

SISTEMAS LINEALES

TEMA 3. ANÁLISIS DE FOURIER PARA SEÑALES CONTINUAS

1. Introducción

Hasta ahora hemos estudiado las señales y los sistemas desde una perspectiva directa, en el dominio del tiempo. En el siguiente bloque de la asignatura vamos a estudiar una serie de transformaciones integrales (análisis de Fourier) que nos van a permitir caracterizar las señales y los sistemas desde otra perspectiva, en el llamado dominio frecuencial. Como hemos visto, la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema lineal e invariante basta para caracterizar completamente éste en términos de estabilidad, causalidad o cualquier otra propiedad de interés. En el dominio frecuencial, la función de transferencia $H(\omega)$ permitirá igualmente la caracterización completa de un sistema LTI. En el dominio del tiempo, la salida de cualquier sistema se puede calcular como la convolución de su entrada con la respuesta al impulso, pero el cálculo de convoluciones es a menudo una tarea ardua. En el dominio de Fourier, veremos que la salida se calcula como el simple producto de la función de transferencia por la señal de entrada, lo cuál simplifica en gran medida la caracterización. Además, el análisis de Fourier permite la caracterización de las señales en términos de un concepto intuitivo como es la frecuencia.

A lo largo de los temas 4 y 5 abordaremos el análisis de Fourier, dividiendo su estudio en los siguientes bloques:

- Análisis de Fourier de señales continuas (T4).
 - Análisis de señales de potencia (periódicas): **series de Fourier en tiempo continuo.**
 - Análisis de señales de energía (aperiódicas): **transformada de Fourier en tiempo continuo.**
- Análisis de Fourier de señales discretas (T5).
 - Análisis de señales de potencia (periódicas): **series de Fourier en tiempo discreto.**
 - Análisis de señales no de energía (aperiódicas): **transformada de Fourier en tiempo discreto**¹.

Estos cuatro conceptos no son independientes unos de otros, sino que están íntimamente relacionados. Como se verá en el tema de la asignatura correspondiente al muestreo, la transformada de Fourier en tiempo discreto de una señal continua muestreada está directamente relacionada con la transformada de Fourier en tiempo continuo de ésta. Si además la señal está limitada en tiempo, se pueden establecer relaciones con el desarrollo en serie de Fourier de su extensión periódica.

¹No hay que confundir la transformada de Fourier en tiempo discreto, que transforma una señal discreta en una función **continua** periódica de período 2π , con la Transformada de Fourier Discreta (DFT), que transforma una secuencia discreta en otra secuencia discreta. La DFT no se estudiará en esta asignatura, siendo propia de los cursos de Tratamiento Digital de Señales.

2. Repaso de nociones fundamentales de álgebra

Para entender mejor la razón de ser y la utilidad del análisis de Fourier y sus propiedades, es muy conveniente establecer una analogía con ciertos conceptos de álgebra básica. Recordemos que \mathbb{R}^d denota el espacio de todos los vectores d -dimensionales que se pueden formar con números reales. Si escogemos un subconjunto de dichos vectores $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^d$, este subconjunto forma una base de \mathbb{R}^d si cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ se puede escribir como una combinación lineal de sus elementos:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^d \lambda_k \mathbf{e}_k; \quad (1)$$

es importante notar que para que el subconjunto sea una base ninguno de los elementos \mathbf{e}_k se tiene que poder expresar en términos de los restantes (dimensión mínima). Los λ_k son los coeficientes del vector \mathbf{v} expresado en la base. Es decir, el nuevo vector $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d]^T$ representa exactamente el mismo vector que \mathbf{v} pero expresado en una base diferente. Calcular estos coeficientes requiere en general resolver un sistema de ecuaciones lineales, pero el problema se simplifica notablemente si la base es **ortogonal**.

El concepto de ortogonalidad viene asociado al de producto escalar. Recordemos que un producto escalar es una aplicación de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. Linealidad: $\langle \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
2. Simetría hermítica: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^*$.
3. Positividad: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$, y la igualdad sólo se da si $\mathbf{u} = 0$.

Si la base considerada es ortogonal, cada uno de los elementos \mathbf{e}_k es ortogonal a todo el resto de los \mathbf{e}_l , $l \neq k$. Si se habla de base ortonormal, se asume además que todos los elementos tienen norma 1, es decir: $\|\mathbf{e}_k\|^2 = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k \rangle = 1$. Bajo estas condiciones, los coeficientes de la combinación lineal en la ecuación (1) se pueden obtener de forma sencilla simplemente calculando cada uno de los productos escalares de \mathbf{v} con \mathbf{e}_l :

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_l \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^d \lambda_k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \right\rangle = \sum_{k=1}^d \lambda_k \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle = \lambda_l \|\mathbf{e}_l\|^2, \quad (2)$$

donde en la segunda igualdad se ha tenido en cuenta la linealidad del producto escalar y en la tercera que la base es ortogonal. En resumen, si tenemos una **base ortogonal** $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^d$ del espacio \mathbb{R}^d , cualquier vector se representará en ella como la siguiente combinación lineal:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^d \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2} \mathbf{e}_k \quad (3)$$

En el contexto que nos ocupa, el espacio \mathbb{R}^d de vectores d -dimensionales se va a sustituir por el espacio de señales a considerar (discretas o continuas, periódicas o no, ver la introducción del tema). Para estos espacios, como veremos, se puede encontrar una base formada únicamente por exponenciales complejas, con la ventaja adicional de que estas funciones son

ortogonales según el producto escalar típico definido como²:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)^* dt. \quad (4)$$

Ejercicio: Comprobar que la ecuación (4) define realmente un producto escalar.

Por tanto, podemos concluir que cualquier señal de interés se podrá escribir como superposición (combinación lineal) de funciones del tipo $\exp(j\omega_k t)$. La forma particular de dicha superposición, así como los ω_k a emplear, dependerá de cada tipo de señal, como se verá más adelante.

3. Más conceptos básicos de álgebra

El propósito de esta sección es mostrar por qué es conveniente utilizar precisamente la base formada por exponenciales complejas (evidentemente ésta no tiene por qué ser la única opción). Para ello, recordemos que cualquier aplicación lineal φ de \mathbb{R}^d en \mathbb{R}^d puede expresarse en términos de una matriz cuadrada A en la forma:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ \mathbf{u} &\longrightarrow \mathbf{v} = A\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (5)$$

Para la aplicación lineal A , tenemos en general d autovectores \mathbf{e}_k asociados a los autovalores ν_k . Cada uno de ellos cumple por definición la siguiente propiedad:

$$A\mathbf{e}_k = \nu_k \mathbf{e}_k, \quad (6)$$

es decir, la aplicación del operador lineal sobre el autovector se reduce al simple producto por el autovalor correspondiente (escalado del autovector sin alterar su dirección). Esta propiedad guarda una estrecha relación, como veremos más tarde, con la sustitución de convoluciones por productos cuando se aplica el análisis de Fourier a los sistemas LTI.

