32. Sea un ruido blanco de media nula y función de autocorrelación $R_x(\tau) = K\delta(\tau)$.

Se pasa dicho proceso por un SLI con respuesta al impulso $h(t) = \alpha e^{-\alpha t}U(t)$. Calcular:

a) Densidad espectral de potencia de la entrada.
b) Función de transferencia del SLI.
c) Densidad espectral de potencia de la salida.
d) Función de autocorrelación de la salida.

33. Sea $\mathbf{X}[n]$ un proceso estocástico discreto en el tiempo, estacionario en sentido amplio, de media nula y autocorrelación $R_X[m]$. Considere dos valores del proceso en dos instantes distintos: $\mathbf{X}[n]$ y $\mathbf{X}[n-k]$ ($k \neq 0$).

a) Calcule los estimadores *lineales* óptimos $\hat{X}[n]$ (de $X[n]$ en función de $\mathbf{X}[n-k]$) y $\hat{X}[n-k]$ (de $X[n-k]$ en función de $X[n]$). Compárelos entre sí.

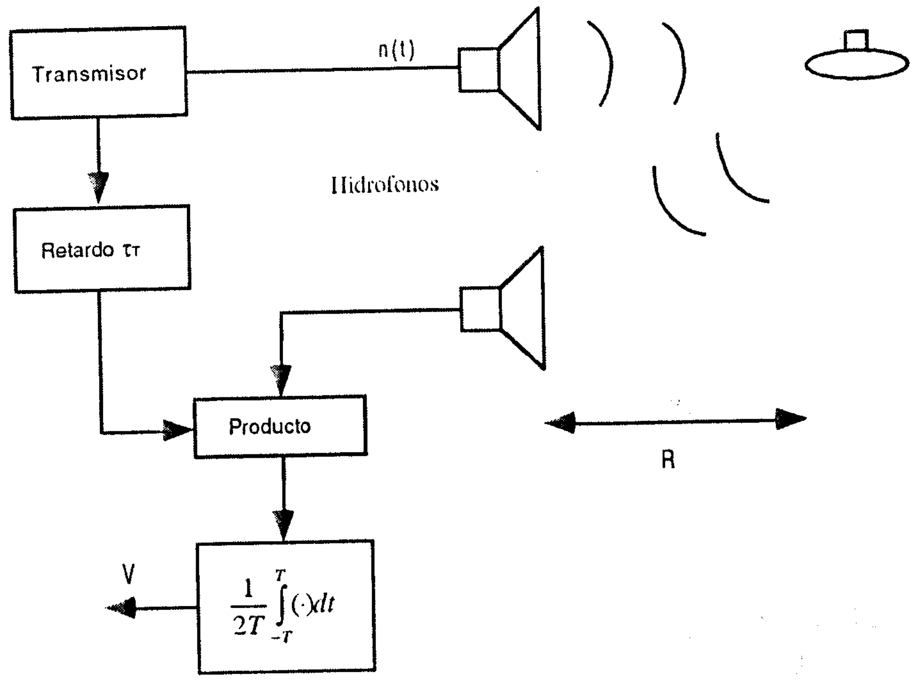
b) Si se define el proceso $E[n]=X[n]-\hat{X}[n]$, obtenga la correlación cruzada de $\mathbf{E}[n]$ y $X[n]$, $R_{EX}[n_1,n_2]$, y compruebe que se anula para $n_1-n_2=k$.

34. Un sistema SONAR instalado en un submarino transmite un ruido aleatorio n(t) con objeto de determinar la distancia a la que se encuentra otro submarino "blanco". Esta distancia R, se obtiene por la expresión:

$$R = \frac{v\tau_R}{2}$$

donde v es la velocidad de las ondas sonoras en el agua, y τ_R es el tiempo que tarda la señal reflejada en volver al submarino transmisor. En el diagrama de bloques de la figura se establece el sistema empleado para calcular esta distancia; asuma que n(t) es una realización de un proceso ergódico N(t), y que T es muy grande:

a) Exprese V en términos de la función de autocorrelación de N(t).
b) ¿ Qué valor de retardo τ_T hace que V tenga un máximo?.
c) Describa con palabras cómo el submarino transmisor puede determinar la distancia al submarino "blanco".



