Sistemas Lineales

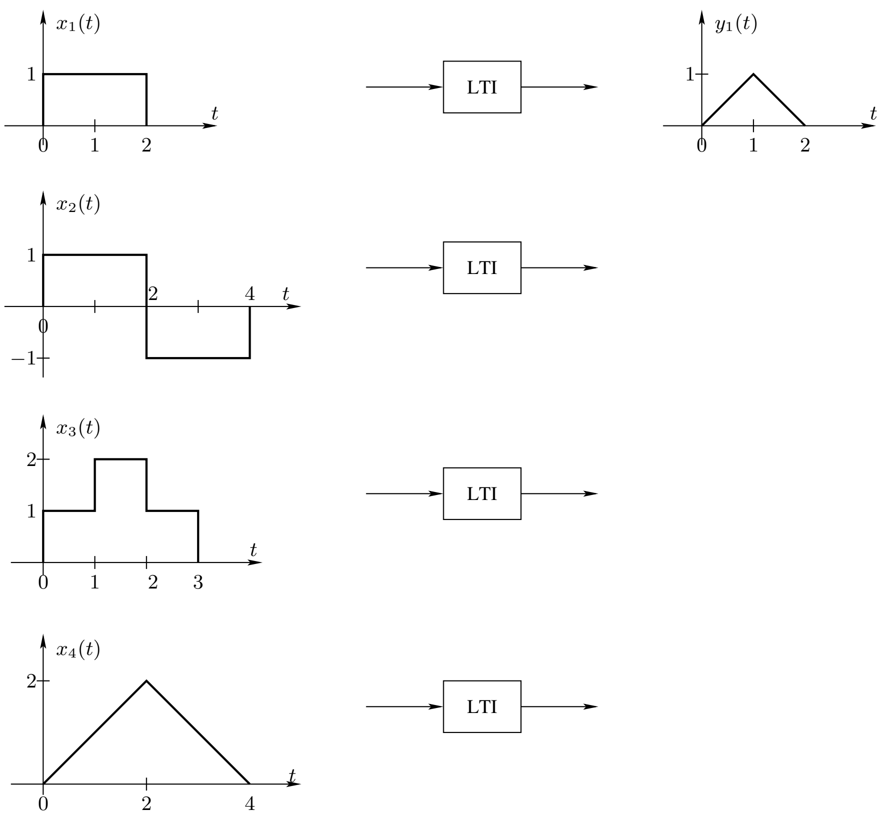
Tema 2: Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo (LTI)

1. Introducción

De las propiedades básicas de los sistemas, vistas en el tema anterior, la linealidad y la invarianza en el tiempo juegan un papel fundamental por varias razones:

- Muchos procesos físicos son LTI $\Rightarrow$ pueden modelarse como sistemas LTI.
- Poseen la propiedad de superposición (linealidad) $\Rightarrow$ si la entrada a un sistema LTI se puede representar como combinación lineal de un conjunto de señales básicas (concepto de base de señales), la salida será la misma combinación lineal de las respuestas del sistema a esas señales básicas.
- Veremos que cualquier señal se puede representar como **combinación lineal de impulsos unitarios retardados**. Esto nos permitirá caracterizar cualquier sistema LTI mediante su **respuesta al impulso unitario**.
  Esta representación se conoce como **suma de convolución** (sistemas LTI discretos) o **integral de convolución** (sistemas continuos) y proporciona una gran comodidad al tratar los sistemas LTI.

Ejemplo:



2. Caracterización de los sistemas LTI discretos: la suma de convolución

Caracterizar un sistema: si para cada entrada podemos calcular la salida del sistema.

Vamos a buscar un procedimiento análogo al álgebra de espacios vectoriales:

Vectores de la base: $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \mathbf{x_4}\}$
Cualquier vector del espacio vectorial se podrá poner como cierta combinación lineal de los vectores de la base:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x_1} + \alpha_2 \mathbf{x_2} + \alpha_3 \mathbf{x_3} + \alpha_4 \mathbf{x_4}.$$

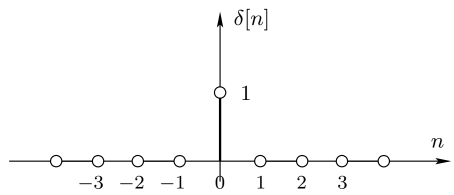
De forma similar, si el sistema es lineal, puedo obtener la salida como la misma combinación lineal de las salidas conocidas para cada uno de los vectores de la base, $\mathbf{y_i}$.

Trataremos a continuación de obtener una base de un espacio para el espacio de las señales, de dimensión infinita[1].

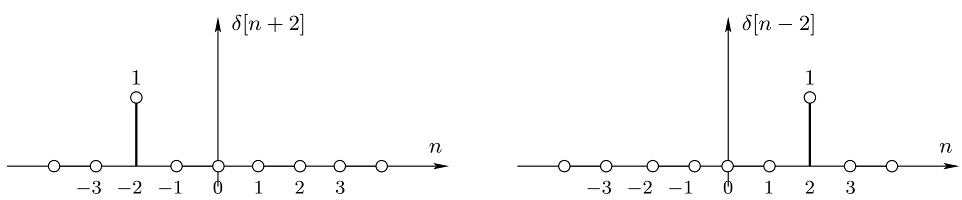
2.1. Representación de señales discretas en términos de impulsos

Utilizaremos como base para las señales discretas el impulso unitario discreto y sus versiones desplazadas, que vale "0" en todos los puntos, salvo en uno, que vale "1".

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

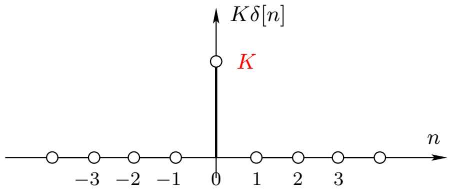


Aplicando desplazamientos en el tiempo:

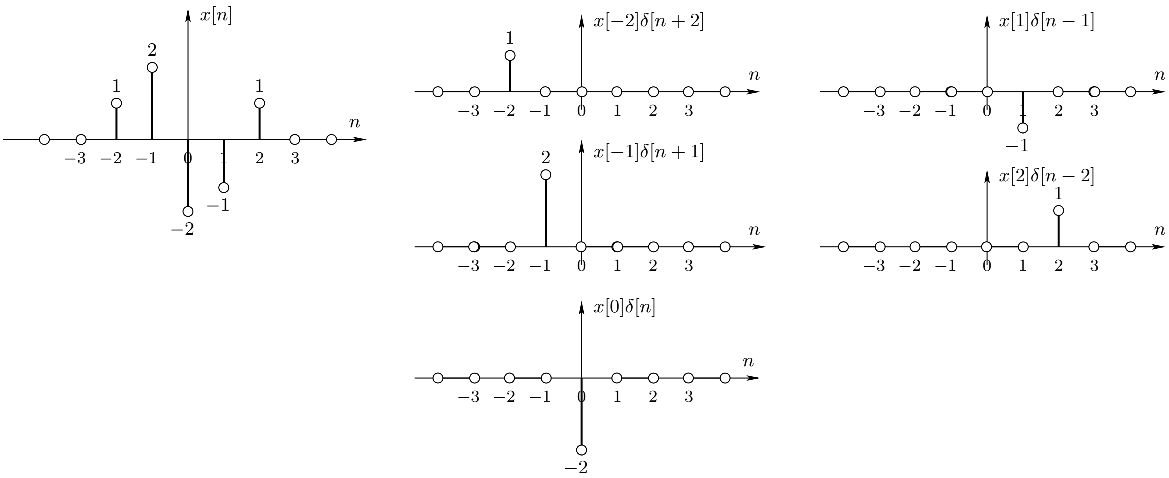


[1]Las señales tienen una longitud infinita, o valores en un conjunto infinito de instantes de la variable independiente.

y cambios de nivel:



podemos escribir cualquier señal $x[n]$ como combinación lineal de impulsos desplazados:



$$x[n] = x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2].$$

En general, podemos representar una señal discreta arbitraria como combinación lineal de impulsos desplazados $\delta[n-k]$ con pesos $x[k]$:

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]}$$

Propiedad de selección de $\delta[n]$.

Ejemplo: escalón unitario, $u[n]$:

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n \geq 0. \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k].$$

Expresión ya conocida.

2.2. Respuesta al impulso unitario discreto y representación de la suma de convolución de sistemas LTI

A partir de la propiedad de selección del impulso unitario, podemos obtener la salida de un sistema LTI aprovechando las propiedades de **linealidad** e **invarianza en el tiempo**.

Consideramos un **sistema lineal** (posiblemente variante en el tiempo).