Cuando el operador (matriz) A es simétrico (hermítico, si se admiten valores complejos de la matriz A), se puede demostrar que todos los autovalores ν_k son reales, y además los autovectores \mathbf{e}_k forman una base ortogonal (en realidad, ortonormal). Por tanto, podremos utilizar la ecuación (3) para expresar cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ en esta base. Si ahora aplicamos el operador lineal a dicho vector \mathbf{v} , obtendremos el siguiente resultado:

$$A\mathbf{v} = A \sum_{k=1}^d \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2} \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^d \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2} A\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^d \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_k \rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2} \nu_k \mathbf{e}_k, \quad (7)$$

o, lo que es lo mismo, basta con multiplicar los coeficientes de la combinación lineal correspondiente por los autovalores del operador. Dicho de otra forma, si empleamos para \mathbf{v} la

²Este ejemplo es válido para el caso de señales continuas de energía, esto es, no periódicas. Para el resto de señales, se pueden establecer definiciones análogas, y la propiedad de ortogonalidad de las exponenciales complejas se mantiene.

representación alternativa $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d]^T$, la aplicación del operador lineal A a dicho vector se reduce a una operación trivial, siendo el vector transformado $[\lambda_1\nu_1, \lambda_2\nu_2, \dots, \lambda_d\nu_d]^T$. Nótese la simplicidad de esta expresión en comparación con el producto por la matriz A .

Volviendo al contexto de las señales y los sistemas LTI, la ventaja de la representación en términos de exponenciales complejas es que éstas resultan ser autofunciones de **cualquier sistema LTI**. En efecto, si consideramos un sistema con respuesta al impulso $h(t)$, la salida obtenida cuando la entrada es una exponencial compleja será la convolución de ambas señales:

$$\begin{aligned} x(t) = \exp(j\omega_k t) &\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp(j\omega_k(t - \tau)) d\tau \\ &= \exp(j\omega_k t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp(-j\omega_k \tau) d\tau = H(\omega_k) \exp(j\omega_k t); \end{aligned} \quad (8)$$

es decir, que al alimentar cualquier sistema LTI con una exponencial compleja la salida obtenida es la misma exponencial compleja multiplicada por un factor (autovalor) que depende de la frecuencia angular ω_k . Este factor de escala $H(\omega_k)$, que en general será un número complejo (con módulo y fase), es lo que denominaremos función de transferencia o **respuesta en frecuencia**.

Siguiendo con la analogía, supongamos que nuestra señal de interés puede ser descrita como la siguiente combinación lineal (infinita) de exponenciales complejas:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right) \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H\left(\frac{2k\pi}{T}\right) \exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right); \quad (9)$$

y en lugar de tener que calcular la convolución entre $x(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$, basta con modificar los coeficientes de la combinación lineal que representa $x(t)$. La función de transferencia $H(2k\pi/T)$ caracteriza completamente el sistema LTI al igual que la respuesta al impulso $h(t)$.

Por último, cabe destacar que en el caso del análisis de Fourier los coeficientes c_k en la ecuación (9) no son simples artefactos matemáticos, sino que están asociados a la composición frecuencial de la señal analizada: si una señal tiene sólo coeficientes asociados a exponenciales complejas de baja frecuencia angular, variará de forma lenta (señal paso-bajo). Si sólo tiene coeficientes asociados a exponenciales de alta frecuencia, será una señal de variación rápida (paso-alto). De esta forma, el análisis de Fourier tiene además una segunda interpretación intuitiva y muy útil en el ámbito de la teoría de la señal, permitiendo el estudio del comportamiento de canales, transmisión multiplexada y un sinnúmero de aplicaciones.

4. Desarrollo en serie de Fourier de señales continuas

En esta primera parte vamos a estudiar señales periódicas en tiempo continuo. Recordemos que una señal es periódica de período T si cumple:

$$x(t) = x(t + T), \quad \forall t; \quad (10)$$

si además no puede encontrarse un $T' < T$ que cumpla esta condición, se dice que T es el período fundamental de la señal $x(t)$. La frecuencia de la señal será entonces $f = T^{-1}$, y la

frecuencia angular, pulsación o número de onda³ será $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$. Recordemos que las exponenciales complejas son funciones periódicas:

$$\exp\left(j\frac{2\pi}{T}t\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (11)$$

es periódica de período T o frecuencia (angular) $2\pi/T$. En la primera parte de este tema utilizaremos exponenciales complejas cuyas frecuencias serán múltiplos enteros de la frecuencia fundamental $2\pi/T$ de las señales a analizar: $\exp(2k\pi/T \cdot t)$. Estos términos se conocen como armónicos de la frecuencia fundamental. La premisa básica del desarrollo en serie de Fourier es que cualquier señal periódica con período fundamental T y potencia finita puede escribirse como una combinación lineal de los armónicos correspondientes a todos los posibles números enteros $k \in \mathbb{Z}$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}t\right) + j \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T}t\right), \quad (12)$$

que es el **desarrollo en serie de Fourier** de $x(t)$, o ecuación de síntesis del desarrollo en serie de Fourier en tiempo continuo.

Volviendo a nuestro símil, estamos considerando el espacio de las funciones periódicas de potencia finita, y estamos postulando que el conjunto de armónicos $\{\exp(2k\pi/T \cdot t)\}_{k=0}^{\infty}$ forma una base completa de dicho espacio. Además, es muy fácil comprobar que dicha base es ortogonal según el producto escalar definido por:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{\langle T \rangle} f(t)g(t)^* dt. \quad (13)$$

Ejercicio: Probar que en efecto las exponenciales complejas de frecuencia múltiplo de $2\pi/T$ son ortogonales con respecto al producto escalar definido en la ecuación (13). Es decir, probar que:

$$\left\langle \exp\left(j\frac{2l\pi}{T}t\right), \exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right) \right\rangle = \begin{cases} 0, & l \neq k \\ T, & l = k \end{cases} \quad (14)$$

Puesto que la base es ortogonal, la teoría de álgebra básica repasada anteriormente permite establecer que los coeficientes c_n en la ecuación (12) pueden calcularse de forma sencilla como:

$$c_k = \frac{1}{\|\exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right)\|^2} \left\langle x(t), \exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}t\right) dt, \quad (15)$$

que es la ecuación de análisis del desarrollo en serie de Fourier para señales en tiempo continuo.

³En esta asignatura todos los desarrollos se harán en torno a la frecuencia angular ω (medida en radianes por segundo), y por tanto nos referiremos a ella indistintamente como *frecuencia*. Ésta no es la única alternativa, y se pueden utilizar formulaciones completamente análogas utilizando la frecuencia natural f (medida en ciclos por segundo o hertzios).

4.1. Desarrollo en serie de Fourier de señales reales

En muchos casos es suficiente considerar el espacio de las señales reales. Para estas señales, resulta evidente que $x(t) = x(t)^*$ (la señal es igual a su conjugado) y se puede encontrar una sencilla relación de simetría entre los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier:

$$c_{-k}^* = \left(\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \exp \left(-j \frac{2(-k)\pi}{T} t \right) dt \right)^* = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t)^* \exp \left(-j \frac{2k\pi}{T} t \right) dt = c_k, \quad (16)$$

y por tanto los coeficientes de la serie de Fourier de una **señal real** deben tener simetría hermítica: $c_{-k} = c_k^*$.

