

PROBLEMAS TEMA II: V. ALEATORIA UNIDIMENSIONAL

8. En una fábrica se reciben 3000 piezas; la probabilidad de que ^{cada} una de ellas esté defectuosa es de 0.001. ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de una pieza defectuosa?

9. En un determinado equipo hay “n” componentes iguales bajo la hipótesis de que el fallo de uno de ellos no afecta a los demás. Calcular la distribución del número de componentes que fallan en $(0, t_0)$, si sabemos que el tiempo de vida de un componente viene caracterizado por una exponencial de parámetro “c”.

10. Analizar las funciones de variable aleatoria de los siguientes casos:

- a) Sea X uniforme $(-0.5, 0.5)$, siendo $Y = g(X) = X^2$
- b) Sea $X = N(\eta, \sigma)$, siendo $Y = e^X$.
- c) Sea X uniforme $(-\pi, \pi)$, $Y = A \sin(X + \theta)$.

11. La profundidad de penetración de un neutrón en un metal puede modelarse como una v.a. con distribución exponencial de parámetro 1 mm^{-1} .

- a) Calcular la probabilidad de que un neutrón atraviere una lámina de 1 mm. de espesor.
- b) Si a continuación de dicha lámina se coloca otra del mismo grosor, ¿cual es la probabilidad de que un neutrón que ha atravesado la primera lámina atraviere también la segunda?
- c) Un cuerpo radioactivo emite 1000 neutrones, ¿cual es la probabilidad de que alguno de ellos atraviere una lámina de 7 mm. de espesor?
- d) Si se conoce con seguridad que al menos un neutrón ha atravesado la lámina del apartado anterior, ¿cual es la probabilidad de que la hayan atravesado más de 2?

12. Un avión se aproxima en línea recta hacia un sistema radar. Éste trata de detectarlo emitiendo pulsos y procesando sus ecos. El eco correspondiente al pulso i-ésimo, X_i , se modela como una v.a. uniforme en $(0, ki)$, siendo k una constante positiva (esto es, la longitud del rango de la v.a. es proporcional al número de orden del pulso emitido), y cada eco es independiente de los demás. Los ecos se comparan sucesivamente con un umbral fijo t ($t < k$), hasta que éste es superado en cuyo caso se da el avión por detectado. Definiendo como Y la v.a. que representa el número de pulsos emitidos hasta que se produce la detección se pide:

- a) Cálculo de $P(Y=n)$ y comprobación de $\sum P(Y=n) = 1$ ($1 \leq n < \infty$).
- b) Número medio de pulsos necesarios para detectar el avión.
- c) Valor de la constante k que garantiza que el número medio de pulsos emitidos sea inferior a un valor n_0 dado.

13. Un transmisor emite impulsos de dos tipos. La amplitud de los impulsos de tipo I sigue una fdp (Rayleigh): $f(x) = x \exp(-x^2/2) U(x)$. La amplitud de los impulsos de tipo II sigue una fdp normal $N(5, 2)$. El receptor decide el tipo de impulso transmitido comparando la amplitud de cada impulso recibido con un umbral μ : si la amplitud es

mayor que μ , se decide que el impulso transmitido fue de tipo II; caso contrario se decide que fue de tipo I

- Determinar el valor del umbral μ de forma que la probabilidad de equivocación al transmitir un impulso de tipo II sea de 0.1.
- Para el umbral obtenido en el apartado anterior, determinar la probabilidad de equivocación al transmitir un impulso del tipo I.
- Si se transmiten N impulsos sucesivos de tipo II, ¿cual es la probabilidad de que al menos M de ellos superen el umbral μ ? Obtener dicha probabilidad para $N=5$, $M=4$ y el valor del umbral μ calculado en el primer apartado.

14. Se dispone de un circuito cuantificador de 4 niveles (2 bits), cuya característica de transferencia es la mostrada en la figura 1. Suponga que la entrada a dicho circuito es modelada por una v.a. X con fdp tal como muestra la figura 2.

- Determine y represente la función de distribución de la v.a. $Y=q(X)$.
- Calcule los valores de los niveles de cuantificación b_1 y b_2 que hacen que la varianza de la v.a. $Y-X$ (error de cuantificación) sea mínima.