Una entrada arbitraria, $x[n]$, la podemos poner siempre como combinación lineal de impulsos desplazados:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k].$$

Definimos $h_k[n]$ como la salida del sistema cuando la entrada es un impulso unitario colocado en el instante $n = k$:

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{Lineal}} \longrightarrow h_k[n]$$

Mediante la propiedad de linealidad, la salida del sistema será:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{Lineal}} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

Si, además de ser **lineal**, el sistema es **invariante en el tiempo**: $h_k[n]$ son versiones desplazadas en el tiempo de la respuesta del sistema LTI al impulso unitario colocado en $n = 0$:

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow h_0[n] \triangleq h[n]$$

$$\delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow h_k[n] = h_0[n-k] = h[n-k]$$

Por tanto, si el sistema es LTI, no es necesario caracterizar el sistema por una familia infinita de señales $h_k[n]$, sino sólo por una señal $h[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow \boxed{\text{LTI}} \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

A $h[n]$ se le denomina **respuesta al impulso de un sistema LTI discreto**.

$$\begin{array}{ccc} \delta[n] & \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow & h[n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Impulso} & & \text{Respuesta} \\ & & \text{al impulso} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Un sistema LTI discreto está completamente caracterizado por su respuesta al impulso.}}$$

A la operación:

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]}$$

se le llama **convolución discreta** o **suma de convolución**.

Para una entrada $x[n]$ cualquiera, la salida de un sistema LTI se obtiene como la convolución de la entrada con $h[n]$:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n].$$

2.3. Propiedades de la convolución discreta

La convolución discreta tiene las siguientes propiedades:

1. El **elemento neutro** de la convolución es el impulso unitario, $\delta[n]$:

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n].$$

2. **Conmutativa**:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n].$$

$$x[n] \to \boxed{h[n]} \to y[n] \;\Leftrightarrow\; h[n] \to \boxed{x[n]} \to y[n]$$

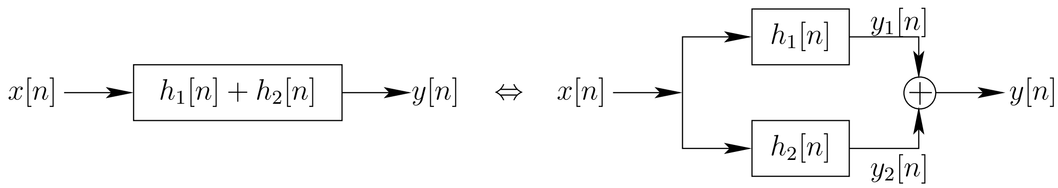
3. **Asociativa**:

$$x[n]*(h_1[n]*h_2[n]) = (x[n]*h_1[n])*h_2[n] = (x[n]*h_2[n])*h_1[n] = x[n]*h_1[n]*h_2[n].$$

$$x[n] \to \boxed{h_1[n] * h_2[n]} \to y[n] \;\Leftrightarrow\; x[n] \to \boxed{h_1[n]} \to \boxed{h_2[n]} \to y[n]$$

4. **Distributiva**:

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n].$$



Las equivalencias se cumplen cuando los pasos intermedios dan resultados finitos.

Por tanto, **la convolución discreta tiene estructura de grupo conmutativo**.

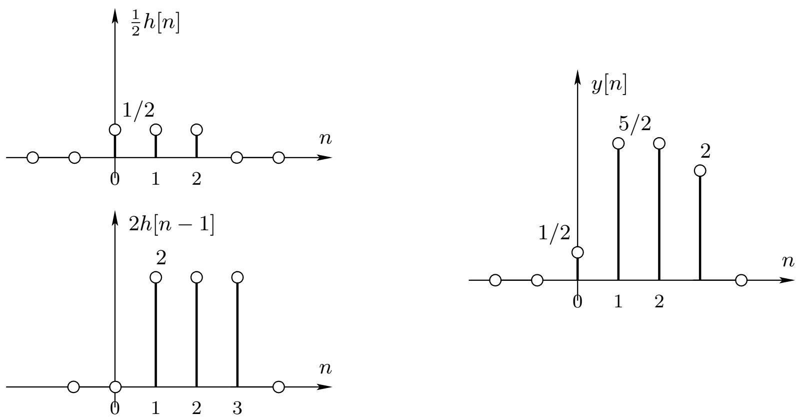
2.4. Ejemplos

Ver transparencias.

Ejemplo 1:

$$x[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + 2\delta[n-1], \quad h[n] = u[n] - u[n-3].$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1] = \frac{1}{2}h[n] + 2h[n-1].$$



Muchas veces es más fácil hacerlo de **forma gráfica**. Para ello, se representa $x[k]$ y $h[n-k]$ como función de k, para cada valor de n.

La salida para cada n se obtiene multiplicando $x[k]h[n-k]$ en cada punto k y sumando los valores.

Se pueden agrupar varios valores de n en intervalos cuando $x[k]$, $h[n-k]$ y los límites del sumatorio tienen una misma expresión.

Para obtener $h[n-k]$:

1. Se cambia la variable independiente a k: $h[k]$.
2. Se desplaza n muestras hacia la izquierda: $h[k+n]$.
3. Se realiza una inversión en el tiempo (en k): $h[-k+n] = h[n-k]$.

Ejemplo 2:

$$\begin{aligned} x[n] =& \alpha^n u[n], \qquad && \alpha \neq \beta, \\ h[n] =& \beta^n u[n], \qquad && 0 < \alpha, \beta < 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}, \quad h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Ejemplo 4:

$$x[n] = 2^n u[-n], \quad h[n] = u[n].$$

Ejemplo 5:

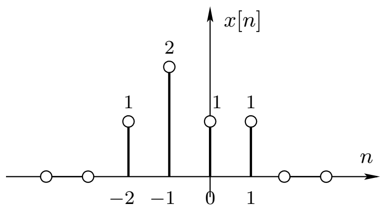
$$x[n] = u[n] - u[n-6], \quad h[n] = u[n-2] - u[n-8] + u[n-11] - u[n-17].$$

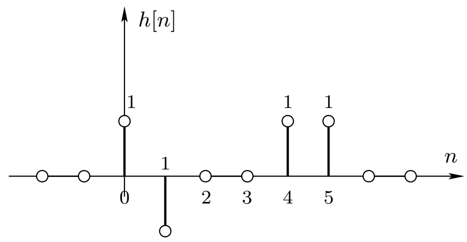
Otra forma de hacerlo, sería teniendo en cuenta que: $h[n] = h_0[n-2] + h_0[n-11]$, donde $h_0[n] = x[n]$.

$$\begin{aligned} y[n] =& x[n] * h[n] = x[n] * (h_0[n-2] + h_0[n-11]) \\ =& x[n] * h_0[n-2] + x[n] * h_0[n-11] = y_0[n-2] + y_0[n-11], \end{aligned}$$

donde $y_0[n] = x[n] * h_0[n]$. De esta forma hay que realizar menos operaciones para obtener el resultado.

Ejemplo 6:





2.5. Longitud de la convolución discreta

Si $x[n]$ es no nulo entre $n_{x1} \leq n \leq n_{x2}$,

y $h[n]$ es no nulo entre $n_{h1} \leq n \leq n_{h2}$,

$y[n]$ tomará valores no nulos entre:

$$\boxed{n_{x1} + n_{h1} \leq n \leq n_{x2} + n_{h2}.}$$

Usando otra notación: Si $x[n]$ es no nulo entre $n_x \leq n \leq n_x + N_x - 1$, (longitud N_x)

y $h[n]$ es no nulo entre $n_h \leq n \leq n_h + N_h - 1$, (longitud N_h)

$y[n]$ tomará valores no nulos entre:

$$\boxed{n_x + n_h \leq n \leq n_x + n_h + N_x + N_h - 2.}$$

La longitud de la señal de salida es:

$$\boxed{N_y = N_x + N_h - 1.}$$

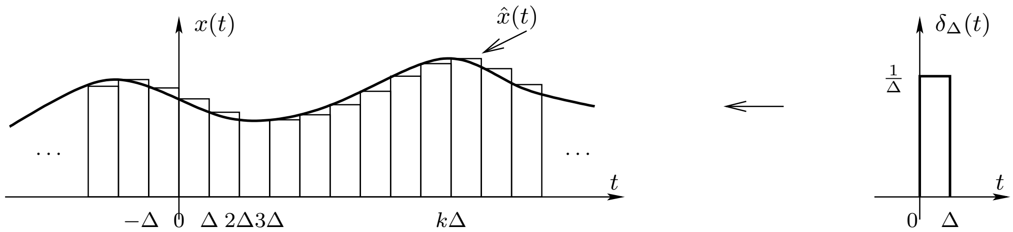
3. Caracterización de los sistemas LTI continuos: la integral de convolución

Al igual que en el apartado anterior, tratamos de caracterizar los sistemas LTI continuos en términos de su respuesta al impulso unitario.