Ejercicio: Demostrar que los coeficientes de la serie de Fourier de una señal imaginaria pura deben tener simetría antihermítica: $c_{-k} = -c_k^*$.

Para señales reales pueden encontrarse además expresiones alternativas del desarrollo en serie de Fourier. Teniendo en cuenta el resultado de la ecuación (16), la ecuación de síntesis (12) puede reescribirse en la forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp \left(j \frac{2k\pi}{T} t \right) + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \exp \left(j \frac{2k\pi}{T} t \right) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp \left(j \frac{2k\pi}{T} t \right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \exp \left(j \frac{-2k\pi}{T} t \right) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \exp \left(j \frac{2k\pi}{T} t \right) + c_k^* \exp \left(-j \frac{2k\pi}{T} t \right) \right) \\ &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left\{ c_k \exp \left(\frac{2k\pi}{T} t \right) \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

A partir de la expresión anterior podemos obtener formas equivalentes utilizando las distintas representaciones de los números complejos. En módulo y fase, $c_k = C_k e^{j\theta_k}$:

$$x(t) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left\{ C_k \exp \left(j \frac{2k\pi}{T} t + j\theta_k \right) \right\} = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos \left(\frac{2k\pi}{T} t + \theta_k \right). \quad (18)$$

Si lo expresamos en parte real e imaginaria, $c_k = a_k + jb_k$:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left\{ (a_k + jb_k) \exp \left(j \frac{2k\pi}{T} t \right) \right\} \\ &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left(\frac{2k\pi}{T} t \right) - b_k \sin \left(\frac{2k\pi}{T} t \right) \right). \end{aligned} \quad (19)$$

En cualquier caso los coeficientes c_k del desarrollo en serie de Fourier, así como sus módulos, argumentos, partes reales y partes imaginarias, se calculan según la ecuación de análisis (15). En el caso de señales reales, no obstante, basta con calcular aproximadamente la mitad de los coeficientes (los de $k > 0$ y el de $k = 0$).

5. Convergencia de series de Fourier

En esta sección vamos a estudiar una serie de conceptos asociados a la ecuación de síntesis (12). Dicha igualdad no debe entenderse en general como una igualdad entre funciones punto a punto para todos los valores de t dentro del período de $x(t)$, sino como una igualdad en el sentido de la potencia del error entre la señal original y la señal reconstruida. En concreto, ya hemos mencionado antes que la serie de Fourier de una señal periódica existe siempre que la potencia media de ésta sea finita. Formalmente, si:

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt < \infty, \quad (20)$$

la teoría del análisis de Fourier permite asegurar que:

1. Los coeficientes de la serie, c_k , son finitos.
2. El error de la aproximación por la serie truncada de Fourier tiende a 0 a medida que se toman más coeficientes:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \left| \sum_{k=-N}^N c_k \exp\left(j \frac{2k\pi}{T} t\right) - x(t) \right|^2 dt = 0. \quad (21)$$

Es importante notar que la segunda afirmación **no implica** en general que la señal reconstruida según la ecuación de síntesis (12) sea igual punto a punto a la señal analizada $x(t)$. Más adelante veremos un ejemplo en este sentido.

En cualquier caso, si la serie de Fourier existe podemos asegurar que la potencia media del error en la reconstrucción es nula. Si consideramos la serie truncada para los coeficientes entre $-N$ y N en la ecuación (21), tendremos una aproximación a la señal de interés, $x(t)$, que podremos expresar en la forma:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-N}^N c_k \exp\left(j \frac{2k\pi}{T} t\right), \quad (22)$$

y cuyo error debido al truncamiento será:

$$E_N = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t) - \tilde{x}(t)|^2 dt. \quad (23)$$

El error descrito por la ecuación (23) se minimiza para cualquier N precisamente cuando los c_k son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier. Es decir, de todas las posibles superposiciones finitas de armónicos de período fundamental T , aquella que minimiza la potencia de error es la formada por los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier. Este resultado puede razonarse de nuevo recurriendo a la analogía con el álgebra lineal, como se muestra en la figura 1. Además, si la función es de potencia finita, $\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0$. Por supuesto, a medida que se añadan nuevos coeficientes a la serie (se aumente N), el error E_N disminuirá (decrecimiento monótono).

La ecuación (21) tiene validez general siempre que $x(t)$ tenga potencia media finita. No obstante, la igualdad estricta (es decir, punto a punto para todo t salvo para un conjunto aislado de puntos) puede asegurarse siempre y cuando se impongan condiciones adicionales sobre $x(t)$. Estas condiciones, llamadas de Dirichlet, se resumen en:

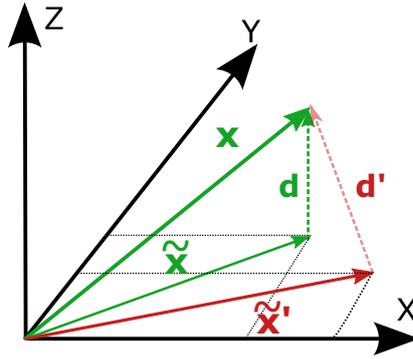


Figura 1: Analogía geométrica con la serie truncada de Fourier. La señal a representar es el vector \mathbf{x} en \mathbb{R}^3 . Truncar la serie de Fourier equivale a representar \mathbf{x} en un espacio de dimensión menor, esto es, mediante un vector en el plano XY . De entre todas las posibles aproximaciones $\tilde{\mathbf{x}}$ que se pueden considerar, la que produce un menor error \mathbf{d} es precisamente la proyección ortogonal de \mathbf{x} en el subespacio formado por el plano XY . Cualquier otra aproximación $\tilde{\mathbf{x}}'$ formada por vectores de este plano dará lugar a un error \mathbf{d}' mayor. En términos del desarrollo en serie de Fourier, la mejor aproximación a $x(t)$ con un número finito de armónicos será precisamente la serie de Fourier truncada, que es la proyección de $x(t)$ en este espacio de menor dimensión.

1. $x(t)$ ha de ser absolutamente integrable en un período: $\int_{(T)} |x(t)| dt < \infty$ (Contraejemplo: $x(t) = 1/t$, $0 \leq t < T$).
2. El número de mínimos y de máximos dentro de un período es finito (Contraejemplo: $x(t) = \sin(2\pi/t)$, $0 \leq t < T$).
3. El número de discontinuidades dentro de un período es finito.

La gran mayoría de las señales que vamos a manejar cumplirán estas condiciones. Las que no lo hagan, son *patológicas* y por tanto no tienen demasiado interés para nosotros. El cumplimiento de las condiciones de Dirichlet asegura que la serie de Fourier iguala a $x(t)$ punto a punto **salvo para un conjunto aislado de puntos**. Por tanto, esta afirmación podrá ser extendida a todas nuestras señales de interés (salvo las patológicas). Además:

1. Si $x(t)$ es continua en todo el período, la igualdad se cumple punto a punto **para todos los puntos** t del período.
2. Si $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades, la igualdad se cumple para todos los puntos salvo las discontinuidades.