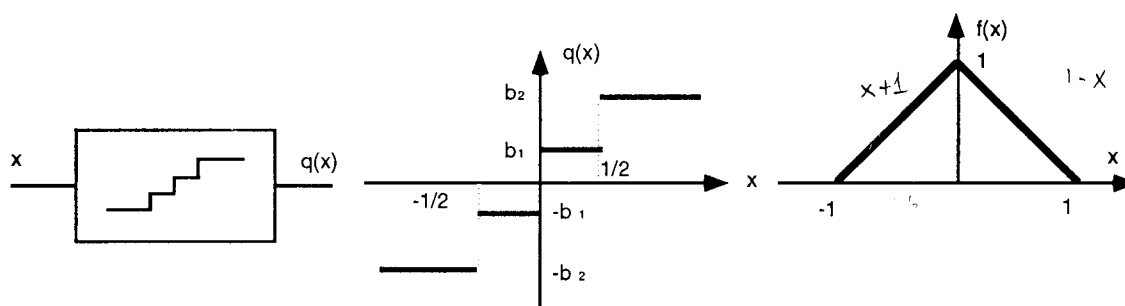


Figura 1

Figura 2

15. Se define la v.a. Y como el número de veces que se debe lanzar una jabalina hasta conseguir sobrepasar una marca de b metros (lanzamientos independientes). Si se llama p a la probabilidad de que un lanzamiento sea superior a b metros, se pide:

- $P_n = P\{Y=n\}$.
- Demostrar que $\sum P_n = 1$ siendo $(1 \leq n < \infty)$.
- Calcular el número medio de lanzamientos para superar la marca de b metros.
- Si la distancia alcanzada en un único lanzamiento, está distribuida según una va tipo Rayleigh, con $f(x) = (x/a^2) \exp(-x^2/2a^2)$ ($x > 0$, $a = 25$ m), calcule el número medio de ensayos necesarios para batir el record del mundo situado a 88m.

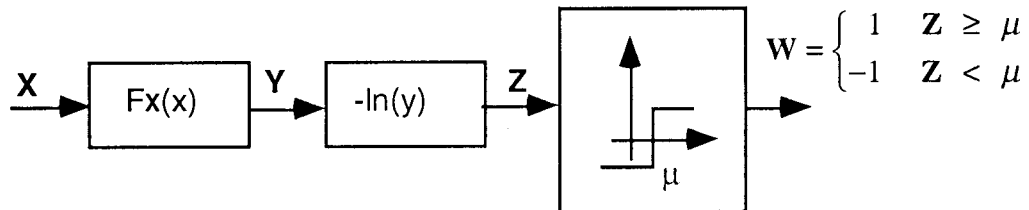
16. Se ha establecido un sistema de comunicación digital binario, en el que se ha optado por asignar al bit "1" un nivel de tensión positivo de " m " voltios, y al bit "0" un nivel de tensión negativa de " $-m$ " voltios. El ruido del canal de transmisión se supone aditivo a la señal y con fdp Laplaciana. De esta forma, en recepción la amplitud es modelada de forma condicional al bit transmitido:

bit "1": $f(x/"1") = \frac{a}{2} e^{-a|x-m|}$ y el bit "0" $f(x/"0") = \frac{a}{2} e^{-a|x+m|}$ El sistema receptor decide cuál de los dos bits ha sido transmitido comparando la amplitud de la señal recibida con un umbral μ , determinando que si la amplitud supera el umbral se ha transmitido un "1", y si no se supera que ha sido transmitido un "0". Se pide:

- Establezca la posición del umbral que determina probabilidades de detección erróneas iguales para ambos bits (Suponga $-m < \mu < m$).
- Establezca la relación que deben cumplir " a " y " m " para que esta probabilidad de error sea de 0.001, para el umbral del apartado anterior.

c) Si durante la la fase de prueba del sistema se transmiten N "1" sucesivos de forma independiente, y para la probabilidad de error del apartado anterior, ¿cuál es la probabilidad de que al menos M superen el umbral ?. Particularice los resultados para $N=5$, y $M=4$.

17. Dada una variable aleatoria X continua con función de distribución $F_X(x)$, se generan a partir de ella las v.a.'s del esquema:



- f.d.p de Y obteniéndose Y mediante la transformación: $y=g(x)=F_X(x)$.
- f.d.p de Z obteniéndose Z mediante la transformación $z=h(y)=-\ln(y)$.
- Determine el umbral μ , de forma que la varianza de W sea mínima.