3.1. Representación de señales continuas en términos de impulsos

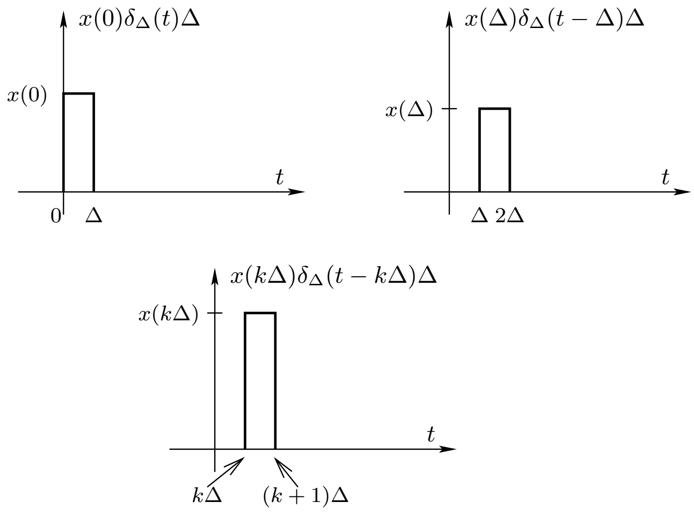
La deducción es similar al caso discreto, pero algo más complicada.

Aproximamos la función $x(t)$ por pulsos rectangulares, obteniendo $\hat{x}(t)$:



$\hat{x}(t)$ se puede poner, al igual que en el caso discreto, como una combinación lineal de pulsos retrasados:

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t < \Delta, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$



Para cualquier instante de tiempo, sólo hay un pulso no nulo.

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta.$$

Cuanto menor sea Δ, mejor será la aproximación. En el límite:

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0} \hat{x}(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta.$$

En el límite:

$$\Delta \to 0: \qquad \begin{cases} \Delta \to d\tau, \\ k\Delta \to \tau, \\ \sum \to \int, \\ \delta_{\Delta}(t) \to \delta(t). \end{cases}$$

Por tanto, se obtiene:

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau} \qquad \textbf{Propiedad de selección de } \delta(t)\textbf{.}$$

Ejemplo: escalón unitario, $u(t)$:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad u(t) = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cv: } t-\tau=\lambda}}{=} \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)d\lambda.$$

Expresión ya conocida.

3.2. Respuesta al impulso unitario continuo y representación de la integral de convolución de sistemas LTI

Al igual que en el caso discreto, las expresiones anteriores nos permiten obtener la salida de un sistema LTI aprovechando las propiedades de **linealidad** e **invarianza en el tiempo**.

Consideramos un **sistema lineal** (posiblemente variante en el tiempo).

Una entrada arbitraria, $x(t)$, la podemos aproximar mediante la señal $\hat{x}(t)$, que podemos poner siempre como combinación lineal de aproximaciones a la delta desplazadas:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)\Delta.$$

Definimos $h_{k\Delta}(t)$ como la salida del sistema cuando la entrada es $\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$, colocado en el instante $t = k\Delta$:

$$\delta_\Delta(t-k\Delta) \longrightarrow \boxed{\text{Lineal}} \longrightarrow h_{k\Delta}(t)$$

Mediante la propiedad de linealidad, la salida del sistema será:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta \longrightarrow \boxed{\text{Lineal}} \longrightarrow \hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_{k\Delta}(t)\Delta$$

Conforme $\Delta \to 0$, $\hat{x}(t) \to x(t) \;\Rightarrow\; \hat{y}(t) \to y(t)$:

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0} \hat{x}(t) \;\Rightarrow\; y(t) = \lim_{\Delta\to 0} \hat{y}(t).$$

Por tanto, para un sistema lineal, la salida será:

$$y(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_{k\Delta}(t)\Delta,$$

y haciendo las transformaciones indicadas anteriormente en el límite:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_\tau(t)d\tau.$$

Si, además de ser **lineal**, el sistema es **invariante en el tiempo**: $h_\tau(t)$ son versiones desplazadas en el tiempo de la respuesta del sistema LTI al impulso unitario colocado en $t=0$:

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow h_0(t) \stackrel{\Delta}{=} h(t)$$

$$\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow h_\tau(t) = h_0(t-\tau) = h(t-\tau)$$

Por tanto, si el sistema es LTI, no es necesario caracterizar el sistema por una familia infinita de señales $h_\tau(t)$, sino sólo por una señal $h(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \to \boxed{\text{LTI}} \to y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

A $h(t)$ se le denomina **respuesta al impulso de un sistema LTI continuo**.

$$\begin{array}{ccc} \delta(t) & \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow & h(t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Impulso} & & \text{Respuesta} \\ & & \text{al impulso} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Un sistema LTI continuo está completamente caracterizado por su respuesta al impulso.}}$$

A la operación:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)}$$

se le llama **convolución continua** o **integral de convolución**.

Para una entrada $x(t)$ cualquiera, la salida de un sistema LTI se obtiene como la convolución de la entrada con $h(t)$:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t).$$

3.3. Propiedades de la convolución continua

La convolución continua, al igual que la discreta, tiene las siguientes propiedades:

1. El **elemento neutro** de la convolución es el impulso unitario, $\delta(t)$:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\tau) = x(t).$$

2. **Conmutativa**:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t).$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) \;\Leftrightarrow\; h(t) \rightarrow \boxed{x(t)} \rightarrow y(t)$$

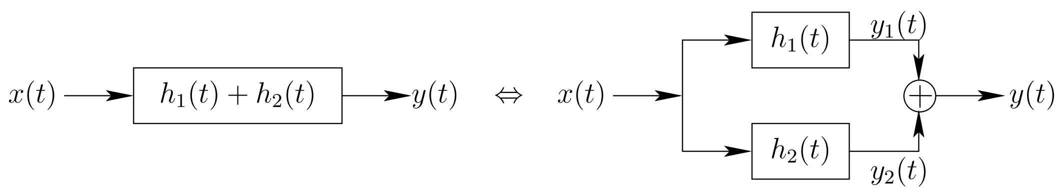
3. **Asociativa**:

$$x(t)*(h_1(t)*h_2(t)) = (x(t)*h_1(t))*h_2(t) = (x(t)*h_2(t))*h_1(t) = x(t)*h_1(t)*h_2(t).$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h_1(t) * h_2(t)} \rightarrow y(t) \;\Leftrightarrow\; x(t) \rightarrow \boxed{h_1(t)} \rightarrow \boxed{h_2(t)} \rightarrow y(t)$$

4. **Distributiva**:

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t).$$



Las equivalencias se cumplen cuando los pasos intermedios dan resultados finitos.

Por tanto, **la convolución continua tiene estructura de grupo conmutativo**.

3.4. Ejemplos

Ver transparencias.

Ejemplo 1:

$$x(t) = e^{-at}u(t),\ a > 0, \quad h(t) = u(t).$$

Ejemplo 2:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{resto} \end{cases}, \quad h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < T \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Ejemplo 3:

$$x(t) = e^{2t}u(-t), \quad h(t) = u(t-3).$$

4. Propiedades de los sistemas LTI

Hemos visto que para un sistema LTI su respuesta al impulso caracteriza completamente el sistema, por lo que sus propiedades se pueden deducir a partir de la misma. Esto no es cierto para sistemas no LTI.

Ejemplo: $h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$

- si es LTI: $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = x[n] + x[n-1]$
  Sabemos como están relacionadas entrada y salida exactamente.
- Si no es LTI, esto no es cierto. Ejemplo de sistema con esta respuesta al impulso no lineal:
  $$y[n] = (x[n] + x[n-1])^2.$$

Por tanto, para un sistema LTI podremos estudiar todas las propiedades del sistema a partir de $h[n]$ ó $h(t)$.

En primer lugar, dado que la salida se obtiene mediante la convolución, los sistemas LTI tienen las propiedades de la convolución:

- **Elemento neutro**: la salida correspondiente a un impulso unitario es la respuesta al impulso del sistema.
  $$\delta[n] * h[n] = h[n],$$
  $$\delta(t) * h(t) = h(t).$$
  Por tanto, si a un sistema se le mete como entrada un impulso unitario, a la salida obtenemos la respuesta al impulso del sistema.
  $$\delta[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow h[n]$$

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow h(t)$$

- **Conmutativa**: la salida del sistema no cambia si se intercambian entrada y respuesta al impulso.

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \qquad\qquad x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

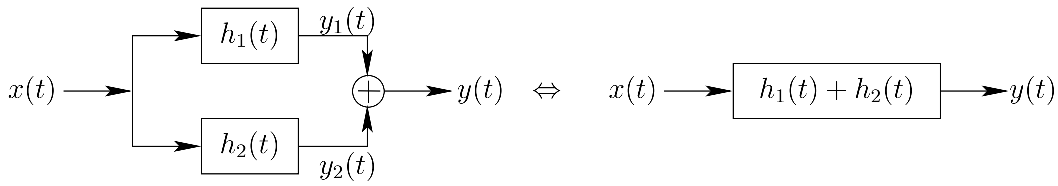
$$\begin{array}{ccc} x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n] & \qquad & x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ h[n] \rightarrow \boxed{x[n]} \rightarrow y[n] & & h(t) \rightarrow \boxed{x(t)} \rightarrow y(t) \end{array}$$

Esto permite invertir y desplazar la función más simple al calcular las convoluciones de forma gráfica.