Como resumen del presente apartado, podemos concluir:

1. Si $x(t)$ es de potencia finita, la potencia media del error al reconstruirla como su serie de Fourier es nula.
2. Salvo para señales patológicas, la igualdad entre $x(t)$ y su serie de Fourier es de hecho una igualdad entre funciones salvo en un conjunto aislado de puntos (discontinuidades).
3. Si $x(t)$ es continua, la igualdad es estricta para todos los valores de t .

5.1. Ejemplo: señal periódica cuadrada. Fenómeno de Gibbs

Consideremos una onda cuadrada periódica de período T , definida entre $-T/2$ y $T/2$ como:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T/4 \\ 0, & |t| \geq T/4 \end{cases} ; \quad (24)$$

fuera del intervalo $[-T/2, T/2]$, debemos extender $x(t)$ de forma periódica. Puesto que $x(t)$ tiene potencia media finita, podemos representarla mediante su serie de Fourier. La señal no es continua, por lo que la igualdad no puede entenderse punto a punto para todo t . De hecho, sabemos que la igualdad es estricta salvo en la discontinuidad, es decir, para $t = \pm T/4$. Los coeficientes del desarrollo en serie se calculan usando la ecuación de análisis (15):

$$\begin{cases} c_0 &= \frac{1}{2} \\ c_{2k} &= 0 \\ c_{2k+1} &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi} \end{cases} \quad (25)$$

Ejercicio: Comprobar los valores dados en la ecuación (25) para la señal de la ecuación (24).

Con estos valores, vamos a evaluar la serie truncada $\tilde{x}(t)$ definida por la ecuación (22) para diferentes valores de N , observando el efecto en la señal reconstruida. Este experimento se muestra en la figura 2. La primera conclusión es que en efecto la aproximación mejora (se parece más a la onda cuadrada) a medida que tomamos un valor mayor de N . Para $N = 201$, vemos que la señal es prácticamente igual a la onda cuadrada. Cabe preguntarse cuántos coeficientes serán necesarios para obtener una aproximación adecuada a $x(t)$. En general se puede decir que cuanto más *regular* sea la función $x(t)$ (esto es, cuantas más derivadas continuas tenga) más rápido tienden a 0 los coeficientes c_k y por tanto necesitamos un menor número de ellos. En el caso de la onda cuadrada, la señal es poco regular (no tenemos ni siquiera una sola derivada continua; es más, la propia señal ni siquiera es continua) y por ello necesitamos un gran número de coeficientes.

Fijémonos ahora en la parte inferior de la figura, donde se muestra una ampliación de la discontinuidad en $-T/4$. Para cualquier punto t diferente de $-T/4$, vemos que la señal truncada $\tilde{x}(t)$ se aproxima a $x(t)$ a medida que N aumenta. Esto era enteramente previsible, ya que $x(t)$ cumple las condiciones de Dirichlet. No obstante, vemos que para cualquier valor de N , por grande que sea éste, **siempre** aparece una oscilación de la señal cuya altura no disminuye, de valor constante y aproximadamente igual a $1,089$. A medida que N aumenta, el valor de t para el que se da este pico se aproxima más a $-T/4$. Es decir, para cualquier $t \neq -T/4$ la señal truncada $\tilde{x}(t)$ tiende al valor de $x(t)$, pero para $t = -T/4$ el límite no existe, por lo que $\tilde{x}(-T/4)$ **no tiende** a $x(-T/4)$ cuando N crece arbitrariamente. Este comportamiento se conoce como **fenómeno de Gibbs**, por ser Gibbs el primero en describirlo.

Salvo en $t = \pm T/4$, $\tilde{x}(t)$ tiende a $x(t)$. Puesto que éstos son sólo dos puntos aislados no influyen en el valor de la integral que define E_N , por lo que resulta evidente que este error tiende a 0, tal y como dicta la teoría de series de Fourier.

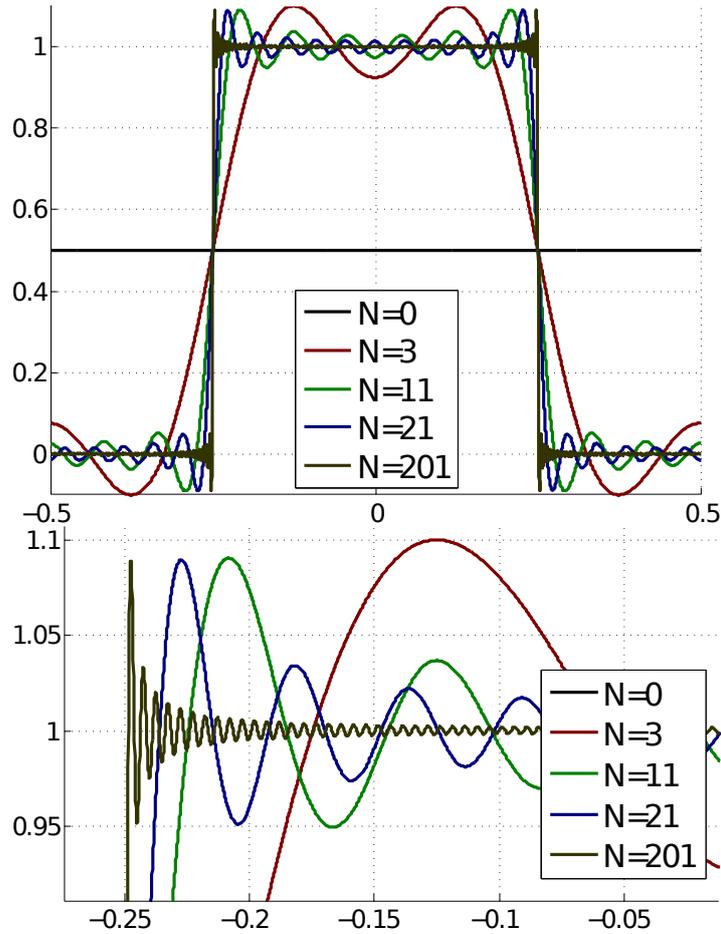


Figura 2: Serie truncada de Fourier para una onda cuadrada periódica ($T = 1$), para diferentes órdenes de truncamiento N .

6. Propiedades del desarrollo en serie de Fourier

En esta sección vamos a estudiar una serie de propiedades de interés que cumplen los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier para señales continuas, así como las relaciones entre los coeficientes de Fourier de diversas señales relacionadas en algún modo en el dominio del tiempo. Pasemos a describirlas.

Linealidad. Si las señales $x(t)$ e $y(t)$, ambas periódicas de período T , pueden ser representadas mediante sendos desarrollos en serie de Fourier, con coeficientes respectivos c_k y d_k , entonces la señal $\alpha x(t) + \beta y(t)$ puede ser representada mediante un desarrollo en serie de Fourier, cuyos coeficientes serán $\alpha c_k + \beta d_k$. Esta propiedad se deduce de forma trivial de la definición de los c_k en la ecuación (15), y por tanto no entraremos en mayor detalle.