35. Dados los procesos ortogonales **X**(t) e **Y**(t) estacionarios en sentido amplio con autocorrelaciones:

$$R_X(\tau)=\begin{cases}1 & |\tau|\le t_0 \qquad t_0>0\\ 0 & resto\end{cases}$$
$$R_Y(\tau)=\delta(\tau)$$

Se forma el proceso **Z(t)=X(t)+Y(t)**. Este último proceso se aplica a la entrada de un sistema lineal, determinista e invariante, con respuesta al impulso:

$$h(t)=ae^{-at}U(t), a>0$$

A la salida se obtiene un nuevo proceso **W(t)**. Calcular:

a) Valores en el origen de tiempos de las correlaciones cruzadas Rxw(0), Rzw(0), y de la autocorrelación Rw(0).

b) Densidad espectral de potencia de **W(t)**.

c) Suponga que **X(t)** representa una señal eléctrica alterada por una perturbación **Y(t)**; se pretende que la salida del sistema lineal sea una estimación de **X(t)**. Determine la constante "*a*" que minimiza

$$\varepsilon=E\{[X(t)-W(t)]^2\}.$$

36. Sea el proceso **X(t)=Acos(Φ) +Y(t)**, donde A es una constante, **Φ** es una va distribuida uniformemente (-π,π) e **Y(t)** es un proceso ergódico, independiente de **Φ** , de media η_Y y de autocorrelación $R_Y(\tau)$.

a) Calcular la media y la autocorrelación del proceso **X(t)**.

b) Calcular la media y la autocorrelación temporales del proceso **X(t)**.¿ Es ergódico con respecto a la media y a la autocorrelación?.

c) Se obtiene el proceso **Z(t)** haciendo pasar **X(t)** por un sistema lineal con respuesta al impulso h(t)=δ(t)-a exp(-at) (t ≥ 0). Calcular la media y la media temporal de **Z(t)**. ¿ Es ergódico respecto de la media ?.

37. Suponga el siguiente proceso estocástico: $\mathbf{Y}(t) = (A_c + \mathbf{X}(t))\cos(\omega_c t + \theta)$ donde A_c y ω_c son constantes, **X**(t) es un proceso estacionario de media nula y función de autocorrelación $R_X(\tau)$,y θ una v.a.uniforme en $(-\pi,\pi)$ e independiente de **X**(t). Se pide:

a) Demostrar que **Y**(t) es un proceso estacionario en sentido amplio.

Suponga que $\mathbf{X}(t)=\sqrt{2}\cos(\omega_m t+\phi)$ donde ϕ es otra v.a.uniforme en $(-\pi,\pi)$ independiente de θ .

b) Particularice los resultados anteriores para esta hipótesis.

c) Calcular la potencia de **Y**(t) y la densidad espectral de potencia; dibuje esta última (Suponga $\omega_m \ll \omega_c$).

Si este proceso **Y**(t) es transmitido por un canal modelado como un sistema lineal de respuesta al impulso: $h(t)=\delta(t)-a\exp(-at)U(t)$, obteniéndose un nuevo proceso **Z**(t), determine:

d) Función de transferencia del sistema y densidad espectral de potencia de **Z**(t)

38 . Suponga un proceso estocástico **X(t)=S(t)+N(t)**, siendo **S(t)**una señal compuesta por "m" sinusoides y **N(t)** una señal perturbadora estacionaria en sentido amplio, de media 0 y función de autocorrelación $R_N(\tau)$:

$$\mathrm{X}(t) = \sum_{i=1}^{m} \cos(w_i t + \Phi_i) \ + \ \mathrm{N}(t)$$

donde w_i y m son constantes , $\Phi_i$son v.a.´s uniformes $(0, 2\pi)$ independientes entre sí y con N(t).

a) Demuestre que **X(t)** es un proceso estacionario en sentido amplio.

Suponga a partir de este momento que m=1 y que $R_N(\tau)=\delta(\tau)$.

b) Calcule la densidad espectral de potencia de X(t).

c) Si filtramos **X(t)** por un filtro cuyo módulo al cuadrado de la función de transferencia viene dado por la expresión:

$$|H(\omega)|^2 = \begin{cases} 1 & \omega_1 - \omega_c \le \omega \le \omega_1 + \omega_c \qquad \textit{siendo } \ \omega_1 >> \omega_c > 0 \\ 1 & -\omega_1 - \omega_c \le \omega \le -\omega_1 + \omega_c \qquad \textit{siendo } \ \omega_1 >> \omega_c > 0 \\ 0 & \textit{resto} \end{cases}$$

obteniéndose el proceso **Y(t)=S1(t)+N1(t)**, donde **S1(t)** es la versión filtrada de **S(t)** y **N1(t)** la versión filtrada de **N(t)**, determine el valor de ω_c que hace que se igualen las potencias de señal y ruido filtrados.

39.- Sean $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n, \ldots$ v.a.'s continuas e independientes, de media nula y varianza 1. Se define el proceso discreto en el tiempo:

$$X[n]=\sum_{k=1}^{n} X_k \quad (n=1,2,\ldots)$$

a) Calcule la media y la autocorrelación de $X[n]$. ¿Es estacionario en sentido amplio?.