- **Distributiva**: interconexión de varios sistemas en paralelo.

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



Como consecuencia de las propiedades conmutativa y distributiva:

$$(x_1[n] + x_2[n]) * h[n] = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n],$$

$$(x_1(t) + x_2(t)) * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t).$$

Esto permite descomponer una convolución complicada en varias más sencillas.

- **Asociativa**: interconexión de varios sistemas en serie.

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]),$$

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)).$$

Es decir, que sobran los paréntesis, pues da igual el orden en que se realicen las convoluciones:

$$y[n] = x[n] * h_1[n] * h_2[n],$$

$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t).$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \xrightarrow{w[n]} \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$\Updownarrow$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n] = h_1[n] * h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$\Updownarrow$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \xrightarrow{v[n]} \boxed{h_1[n]} \longrightarrow y[n]$$

Para sistemas LTI da igual el orden en que se conecten. Esto no es cierto para sistemas no LTI, como por ejemplo:

$$x(t) \to \boxed{2(\cdot)} \to \boxed{(\cdot)^2} \to 4x^2(t),$$

$$x(t) \to \boxed{(\cdot)^2} \to \boxed{2(\cdot)} \to 2x^2(t).$$

Estudiamos a continuación el resto de propiedades de los sistemas[2]:

- **Memoria**: un sistema es sin memoria si la salida para cualquier instante depende sólo del valor de la entrada en ese mismo instante:

$$\begin{aligned} y[n_0] = x[n_0] * h[n_0] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n_0-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n_0-k] \\ &= \cancel{\ldots + h[-1]x[n_0+1]} + h[0]x[n_0] + \cancel{h[1]x[n_0-1] + \ldots} = h[0]x[n_0]. \end{aligned}$$

Sin memoria $\Leftrightarrow h[n] = 0, n \neq 0$.

Por tanto un sistema discreto es **sin memoria** si se cumple:

$$\boxed{h[n] = C\delta[n].}$$

De forma equivalente, un sistema continuo es **sin memoria** si se cumple:

$$\boxed{h(t) = C\delta(t).}$$

En caso contrario, el sistema es **con memoria**.

Si $C = 1$, tenemos el **sistema identidad**:

$$h[n] = \delta[n],$$

$$h(t) = \delta(t).$$

[2] Salvo las propiedades de linealidad e invarianza en el tiempo, que las tienen los sistemas LTI por definición.

Obteniendo la salida para estos sistemas, se llega a las propiedades de selección de los impulsos unitarios, ya vistas:

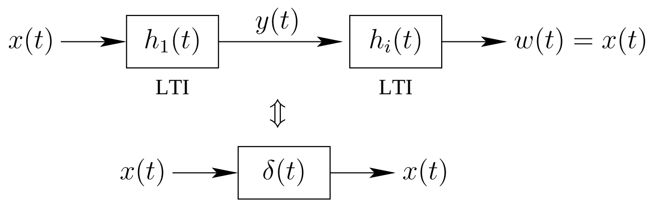
$$x[n] = x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-k],$$

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau).$$

Como ya sabemos, $\delta[n]$ y $\delta(t)$ son los elementos neutros de la convolución discreta y continua, respectivamente.

- **Invertibilidad**: una de las definiciones de sistema invertible dice que existe un sistema inverso que colocado en cascada con el original produce una salida idéntica a la entrada del sistema original.

  Se puede comprobar que $\boxed{\text{el sistema inverso de uno LTI es LTI.}}$



Por tanto, usando la propiedad asociativa, si un sistema es invetible, las respuestas al impulso de los dos sistemas cumplen:

$$\boxed{\begin{aligned} h[n] * h_i[n] &= \delta[n], \\ h(t) * h_i(t) &= \delta(t). \end{aligned}}$$

Nota: estas expresiones permiten comprobar si dos sistemas son inversos entre sí, pero no dan directamente un método constructivo de obtención de sistemas inversos[3].

Ejemplo: $y(t) = x(t - t_0)$. Retardo para $t_0 > 0$ y adelanto par $t_0 < 0$.

Como dijimos, la respuesta al impulso se obtiene metiendo como entrada al sistema $x(t) = \delta(t)$, obteniendo:

$$h(t) = \delta(t - t_0).$$

La salida para una determinada entrada se obtiene convolucionándola con la respuesta al impulso del sistema:

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0).$$

[3] Haciendo uso de la transformada de Fourier o de la transformada Z, sí se obtendrá un método constructivo de obtención de sistemas inversos.

Vemos aquí algo importante y es que la convolución con un impulso desplazado desplaza la señal:

$$\boxed{x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0).}$$

Esto es fácil de demostrar:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta((t-\tau)-t_0)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau = x(t-t_0), \end{aligned}$$

ya que esta última expresión corresponde a la propiedad de selección del impulso unitario continuo evaluada en $t - t_0$.

En el caso discreto, se puede demostrar la misma propiedad:

$$\boxed{x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0].}$$

Volviendo al ejemplo, el sistema inverso será el desplazamiento contrario:

$$h_i(t) = \delta(t + t_0).$$

Calculando su convolución con $h(t)$:

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t).$$

Ejemplo: $h[n] = u[n]$.

Obteniendo la salida para una entrada cualquiera, mediante la convolución con $h[n]$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k],$$

$$u[n-k] = \begin{cases} 0, & n-k < 0 \to k > n, \\ 1, & n-k \geq 0 \to k \leq n. \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k].$$

Por tanto, es el sistema sumador o acumulador, cuyo sistema inverso ya conocemos y es la primera diferencia:

$$w[n] = y[n] - y[n-1].$$

La respuesta al impulso del sistema inverso se obtiene metiendo el impulso unitario al sistema inverso:

$$h_i[n] = \delta[n] - \delta[n-1].$$

Comprobamos:

$$h[n]*h_i[n] = u[n](\delta[n]-\delta[n-1]) = u[n]*\delta[n]-u[n]*\delta[n-1] = u[n]-u[n-1] = \delta[n].$$

- **Causalidad**: el sistema es causal y la salida depende sólo de valores pasados y presentes de la entrada y anticausal si la salida depende sólo de valores futuros de la entrada:

$$\begin{aligned} y[n_0] = x[n_0] * h[n_0] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n_0 - k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n_0 - k] \\ &= \ldots + h[-1]x[n_0 + 1] + h[0]x[n_0] + h[1]x[n_0 - 1] + \ldots \end{aligned}$$

  El sistema será **causal** si se cumple:

$$\boxed{\begin{aligned} h[n] = 0,\ \forall n < 0, \\ h(t) = 0,\ \forall t < 0. \end{aligned}}$$

  El sistema será **anticausal** si se cumple:

$$\boxed{\begin{aligned} h[n] = 0,\ \forall n \geq 0, \\ h(t) = 0,\ \forall t \geq 0. \end{aligned}}$$

  En caso de no cumplirse ninguna de estas condiciones, el sistema es **no causal**.

  Para sistemas causales, la suma e integral de convolución quedan:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k],$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau,$$

  Las últimas expresiones se obtienen haciendo los cambios de variable $k' = n - k$ y $\tau' = t - \tau$, respectivamente.

  Ejemplos:

  - Acumulador: $h[n] = u[n]$ y su inverso: $h_i[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ son causales.
  - Desplazamiento: $h(t) = \delta(t - t_0)$ es causal para $t_0 \geq 0$ y anticausal para $t_0 < 0$.

  Por analogía, teniendo en cuenta que $h[n]$ y $h(t)$ se pueden considerar señales, se habla de **señales causales** (también anticausales y no causales):

$$\boxed{\begin{aligned} x[n] = 0,\ \forall n < 0, \\ x(t) = 0,\ \forall t < 0. \end{aligned}}$$

- **Estabilidad**: un sistema es estable si entradas acotadas producen salidas acotadas.

$$\text{Si } |x[n]| < B_x,\ \forall n \ \Rightarrow\ |y[n]| < B_y,\ \forall n.$$

Si a un sistema LTI discreto le metemos una entrada acotada, la magnitud de la salida:

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right| \underset{|a+b|\leq|a|+|b|}{\underset{\uparrow}{\leq}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|,$$

donde hemos aplicado la desigualdad triangular. Como:

$$|x[n-k]| < B_x,\ \forall n,k \quad \Rightarrow \quad |y[n]| < B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|,\ \forall n.$$

Si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$, es decir, si $h[n]$ es absolutamente sumable, entonces el sistema es estable:

$$|y[n]| < B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < B_y,\ \forall n.$$

Por tanto, un **sistema LTI discreto es estable** si su respuesta al impulso, $h[n]$, es absolutamente sumable:

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty.}$$

De forma equivalente se obtiene que **un sistema LTI continuo es estable** si su respuesta al impulso, $h(t)$, es absolutamente integrable:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty.}$$

Ejemplos:

- Desplazamiento en el tiempo: $h[n] = \delta[n-n_0]$, $h(t) = \delta(t-t_0)$. Son sistemas estables:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta[k-n_0]| = 1 < \infty.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau = \int_{k=-\infty}^{\infty} |\delta(\tau-t_0)|d\tau = 1 < \infty.$$

- Acumulador: $h[n] = u[n]$. Sistema no estable:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty.$$

- Integrador: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$. Obteniendo su respuesta al impulso (es LTI):

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

. Comprobamos que es un sistema no estable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau = \int_{0}^{\infty} d\tau = \infty.$$

- **Respuesta al escalón unitario**: al igual que la respuesta al impulso, la respuesta al escalón también caracteriza a los sistemas LTI, y se usa con bastante frecuencia para describir el comportamiento de este tipo de sistemas.