Es importante notar que ambas señales deben ser periódicas con el mismo período T . No obstante, puede haber una excepción a esta regla. Supongamos que $x(t)$ es periódica de período T_1 , e $y(t)$ es periódica de período T_2 . Si ambos períodos guardan una relación de enteros simples, el análisis será posible. Es decir, supongamos que existen dos **números naturales** p_1 y p_2 tal que: $T = p_1 T_1 = p_2 T_2$. Puesto que T es un múltiplo del período

fundamental de ambas señales, tanto $x(t)$ como $y(t)$ son señales periódicas de período T , y por lo tanto también lo será su suma. Como consecuencia, ésta se podrá expresar como una serie de Fourier de frecuencia fundamental $2\pi/T$. No obstante, en este caso los coeficientes de Fourier de $\alpha x(t) + \beta y(t)$ **no guardarán una relación sencilla** con los coeficientes de los desarrollos respectivos de $x(t)$ (con frecuencia fundamental $2\pi/T_1$) e $y(t)$ (con frecuencia fundamental $2\pi/T_2$). Esta consideración es válida para todas las propiedades que involucren dos o más señales periódicas.

Desplazamiento temporal. Supongamos que $x(t)$ es periódica de período T y puede ser representada como una serie de Fourier. Nos preguntamos cuáles son los coeficientes de Fourier correspondientes a un desplazamiento temporal de la señal, $y(t) = x(t - t_0)$:

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t - t_0) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}t\right) dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(s) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}(s + t_0)\right) ds \\ &= \frac{1}{T} \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}t_0\right) \int_{\langle T \rangle} x(s) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}s\right) ds = \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}t_0\right) c_k, \end{aligned} \quad (26)$$

donde se ha realizado el cambio de variable $s = t - t_0$. Es decir, el efecto del **desplazamiento en el tiempo** de la señal $x(t)$ sobre los coeficientes de su serie de Fourier es una **modulación** (producto por exponenciales complejas) con el término $\exp(-j\frac{2k\pi}{T}t_0)$.

Inversión en el tiempo. Consideremos ahora la señal $y(t) = x(-t)$, resultado de *reflejar* la señal $x(t)$ en sentido horizontal en torno al eje de ordenadas. Sus coeficientes de Fourier vendrán dados por:

$$d_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(-t) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}t\right) dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(s) \exp\left(j\frac{2k\pi}{T}s\right) ds = c_{-k}, \quad (27)$$

donde el cambio de variable es ahora $s = -t$. Si la señal $x(t)$ es real, podemos decir además que $d_k = c_k^*$, como vimos anteriormente.

Escalado temporal. Si la señal $x(t)$ periódica de período T se puede representar mediante su serie de Fourier, su versión escalada $y(t) = x(\alpha t)$ será también periódica, pero su período será ahora $T' = T/\alpha \Leftrightarrow T = \alpha T'$:

$$y(t + T') = x(\alpha(t + T')) = x(\alpha t + T) = x(\alpha t) = y(t), \quad (28)$$

y por tanto podrá representarse mediante su desarrollo en serie de Fourier de período T' :

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{T'} \int_{\langle T' \rangle} y(t) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T'}t\right) dt = \frac{1}{T'} \int_{\langle T' \rangle} x(\alpha t) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T'}t\right) dt \\ &= \frac{1}{T'} \int_{\langle \alpha T' \rangle} x(s) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T'}\frac{s}{\alpha}\right) \frac{ds}{\alpha} = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(s) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}s\right) ds = c_k. \end{aligned} \quad (29)$$

De nuevo es necesario hacer un cambio de variable, en este caso: $s = \alpha t$, y vemos que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier son idénticos tras el escalado temporal. No obstante la caracterización como serie de Fourier **no es la misma**, ya que el período de la señal $y(t)$ es diferente al original.

Conjugación. Si tomamos la señal conjugada de $x(t)$, $y(t) = x(t)^*$, sus coeficientes vendrán dados por:

$$d_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x^*(t) \exp\left(-j \frac{2k\pi}{T} t\right) dt = \left(\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \exp\left(j \frac{2k\pi}{T} t\right) dt \right)^* = c_{-k}^*. \quad (30)$$

Modulación. Supongamos que multiplicamos la señal $x(t)$, periódica de período T , por una exponencial compleja: $y(t) = x(t) \exp(jM2\pi/T \cdot t)$, donde necesariamente M ha de ser un **número entero** de forma que la exponencial compleja tenga período T (no necesariamente período fundamental). Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier para la señal resultante serán:

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \exp\left(jM \frac{2\pi}{T} t\right) \exp\left(-j \frac{2k\pi}{T} t\right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \exp\left(-j \frac{2(k-M)\pi}{T} t\right) dt = c_{k-M}, \end{aligned} \quad (31)$$

y la modulación temporal se traduce en un desplazamiento de los coeficientes de Fourier. Nótese que un desplazamiento en el tiempo tenía como efecto la modulación de los coeficientes del desarrollo, por lo que ambas propiedades son duales. Esta dualidad entre operaciones en el dominio del tiempo y en el dominio transformado de Fourier será una constante tanto para señales continuas como discretas, y tanto para señales periódicas como aperiódicas. Comprobaremos esta afirmación a media que vayamos introduciendo las propiedades correspondientes en cada uno de estos escenarios.

Multiplicación. Para dos señales $x(t)$ e $y(t)$ como las descritas en la propiedad de linealidad, supongamos ahora la señal periódica de período T $z(t) = x(t)y(t)$. Los coeficientes e_k de su desarrollo en serie de Fourier se calculan como:

$$\begin{aligned} e_k &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t)y(t) \exp\left(-j \frac{2k\pi}{T} t\right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \exp\left(j \frac{2l\pi}{T} t\right) \right) y(t) \exp\left(-j \frac{2k\pi}{T} t\right) dt \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} y(t) \exp\left(j \frac{2l\pi}{T} t\right) \exp\left(-j \frac{2k\pi}{T} t\right) dt \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} y(t) \exp\left(-j \frac{2(k-l)\pi}{T} t\right) dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l d_{k-l}; \end{aligned} \quad (32)$$

en primer lugar hemos escrito $x(t)$ en términos de su desarrollo en serie de Fourier (con el nuevo subíndice l), y después hemos intercambiado el orden del sumatorio y la integral. El resultado finalmente es que los coeficientes de Fourier resultantes son la **convolución discreta** de los respectivos coeficientes de $x(t)$ e $y(t)$.

Convolución periódica. Como propiedad dual a la anterior, supongamos que calculamos ahora la convolución periódica de ambas señales $x(t)$ e $y(t)$:

$$z(t) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) y(t - \tau) d\tau; \quad (33)$$

los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier se calculan de forma parecida al caso anterior. Simplemente, si escribimos su expresión explícita e intercambiamos el orden de los operadores, obtenemos:

$$\begin{aligned} e_k &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \frac{1}{T} \left(\int_{\langle T \rangle} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right) \exp \left(-j \frac{2k\pi}{T} t \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) \left(\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} y(t - \tau) \exp \left(-j \frac{2k\pi}{T} t \right) dt \right) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) d_k \exp \left(-j \frac{2k\pi}{T} \tau \right) d\tau = c_k d_k, \end{aligned} \quad (34)$$

donde hemos utilizado la propiedad de desplazamiento temporal deducida anteriormente. De forma dual a la propiedad de multiplicación, cuando se realiza la convolución **periódica** de las señales de entrada los coeficientes de la señal resultante son el producto de los coeficientes de entrada.

