y varianza σ^2. Se forma la nueva v.a. "media aritmética" $\overline{\mathbf{X}}=(\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2+\ldots+\mathbf{X}_n)/n$.

a) Calcular el coeficiente de correlación de $\mathbf{X}_1$ y $\overline{\mathbf{X}}$ y su límite cuando $n\to\infty$.

b) Si las v.a.'s $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ son $N(\eta,\sigma)$ e independientes, obtener la f.d.p. de la v.a. $\mathbf{Y}=\mathbf{X}_1-\overline{\mathbf{X}}$ $(\forall n>1)$.

c) En las mismas condiciones de b), obtener el estimador mínimo cuadrático óptimo (línea de regresión) de **Y** en función de $\mathbf{X}_1$.