  La respuesta al escalón se denota $s[n]$ para el caso discreto y $s(t)$ para el caso continuo, y son las salidas cuando las entradas son escalones, $u[n]$ y $u(t)$, respectivamente:

$$u[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow s[n]$$

$$u(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow s(t)$$

  Realizando las convoluciones del escalón unitario con la respuesta al impulso del sistema, es fácil obtener la relación entre la respuesta al escalón y la respuesta al impulso. Para el caso discreto:

$$s[n] = u[n] * h[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k],$$

  que corresponde a la operación de sumación, y cuya operación inversa sabemos que es la primera diferencia. Por tanto las relaciones buscadas son las siguientes:

$$\boxed{\begin{aligned} s[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} h[k], \\ h[n] &= s[n] - s[n-1]. \end{aligned}}$$

  Para el caso continuo, de forma similar:

$$s(t) = u(t) * h(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau.$$

  que corresponde a la operación de integración, y cuya operación inversa sabemos que es la derivación. Por tanto las relaciones buscadas en el caso continuo son:

$$\boxed{\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau, \\ h(t) &= \frac{ds(t)}{dt} = s'(t). \end{aligned}}$$

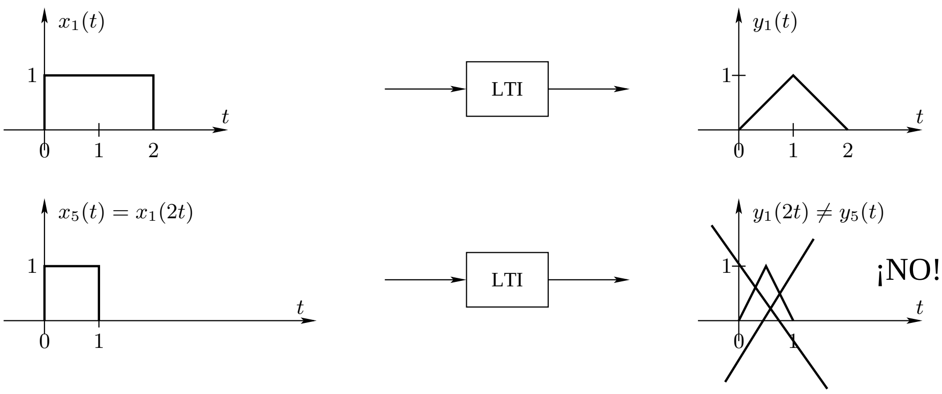
Otra forma de obtener estas relaciones es, teniendo en cuenta que el derivador (primera diferencia) es un sistema LTI, y aplicando la propiedad conmutativa:

$$u(t) \rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \rightarrow \delta(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow h(t)$$

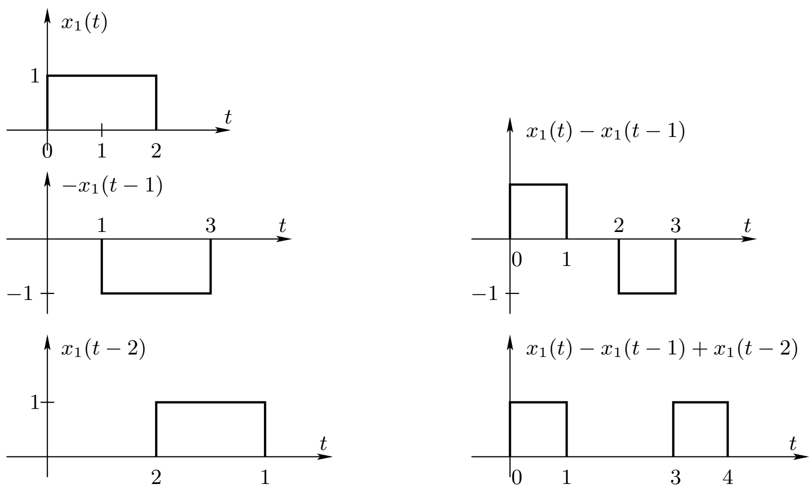
$$\Updownarrow$$

$$u(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow s(t) \rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \rightarrow h(t)$$

Ejemplo:



Para calcular la salida debemos usar únicamente desplazamientos y cambios de nivel sobre la entrada conocida, dado que sólo conocemos la salida correspondiente a $x_1(t)$ y que el sistema es LTI. Si vamos sumando y restado sucesivas veces $x_1(t)$ y versiones desplazadas entre sí 1 segundo:



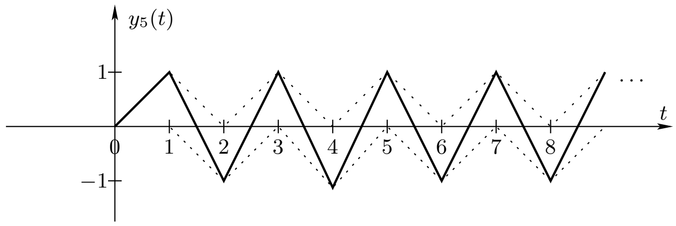
Se observa que aparece el pulso deseado en el origen correspondiente a la entrada $x_5(t)$, cuya salida queremos obtener, y un pulso que a medida que sumamos nuevas réplicas va alejándose cada vez más de donde $x_5(t)$ es no nulo. Si sumáramos infinitas réplicas de esta forma, obtenemos la señal $x_5(t)$:

$$x_5(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k x_1(t-k),$$

y como el sistema es LTI, la salida será la misma combinación lineal de salidas desplazadas:

$$y_5(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k y_1(t-k),$$

cuya representación es:



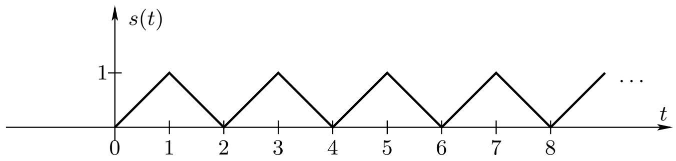
Otra forma de enfocar el problema es obtener el escalón unitario, $u(t)$ a partir de la entrada, y realizando las mismas operaciones a la salida, obtener la respuesta al escalón, $s(t)$, que sabemos que también caracteriza al sistema:

$$u(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} x_1(t-2k).$$

La respuesta al escalón unitario:

$$s(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} y_1(t-2k),$$

cuya representación es:



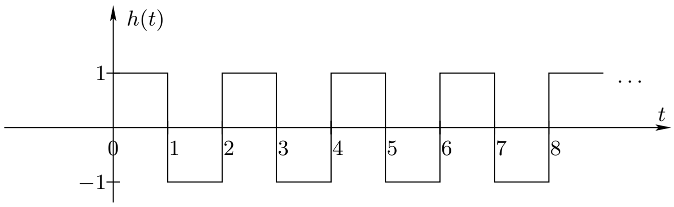
Una vez obtenido $s(t)$ tenemos dos opciones:

- Obtener $x_5(t)$ en términos de escalones y a la salida tendremos la misma relación con $s(t)$, al ser el sistema LTI:

$$x_5(t) = u(t) - u(t-1) \;\Rightarrow\; y_5(t) = s(t) - s(t-1).$$

- Obtener la respuesta al impulso derivando la respuesta al escalón, y obtener la salida mediante la convolución:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt},$$



$$y_5(t) = x_5(t) * h(t).$$

5. Sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales y en diferencias

Una clase muy importante de sistemas es aquella para la cual la entrada y la salida están relacionadas mediante una **ecuación diferencial** (continuos) o **en diferencias** (discretos) **lineal y de coeficientes constantes**. Ya vimos algunos ejemplos en el tema 2.

Proporcionan una especificación implícita del sistema, es decir, una relación entre la entrada y la salida, en vez de una expresión explícita de la salida en función de la entrada. Para obtener la relación explícita será necesario resolver la ecuación.