Derivación. Si consideramos la derivada de una función periódica derivable (y por tanto continua) $y(t) = dx(t)/dt$, ésta será también periódica de período T , y sus coeficientes vendrán dados por:

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \frac{dx(t)}{dt} \exp \left(-j \frac{2k\pi}{T} t \right) dt \\ &= \frac{1}{T} x(t) \exp \left(-j \frac{2k\pi}{T} t \right) \Big|_{\langle T \rangle} - \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \left(-j \frac{2k\pi}{T} \right) \exp \left(-j \frac{2k\pi}{T} t \right) dt \\ &= j \frac{2k\pi}{T} \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \exp \left(-j \frac{2k\pi}{T} t \right) dt = j \frac{2k\pi}{T} c_k, \end{aligned} \quad (35)$$

donde se ha integrado por partes y se ha tenido en cuenta que la evaluación de la señal entre los extremos de un período completo de una señal **continua** debe ser 0.

Relación de Parseval. Esta es una propiedad de gran importancia que permite relacionar la potencia media de una señal con la energía de sus coeficientes de Fourier. Como veremos más adelante, existen relaciones análogas para el caso de señales no periódicas, y también para señales discretas. La potencia media de la señal $x(t)$ se mide como:

$$\begin{aligned}
\|x(t)\|^2 &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t)x(t)^* dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right) \right) \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l^* \exp\left(-j\frac{2l\pi}{T}t\right) \right) dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_k c_l^* \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} \exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right) \exp\left(-j\frac{2l\pi}{T}t\right) dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_k c_l^* \delta[k-l] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_k^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2, \tag{36}
\end{aligned}$$

donde simplemente hemos tenido en cuenta la ortogonalidad de las exponenciales complejas. Concluimos pues que la potencia media de $x(t)$ es exactamente igual que la energía de la secuencia discreta formada por los coeficientes de su serie de Fourier en tiempo continuo.

Valor medio. También es muy sencillo calcular el valor medio de la señal en un período completo:

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \exp\left(-j\frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{T}t\right) dt = c_0, \tag{37}$$

así que el coeficiente c_0 indica precisamente el valor medio de $x(t)$.

Señales con simetría par/impar. Sea $x(t)$ par (resp. impar), esto es: $x(t) = x(-t)$ (resp. $x(t) = -x(-t)$). Sin más que aplicar la propiedad de inversión temporal, podemos concluir que sus coeficientes de Fourier guardan la relación: $c_k = c_{-k}$ (resp. $c_k = -c_{-k}$), y tienen también simetría par (resp. impar).

Ejercicio: Utilizando las propiedades de inversión temporal y conjugación, determinar las propiedades que han de cumplir los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier para una señal hermítica ($x(t) = x^*(t)$) y para una señal antihermítica ($x(t) = -x(t)^*$).

RESUMEN. A modo de resumen, y para concluir con la teoría sobre desarrollos en serie de Fourier en tiempo continuo, la Tabla 1 describe brevemente las propiedades que hemos estudiado hasta el momento.

7. Transformada de Fourier en tiempo continuo

Hasta este momento hemos estudiado el análisis de Fourier para señales periódicas, que como vimos en temas anteriores son señales de potencia. En lo que resta de tema vamos a estudiar el caso, en general de mayor interés, de señales no periódicas. Las señales no periódicas pueden ser a su vez de potencia o de energía. En concreto nos interesarán las señales **no periódicas de energía finita**. No obstante, veremos que el formalismo de la transformada

de Fourier puede extenderse a señales periódicas utilizando distribuciones (deltas de Dirac que, recordemos, **no pueden considerarse funciones** sino señales en sentido genérico).

Para derivar las ecuaciones de análisis y de síntesis será de gran utilidad emplear las expresiones correspondientes del desarrollo en serie de Fourier para señales continuas, que recordamos a continuación:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right) \quad (\text{síntesis}) \quad (38)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}t\right) dt \quad (\text{análisis}) \quad (39)$$

7.1. Derivación de las ecuaciones de análisis y síntesis

Comencemos considerando una señal $x(t)$ arbitraria, que en principio tendrá soporte limitado en el intervalo $[-W, W]$. Esta última consideración no es necesaria para la derivación, pero ésta será más sencilla de esta forma. Dicha señal $x(t)$ se podrá extender de forma periódica eligiendo un período cualquiera $T > 2W$, como se muestra en la figura 3. Matemáticamente, la expresión que relaciona ambas señales será:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT) \quad (40)$$

Evidentemente $x_p(t)$ es periódica, ya que $x_p(t+T) = x_p(t)$ para cualquier t . Si la señal original $x(t)$ es de energía finita, es fácil comprobar que para la situación reflejada en la figura 3 la potencia media de $x_p(t)$ es a su vez finita:

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x_p(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_p(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-W}^W |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} E < \infty, \quad (41)$$

donde E representa la energía de $x(t)$. Puesto que $x_p(t)$ tiene potencia media finita, sabemos que su desarrollo en serie de Fourier converge hacia la propia $x_p(t)$ en el sentido de que la potencia media del error tiende a 0. Por tanto, en este sentido podremos escribir:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right), \quad (42)$$

donde los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier continuo, c_k , se obtienen sin más que aplicar la ecuación de análisis correspondiente:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_p(t) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}t\right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}t\right) dt = \frac{1}{T} \int_{-W}^W x(t) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}t\right) dt. \end{aligned} \quad (43)$$

Resumen: Hasta este punto solamente hemos tomado una señal $x(t)$, la hemos extendido de

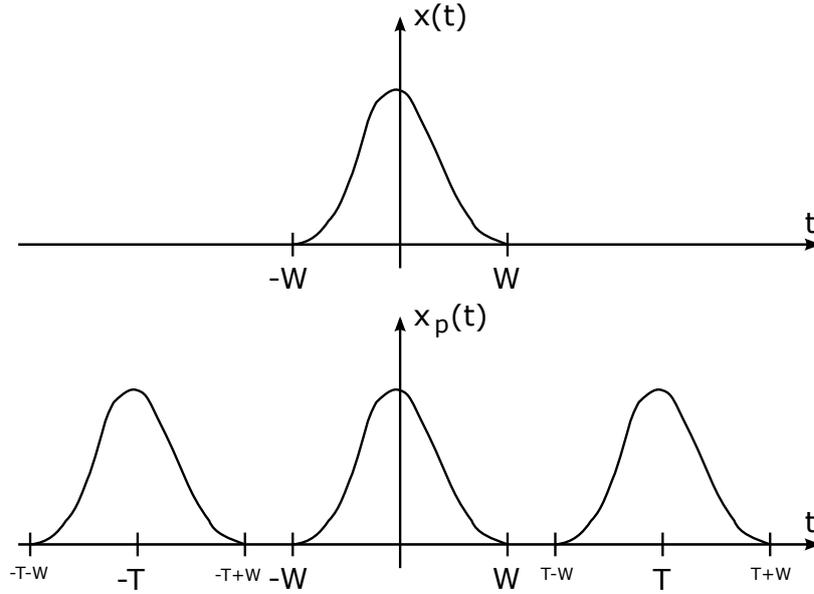


Figura 3: Extensión periódica de una señal $x(t)$ para formar $x_p(t)$, periódica de período T . Estamos considerando el caso $T > 2W$, aunque de nuevo esto no es estrictamente necesario para la derivación.

forma periódica para obtener $x_p(t)$, periódica de período T , y hemos calculado su desarrollo en serie de Fourier continuo.