Se define el nuevo proceso:

$$Y[n]=X[n+N]-X[n]$$

siendo N un número natural fijo.

b) Calcule la media y la autocorrelación de $Y[n]$. ¿Es estacionario en sentido amplio?.

c) Obtenga la distribución de 1º orden del proceso $Y[n]$, suponiendo $N>>1$.

40. Dados los procesos estocásticos X(t) e Y(t), definidos como:

$$X(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$$
$$Y(t)=B\cos(\omega_0 t)-A\sin(\omega_0 t)$$

~~donde A y B son variables aleatorias y ω_0 una constante, calcular:~~

a) Condiciones que deben cumplir A y B para que X(t) sea un proceso estacionario en sentido amplio.

b) Condiciones que deben cumplir A y B para que Y(t) sea un proceso estacionario en sentido amplio.

c) Demostrar que si se cumplen las condiciones de los apartados anteriores, X(t) e Y(t) son conjuntamente estacionarios en sentido amplio.

41. Sea el p.e. $X(t)=A\cos(\omega t+\Phi)$ donde Φ es uniforme en $(-\pi,\pi)$.y A y ω son constantes Calcular:

a) Media y autocorrelación de X(t).

b) ¿ Es estacionario en sentido amplio ?.

c) Media y autocorrelación temporales de X(t).

d) ¿ Es X(t) ergódico con respecto a la media y a la autocorrelación ?.

Sobre X(t) se efectúa la transformación $g(x)=x^2$ obteniéndose el proceso Y(t). Calcular:

e) Media y autocorrelación de Y(t).

f) Media y autocorrelación temporales de Y(t).

g) ¿ Es Y(t) ergódico con respecto a la media y a la autocorrelación ?.

Sobre Y(t) se efectúa una transformación lineal con respuesta al impulso $h(t)=1/2T$ $(-T\le t\le T)$ obteniéndose el proceso Z(t). Calcular:

h) Función de transferencia del sistema lineal $H(\omega)$.

i) Autocovarianza y densidad espectral de potencia del proceso Z(t).

42.- Sea $X(t)$ un proceso estocástico estacionario en sentido amplio, de media η_X y autocorrelación $R_X(\tau)$. Se forma a partir de él el proceso $Y(t)=X(t)\cos(\omega_0 t+\Theta)$, donde Θ es una va distribuída uniformemente en el intervalo $(-\pi,\pi)$ e independiente de $X(t)$.

a) Demostrar que $Y(t)$ es también estacionario en sentido amplio.

b) Suponga ahora que $X(t)=A$ $(\forall t)$, siendo A una va de media η_A y varianza σ_A^2. Calcule la media y autocorrelación temporales de $Y(t)$. ¿Es este proceso ergódico respecto de la media?¿Lo es respecto de la autocorrelación?

43. Sea X[n] un proceso ruido blanco, estacionario en sentido estricto, de media nula y autocovarianza $C_X[n]=\sigma_x^2\delta[n]$. Se obtiene el proceso **Y[n]** haciendo pasar **X[n]** por un sistema lineal causal con función de transferencia $H(\omega)=1/(1-ae^{-j\omega})$ y respuesta al impulso $h[n]=a^nU[n]$, siendo "a" una constante positiva y menor que la unidad. Se pide:

a) Calcular la media y la varianza del proceso **Y[n]**.
b) Calcular la autocorrelación y la densidad espectral de potencia de **Y[n]**.
c) Calcular el estimador $\hat{Y}[n+1]=g(Y[n])$ de error cuadrático medio mínimo.
d) Obtener el error cuadrático medio del error de estimación $Y[n+1]-\hat{Y}[n+1]$.

44. Sea **X[n]** un proceso estocástico discreto de ruido blanco y estacionario de segundo orden, con fdp de primer orden N(0,1). Se utiliza **X[n]** para formar el proceso $\mathbf{Y}[n]=a_0\mathbf{X}[n]+a_1\mathbf{X}[n-1]$. Calcular:

a) Autocorrelación y densidad espectral de potencia de X[n].
b) Correlación cruzada de **X[n]** e **Y[n]**.
c) Autocorrelación y densidad espectral de potencia de **Y[n]**.

45. Sea el p.e. $\mathbf{X}(t)$ definido como $\mathbf{X}(t)=\exp(-\mathbf{A}t)$ donde **A** es una v.a. uniforme en el intervalo $(0,a)$. Se pide:

a) La media y autocorrelación del proceso $\mathbf{X}(t)$.
b) Si se pasa el proceso por un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h(t)=\beta t$ $(0<t<t_0)$, $h(t)=0$ (resto), calcule la media del proceso de salida $\mathbf{Y}(t)$ en el origen $(t=0)$.