Para caracterizar completamente los sistemas, además será necesario especificar unas condiciones iniciales o auxiliares (carga o velocidad en $t = 0$ en los ejemplos), de forma que podamos resolver las ecuaciones. Así, distintas condiciones iniciales darán lugar a distintas relaciones entre la entrada y la salida del sistema.

La condición más habitual será la de que el sistema LTI dado por una ecuación diferencial o en diferencias sea **causal**, en cuyo caso la **condición auxiliar es la de reposo inicial**:

Condición de reposo inicial $\Leftrightarrow$ LTI+Causal:
Si $x(t) = 0,\ t \leq t_0 \ \Rightarrow\ y(t) = 0,\ t \leq t_0$.

Las condición auxiliar serán $y(t_0) = 0$ para obtener $y(t)$ para $t > t_0$. Esto indica que la salida es nula hasta que la entrada deje de ser nula (como corresponde a un sistema lineal y causal).

Nota: normalmente se toma $t_0 = 0$, pero si se desplaza la entrada, se debe desplazar t_0, pues si no, el sistema no sería invariante en el tiempo[4]. Lo que importa para que el sistema sea LTI y causal es que la salida es nula mientras la entrada lo sea.

[4]Esto se veía por ejemplo en el ejercicio 12l, donde la salida era nula para $t < 0$, independientemente de que se desplace la entrada, lo que convertía al sistema en variante en el tiempo.

5.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de orden N tiene la forma:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}.}$$

El orden de la ecuación corresponde a la derivada de mayor orden de la salida.

Para que el sistema sea **causal y LTI**, las condiciones auxiliares son las de **reposo inicial**. Para resolver una ecuación diferencial de orden N hacen falta N condiciones auxiliares:

$$\text{Si } x(t) = 0,\ t \leq t_0 \Rightarrow y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \frac{d^2 y(t_0)}{dt^2} = \cdots = \frac{d^{N-1} y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0.$$

Como sabemos, la solución a este tipo de ecuaciones es la suma de una solución particular (o forzada) y una solución homogénea (o natural)[5]:

$$\boxed{y(t) = y_p(t) + y_h(t),}$$

donde:

- $y_p(t)$: toma la misma forma que la entrada (respuesta forzada).
- $y_h(t)$: es el resultado de resolver la ecuación diferencial homogénea (respuesta natural del sistema):
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0.$$

Un caso especialmente sencillo es cuando $N = 0$. En este caso no hace resolver la ecuación, pues ya tenemos una relación explícita para la salida en función de la entrada (no son necesarias por tanto condiciones auxiliares):

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}.$$

Ejemplo: ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t). \qquad \text{Entrada: } x(t) = K e^{3t} u(t).$$

Como hemos visto la solución se puede obtener como suma de la solución particular para la entrada más la solución homogénea:

[5]En temas posteriores veremos mejores formas de resolver ecuaciones diferenciales, mediante el uso de la transformada de Fourier y la transformada de Laplace.

- $y_p(t)$: como $x(t) = Ke^{3t}$ para $t > 0$, planteamos una salida para $t > 0$ similar:

  $$y(t) = Ye^{3t},\ t > 0, \qquad Y \text{ es la constante que hay que determinar.}$$

  Sustituyendo en la ecuación diferencial para $t > 0$:

  $$3Y\cancel{e^{3t}} + 2Y\cancel{e^{3t}} = K\cancel{e^{3t}} \ \Rightarrow\ Y = \frac{K}{5}.$$

  Por tanto, la solución particular es:

  $$y_p(t) = \frac{K}{5}e^{3t},\ t > 0.$$

- $y_h(t)$: planteamos una solución de la forma:

  $$y_h(t) = Ae^{st}.$$

  Sustituyendo en la ecuación homogénea:

  $$s\cancel{Ae^{st}} + 2\cancel{Ae^{st}} = 0 \ \Rightarrow\ s = -2,\ \forall A.$$

Por tanto, para $t > 0$, la solución, a falta de determinar la constante A, queda:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \frac{K}{5}e^{3t} + Ae^{-2t},\ t > 0.$$

Para determinar la constante A empleamos la condición de reposo inicial:

$$\text{Si } x(t) = 0,\ t < 0 \ \Rightarrow\ y(t) = 0,\ t < 0 \ \Rightarrow\ y(0) = 0.$$

Sustituyendo:

$$y(0) = 0 = \frac{K}{5} + A \ \Rightarrow\ A = -\frac{K}{5}.$$

Finalmente la solución a la ecuación diferencial, salida del sistema para la entrada $x(t)$ es:

$$\boxed{y(t) = \frac{K}{5}\left[e^{3t} - e^{-2t}\right]u(t).}$$

5.2. Ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes

Una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de orden N tiene la forma:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k].}$$

El orden de la ecuación corresponde a la derivada de mayor orden de la salida.

Para que el sistema sea **causal y LTI**, las condiciones auxiliares son las de **reposo inicial**. Para resolver una ecuación en diferencias de orden N hacen falta N condiciones auxiliares:

$$\text{Si } x[n] = 0,\ n < n_0 \Rightarrow y[n] = 0,\ n < n_0.$$

Se puede resolver de forma similar a la de las ecuaciones diferenciales, poniendo la solución como suma de una solución particular y una solución homogénea:

$$\boxed{y[n] = y_p[n] + y_h[n]}$$

pero normalmente es más sencillo resolverla de otra forma[6]. Reordenando la ecuación y poniéndola en **forma recursiva**:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\}.$$

Esta ecuación se puede resolver de forma recursiva, pues tenemos $y[n]$ en función de valores previos de la entrada y la salida.

Se ve claramente la necesidad de valores auxiliares, pues para obtener $y[n_0]$ hace falta conocer $y[n_0-1], \dots, y[n_0-N]$: N condiciones auxiliares.

Según el orden de la ecuación en diferencias, hay dos tipos de sistemas discretos definidos mediante ecuaciones en diferencias:

- **Sistemas FIR**: $N = 0$. Respuesta al impulso de longitud finita.

  $$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \left(\frac{b_k}{a_0}\right) x[n-k].$$

  Es una ecuación no recursiva, ya que tenemos despejado de forma explícita $y[n]$ en función de las entradas.

  Además, esto se puede ver como la convolución de $x[n]$ con $h[n]$, donde:

  $$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases} = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0}\delta[n-k]$$

  En este caso, la respuesta al impulso es de longitud finita $(M+1)$ y no hacen falta condiciones auxiliares.

- **Sistemas IIR**: $N \ge 1$. Respuesta al impulso de longitud infinita.

  Con las condiciones auxiliares de reposo inicial, $h[n]$ resulta de duración infinita.

[6]Realmente las mejores formas de resolver las ecuaciones en diferencias será mediante la transformada de Fourier y la transformada Z, que veremos en temas posteriores.

Ejemplo: $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$ para la entrada $x[n] = K\delta[n]$ y condición de reposo inicial.

Se puede poner de forma recursiva: $y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$.

La condición de reposo inicial, dado que $x[n] = 0,\ n \leq -1 \ \Rightarrow\ y[n] = 0,\ n \leq -1$. Como $N = 1$, necesitamos una condición inicial, que será:

$$y[-1] = 0.$$

Podemos obtener $y[n],\ n \geq 0$ de forma recursiva:

$$\begin{aligned}
y[0] =& x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = K,\\
y[1] =& x[1] + \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2}K,\\
y[2] =& x[2] + \frac{1}{2}y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 K,\\
&\vdots\\
y[n] =& x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n K.
\end{aligned}$$

Por tanto, $y[n] = K\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

Para $K = 1 \ \Rightarrow\ x[n] = \delta[n]$, obtenemos la respuesta al impulso del sistema, que vemos que corresponde a un sistema IIR y causal:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

6. Representación mediante diagramas de bloques

La representación mediante diagramas de bloques es un método muy sencillo de mostrar sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales y en diferencias.

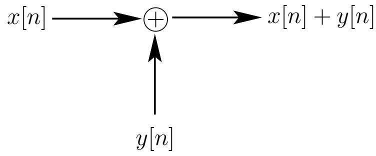
Además permiten una mejor comprensión de los mismos y su simulación mediante ordenador, o su construcción mediante circuitos digitales (en el caso discreto).