Aunque las ecuaciones previas son exactamente las de análisis y síntesis del desarrollo en serie de Fourier, nos va a interesar una representación alternativa en términos de unos coeficientes que definiremos de la forma:

$$\begin{aligned}
 X_k &= Tc_k = \int_{-T/2}^{T/2} x_p(t) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}t\right) dt \\
 x_p(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{X_k}{T} \exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right).
 \end{aligned} \tag{44}$$

Como vemos, simplemente multiplicamos los coeficientes del desarrollo por un valor constante, esto es, la longitud del período de la señal $x_p(t)$.

En este punto es importante notar que el período T escogido puede ser arbitrariamente grande. Es interesante comprobar qué es lo que ocurre con las frecuencias angulares $2k\pi/T$ utilizadas para la expansión a medida que aumenta T : evidentemente, estas frecuencias están cada vez más juntas. De hecho, la separación entre las frecuencias angulares de dos armónicos consecutivos será:

$$\Delta\omega = \frac{2(k+1)\pi}{T} - \frac{2k\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}, \tag{45}$$

es decir que se superponen armónicos a frecuencias equiespaciadas, cuya separación es inversamente proporcional al período, con sus coeficientes X_k correspondientes. De esta forma, podemos considerar que los coeficientes X_k son el resultado de evaluar una cierta función

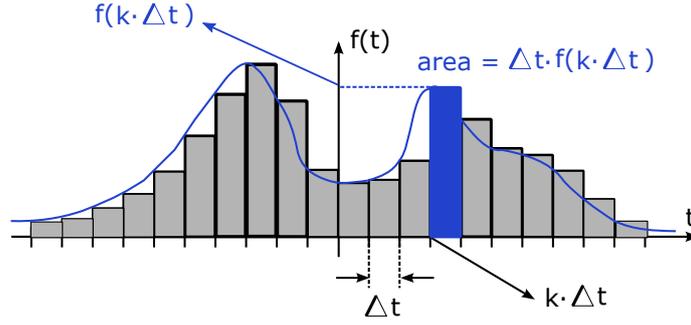


Figura 4: Ejemplo de suma de Riemann de la función $f(t)$: el área se aproxima como la suma de las áreas de todos los rectángulos de ancho Δt y altura $f(k\Delta t)$.

$X(\omega)$ en valores equiespaciados $\omega_k = 2k\pi/T$, es decir:

$$\begin{aligned}
 X_k &= X(\omega)|_{\omega=\frac{2k\pi}{T}} = X\left(\frac{2k\pi}{T}\right) \Rightarrow \\
 x_p(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X\left(\frac{2k\pi}{T}\right) \exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} X\left(\frac{2k\pi}{T}\right) \exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right) \quad (46)
 \end{aligned}$$

Resumen: Hasta este momento, hemos introducido (por conveniencia) un escalado en los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier, y hemos demostrado que éstos pueden verse como la evaluación de una cierta función **de variable continua** $X(\omega)$ para valores equiespaciados de ω , separados $2\pi/T$.

El resultado final en la ecuación (46) es una suma de Riemann que debería resultar familiar de la asignatura de cálculo. A modo de repaso, considérese la función $f(t)$ representada en la figura 4. Para una determinada separación Δt entre muestras contiguas, la suma de Riemann correspondiente a la integral (área bajo la curva $f(t)$) se define como:

$$\mathcal{S}_{\Delta t}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta t \cdot f(k\Delta t); \quad (47)$$

es decir, el área bajo la curva $f(t)$ se aproxima como la suma de las áreas de los rectángulos de la figura, de forma que a medida que se reduce Δt (se refina la partición) la aproximación mejora. Por tanto, el valor de la integral de Riemann se define como⁴:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{S}_{\Delta t}(f). \quad (48)$$

Volviendo sobre la ecuación (46), es fácil comprobar, comparando con la ecuación (47) e identificando términos, que tenemos una suma de Riemann correspondiente a la siguiente

⁴En realidad la integral de Riemann no se define para límites de integración infinitos, siendo ésta una integral impropia, pero la analogía es válida en nuestro contexto.

integral:

$$x_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega, \quad (49)$$

donde $\Delta t = 2\pi/T$. Para que la suma de Riemann tienda a la integral, necesitamos que Δt tienda a 0, o alternativamente que el período T tienda a infinito. Pero si el período T de $x_p(t)$ tiende a infinito (es decir, la señal realmente no es periódica) es fácil comprobar a la vista de la figura (3) que la extensión periódica $x_p(t)$ tiende a la señal original:

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} x_p(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} X\left(\frac{2k\pi}{T}\right) \exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega, \end{aligned} \quad (50)$$

que es precisamente la **ecuación de síntesis** de la transformada de Fourier en tiempo continuo. Para la descripción completa de la transformada, necesitamos deducir además la ecuación de análisis, es decir, necesitamos calcular la señal de variable continua $X(\omega)$ a partir de la señal original $x(t)$. Para ello, recordemos que $X(\omega)$ era simplemente una versión escalada del coeficiente del desarrollo en serie de Fourier correspondiente a la frecuencia angular ω . Por tanto, desde la ecuación (44) podemos tomar el límite correspondiente y calcular:

$$X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x_p(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt, \quad (51)$$

permitiéndonos esta ecuación calcular $X(\omega)$, señal que se conoce como **transformada de Fourier** en tiempo continuo de $x(t)$ o como **espectro** de $x(t)$. Aunque hay otras posibles definiciones para las ecuaciones de análisis y síntesis⁵, ésta es la más común y la que se utilizará en esta asignatura:

transformada directa	transformada inversa
$X(\omega) = \mathfrak{F} \{x(t)\} (\omega)$	$x(t) = \mathfrak{F}^{-1} \{X(\omega)\} (t)$
$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt$	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$

La transformada de Fourier (o espectro) tiene además una interesante interpretación cualitativa. Dada una frecuencia angular ω , el valor de $X(\omega)$ representa el contenido de $x(t)$ correspondiente a esa frecuencia (contenido espectral); o bien, $x(t)$ puede escribirse como una superposición de armónicos a frecuencias ω , cuyas amplitudes vendrán dadas por $X(\omega)$. Por ejemplo, si calculásemos la transformada de Fourier de una señal de voz, el espectro correspondiente será nulo para frecuencias angulares más allá de $2\pi \cdot 3,000$ rad/s, ya que el ser humano no emite sonidos por encima de unos 3,000 Hz. Para una señal musical grabada en un compact disc, el espectro llegaría hasta unos $2\pi \cdot 20,000$ rad/s, que es la máxima frecuencia audible por el ser humano. No tiene sentido por tanto mezclar armónicos por encima de esa frecuencia, ya que el oído no los distinguirá.