6.1. Ecuaciones en diferencias

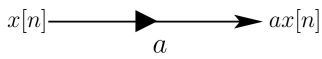
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k].$$

Es necesario representar 4 operaciones básicas:

- Sumador:

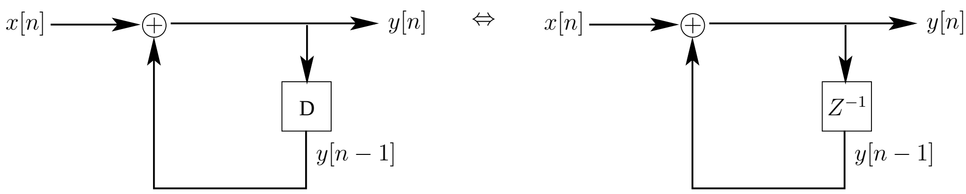


- Multiplicar por constante:



- Retardador (registro o memoria):

- Realimentación: será necesaria para sistemas IIR:



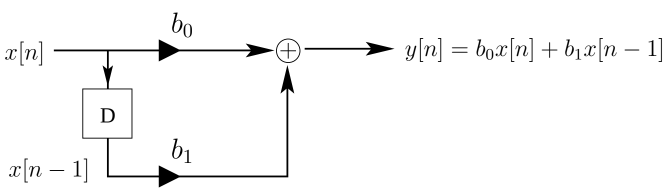
Vamos a ver la representación para sistemas FIR e IIR:

- **FIR**: $y[n] = \sum_{k=0}^{M} \left(\frac{b_k}{a_0}\right) x[n-k]$.

  El caso más sencillo ($M = 1$):

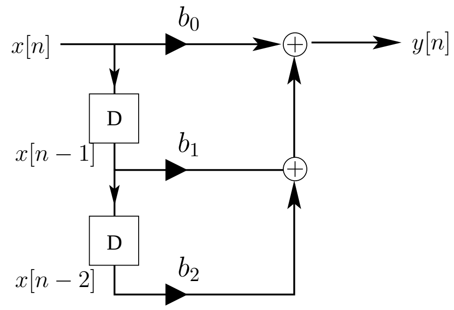
$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1],$$

  se puede representar mediante el siguiente diagrama de bloques:



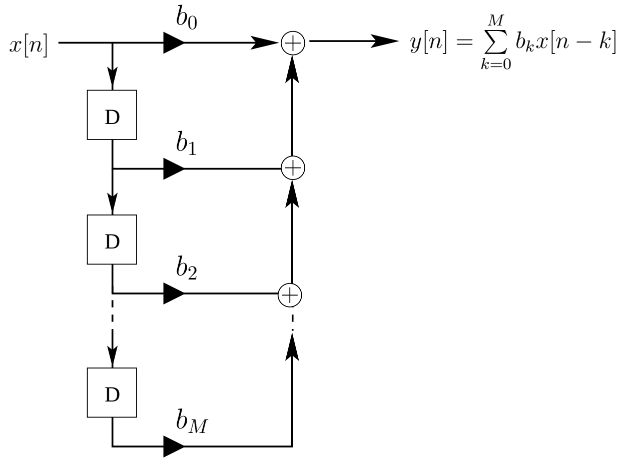
  Si hay otro término ($M = 2$):

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] :$$



En el caso más general, para sistemas FIR:

$$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + \cdots + b_Mx[n-M] :$$



- **IIR**:

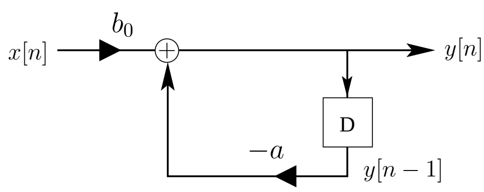
  El caso más sencillo ($N = 1$):

  $$y[n] + ay[n-1] = bx[n].$$

  Poniéndola de forma recursiva:

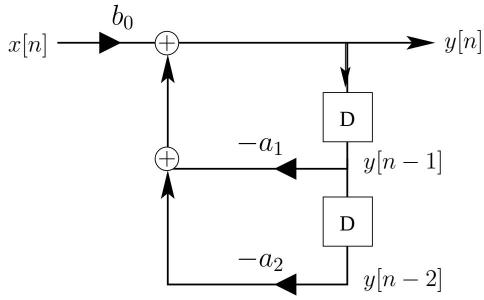
  $$y[n] = -ay[n-1] + bx[n].$$

  que corresponde a un sistema realimentado, y se puede representar mediante el siguiente diagrama de bloques:



  Si hay otro término ($N = 2$):

  $$y[n] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] = bx[n] :$$



y así sucesivamente.

En el caso más general, para sistemas IIR:

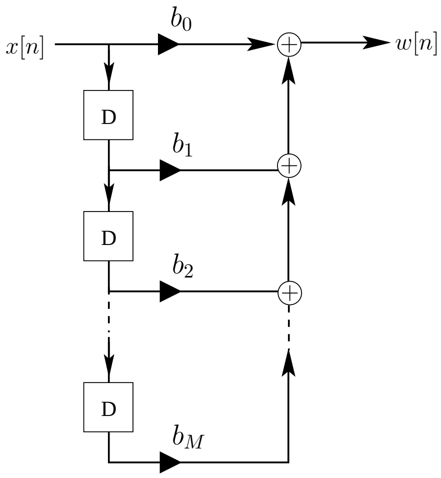
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] = w[n]$$

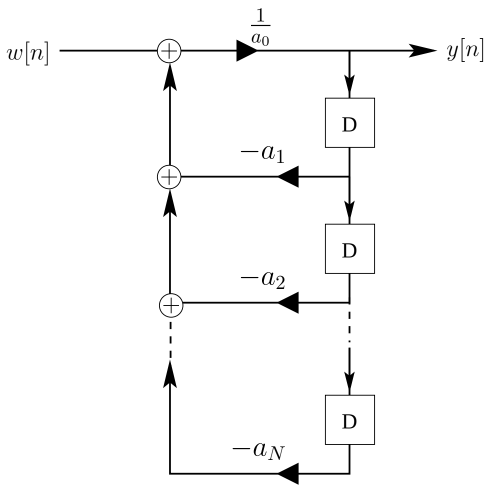
Igualando ambos términos a una señal intermedia, $w[n]$, podemos obtener una ecuación intermedia para la entrada (FIR) y una para la salida (IIR):

$$\text{Entrada: } w[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k],$$

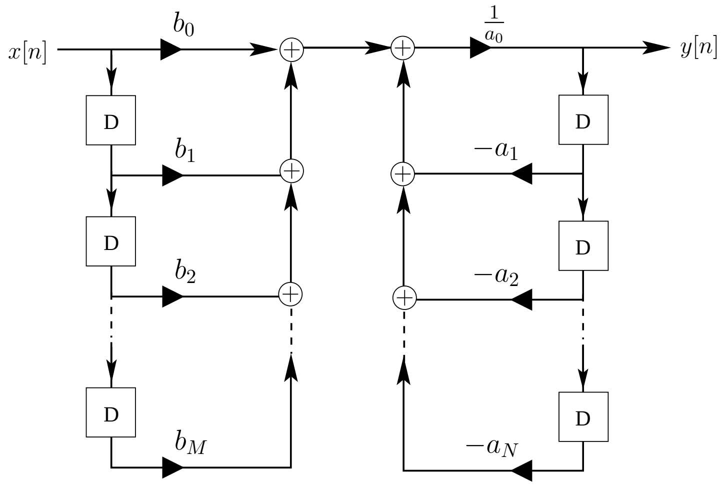
$$\text{Salida en forma recursiva: } y[n] = \frac{1}{a_0}\left[w[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right].$$

Su representación podemos obtenerla colocando en serie los bloques de entrada y salida:



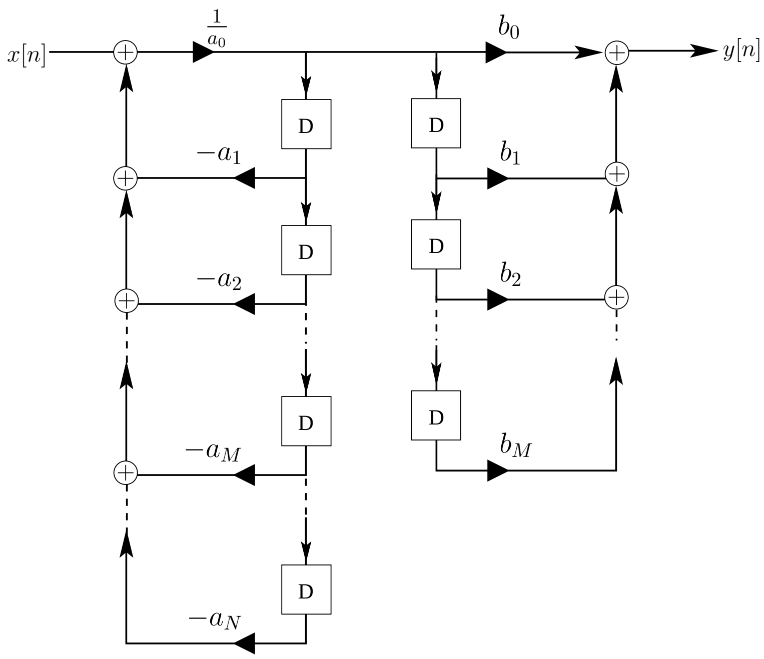


obteniendo la **forma directa I** (FDI):

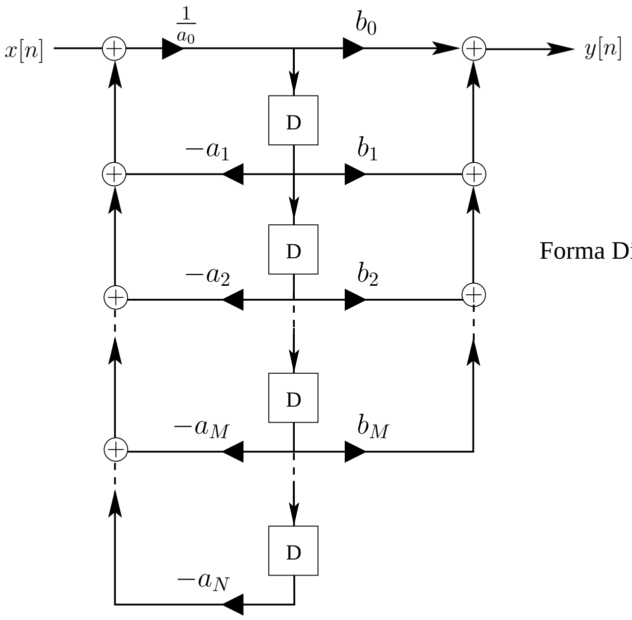


Forma Directa I

Podemos cambiar el orden de los bloques de entrada y salida usando las propiedades conmutativa y asociativa de los sistemas LTI:



dado que los registros operan sobre la misma señal, podemos sustituir cada pareja por uno sólo, obteniendo la **forma directa II**:



Forma Directa II

6.2. Ecuaciones diferenciales

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}.$$

Los derivadores son complicados de implementar en la práctica y muy sensibles a errores y ruido[7]. Lo que se hace es integrar sucesivas veces y transformar las derivadas en integrales, que sí se pueden construir de forma sencilla en la práctica, mediante amplificadores operacionales.

Integrando N veces (suponemos $N = M$):

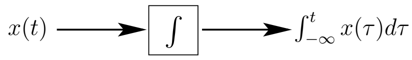
$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \int_{(k)} y(t)dt = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \int_{(k)} x(t)dt,$$

donde:

$$\alpha_k = a_{N-k},$$
$$\beta_k = b_{N-k},$$
$$\int_{(0)} y(t)dt = y(t),$$
$$\int_{(k)} y(t)dt = \int_{-\infty}^{t} \left[\int_{-\infty}^{\tau_k} \cdots \left[\int_{-\infty}^{\tau_2} y(\tau_1)d\tau_1 \right] \cdots d\tau_{k-1} \right] d\tau_k.$$

En el caso de ecuaciones diferenciales, en lugar de registros, los elementos que poseen memoria serán los integradores, que representamos:

[7]Sabemos que un derivador es un sistema no estable.



La condición inicial en este caso queda clara obteniendo la integral desde un cierto instante inicial t_0:

$$\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} y(\tau)d\tau.$$

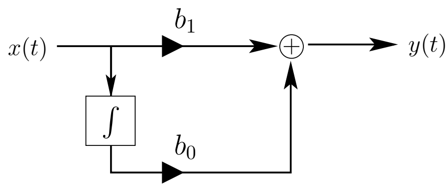
Vamos a ver algún caso particular sencillo:

- Sistema sin realimentación: $\frac{dy(t)}{dt} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt}$.

  En forma integral:

  $$y(t) = b_0 \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau + b_1 x(t),$$

  cuya representación será:

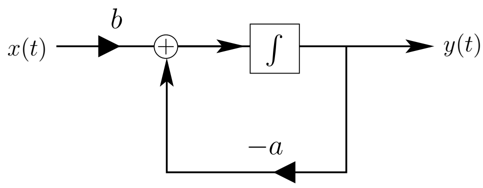
  

- Sistema realimentado: $ay(t) + \frac{dy(t)}{dt} = bx(t)$.

  En forma integral:

  $$y(t) = b \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau - a \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} [bx(\tau) - ay(\tau)]d\tau,$$

  cuya representación será:

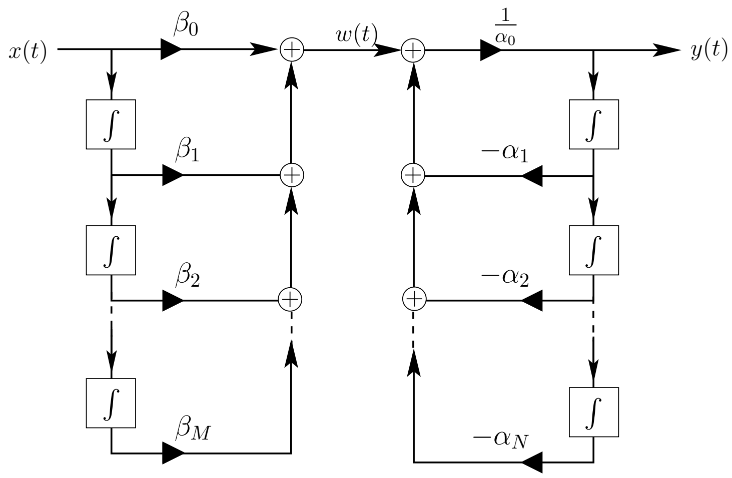
En el caso general, hacemos lo mismo que en el caso discreto, igualando a una señal intermedia, y obteniendo una ecuación no recursiva para la entrada y recursiva para la salida:

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \int_{(k)} y(t)dt = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \int_{(k)} x(t)dt = w(t),$$

$$\text{Entrada: } w(t) = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \int_{(k)} x(t)dt,$$

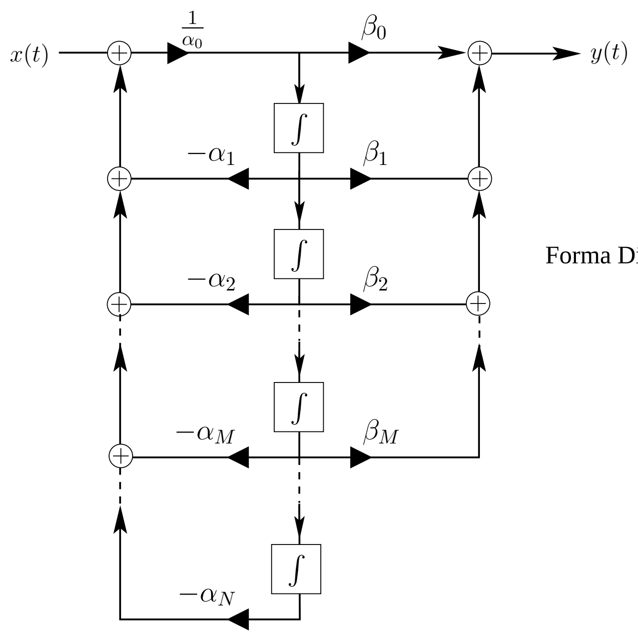
$$\text{Salida en forma recursiva: } y(t) = \frac{1}{\alpha_0} \left[w(t) - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int_{(k)} y(t)dt \right].$$

Obtenemos así la **forma directa I**:



Forma Directa I

Invirtiendo el orden de conexión de lo dos bloques y agrupando cada pareja de integradores en uno solo, obtenemos la **forma directa II**:



Forma Directa II

Apéndice: Propiedades de la $\delta(t)$

1. **Operaciones**:
   - Combinación lineal:
   $$a\delta(t) + b\delta(t) = (a+b)\delta(t).$$
   - Escalado del eje de tiempos[8]:
   $$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t).$$

[8]Esta propiedad se demuestra fácilmente a partir de la aproximación $\delta_\Delta(t)$.

$$\delta(-t) = \delta(t).$$

- Propiedad de muestreo (multiplicación por función):

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t).$$
$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0).$$

- Integración:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t).$$
$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t).$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

- Derivación: $\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$.
Se obtienen distintas relaciones de la derivada mediante la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)f(t)dt.$$

Integrando por partes:

$$u(t) = f(t) \;\Rightarrow\; du(t) = f'(t)dt,$$
$$dv(t) = \delta'(t)dt \;\Rightarrow\; v(t) = \delta(t).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)f(t)dt = \cancel{f(t)\delta(t)}|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f'(t)dt = -f'(0).$$

Usando distintas funciones para $f(t)$ se obtienen distintas relaciones. Por ejemplo, para $f(t) = t$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\delta'(t)dt = -\left. t'\right|_0 = -1 = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt \;\Rightarrow\; -t\delta'(t) = \delta(t).$$

Como $-t$ es impar y $\delta(t)$ es par $\Rightarrow$ $\delta'(t)$ debe ser impar:

$$\delta'(-t) = -\delta'(t).$$

2. **Selectividad**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0).$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\delta(t)dt = f(t_0).$$

3. **Convolución**:

$$\delta(t) * x(t) = x(t).$$
$$\delta(t-t_0) * x(t) = x(t-t_0).$$

———oOo———