⁵En particular, es muy común en teoría de la comunicación utilizar la variable $f = \omega/2\pi$, lo que introduce un escalado en la definición de las ecuaciones.

8. Relación con los coeficientes del desarrollo en serie

De igual forma que hemos deducido la expresión de la transformada de Fourier de $x(t)$ a partir de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x_p(t)$, podemos llevar a cabo el proceso inverso. Cualquier señal periódica $x_p(t)$ podrá siempre escribirse como la suma de versiones desplazadas nT de su período fundamental, $x(t)$. Es decir, cualquier señal periódica de período T se podrá escribir en la forma:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT). \quad (53)$$

Es importante notar que en este caso $x(t)$ **no es única**, ya que dependerá de qué tramo elijamos como período fundamental: es decir, podemos definir $x(t)$ como el tramo de $x_p(t)$ entre 0 y T , o entre $-T/2$ y $T/2$, o entre $T/4$ y $5T/4$. . . habiendo infinitas posibilidades. Para cualquiera de estas elecciones, podremos escribir:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x_p(t) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}t\right) dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}t\right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}t\right) dt = \frac{1}{T} X\left(\frac{2k\pi}{T}\right). \end{aligned} \quad (54)$$

Por tanto, los coeficientes del desarrollo en serie son una versión escalada de la transformada de Fourier evaluada en la frecuencia angular correspondiente. Respecto de la elección particular de $x(t)$, nótese que la estamos realizando al escoger unos límites de integración en particular para la integración en $\langle T \rangle$. Puesto que los coeficientes del desarrollo son únicos, sabemos que independientemente de los límites que tomemos para el período, y por tanto independientemente de la función $x(t)$ en el período básico que escojamos, el resultado ha de ser exactamente el mismo.

9. Convergencia de la transformada de Fourier

Dada la estrecha relación de la transformada de Fourier con los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier, es de esperar que la convergencia de la transformada de Fourier guarde similitudes con la del desarrollo serie. En particular, se puede asegurar:

- Si $x(t)$ tiene energía finita, la transformada inversa de Fourier de su transformada, $X(\omega)$, tiende a $x(t)$ en el sentido de que la energía del error tiende a 0. Es decir, para $X(\omega)$ obtenida según la ecuación de análisis (51), se cumple:

$$\begin{aligned} \text{Si } \tilde{x}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T X(\omega) \exp(j\omega t) dt \\ &\Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - \tilde{x}(t)|^2 dt = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

- La condición anterior no garantiza la convergencia puntual de $\tilde{x}(t)$ hacia $x(t)$ para cada t . Sin embargo, existen unas condiciones de Dirichlet válidas para la transformada de Fourier. Si se cumple:

- La señal $x(t)$ es absolutamente integrable.
- Para cualquier intervalo finito que se escoja, la señal presenta un número finito de mínimos y de máximos.
- Para cualquier intervalo finito que se escoja, la señal presenta un número finito de discontinuidades, todas ellas finitas.

Entonces hay convergencia puntual de $\tilde{x}(t)$ hacia $x(t)$ para todos los puntos t salvo las discontinuidades (existe también el fenómeno de Gibbs).

10. Ejemplos significativos de transformadas de Fourier

10.1. Transformada de Fourier de una delta de Dirac

Supongamos que la señal de interés $x(t)$ es un impulso unitario en el origen, $\delta(t)$. Su transformada de Fourier será:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \exp(-j\omega t) dt = 1, \quad (56)$$

sin más que emplear la propiedad de selección de la delta de Dirac. Es decir, la transformada de Fourier de una delta de Dirac es una función constante e igual a 1. Cualitativamente, un impulso unitario contiene todas las posibles frecuencias del espectro con igual valor. Empleando la fórmula de síntesis, podemos concluir:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \exp(j\omega t) d\omega; \quad (57)$$

si aplicamos el cambio de variable $s = -t$ en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega s) ds = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{F}\{1\}(\omega) \Rightarrow \mathfrak{F}\{1\}(t) = 2\pi\delta(\omega). \quad (58)$$

Intercambiando los papeles de las variables t y ω , vemos que la transformada de Fourier de una constante es precisamente una delta de Dirac pesada por 2π . Esta relación entre transformadas directas e inversas responde al principio de dualidad que veremos más adelante. Por último, nótese que ni la delta de Dirac ni la función constante son señales de energía finita, y a pesar de ello la transformada de Fourier sigue teniendo sentido.

10.2. Transformada de Fourier de una señal cuadrada

Supongamos ahora un pulso cuadrado de anchura T y altura 1:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T/2 \\ 0, & |t| \geq T/2 \end{cases} \quad (59)$$

Su transformada de Fourier vendrá dada por:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \exp(-j\omega t) dt = \left[\frac{-1}{j\omega} \exp(-j\omega t) \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{\exp(j\omega \frac{T}{2}) - \exp(-j\omega \frac{T}{2})}{j\omega} = \frac{T}{2} \frac{2j \sin(\omega \frac{T}{2})}{j\omega \frac{T}{2}} = T \operatorname{sinc}\left(\frac{T}{2}\omega\right). \end{aligned} \quad (60)$$

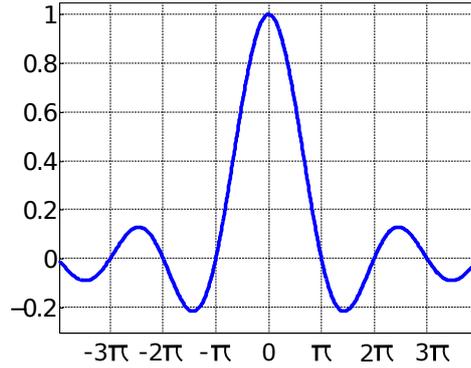


Figura 5: La función $\text{sinc}(t) = \sin(t)/t$ pasa por 0 en todos los múltiplos enteros de π salvo en el origen. Los extremos locales, que alternan entre máximos positivos y mínimos negativos, se producen en el origen y en los múltiplos impares de $\pi/2$ (salvo $\pm\pi/2$).

La función $\text{sinc}(t) = \sin(t)/t$ tendrá una gran importancia a lo largo de toda la asignatura (y de muchas otras). Su forma se esboza en la figura 5.

Ejercicio: A partir de la expresión anterior para la transformada de Fourier de un pulso cuadrado y usando la relación (54) con los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier, volver a deducir de esta forma alternativa la expresión (25).

11. Propiedades de la transformada de Fourier

De forma análoga a como se hizo con el desarrollo en serie de Fourier, se pueden deducir una serie de propiedades de interés para la transformada de Fourier. Estas propiedades serán de gran utilidad para el cálculo de transformadas de Fourier de señales de cierta complejidad, para resolver ciertos problemas o para estudiar ciertas propiedades de las señales y los sistemas. A continuación se enumeran y razonan algunas de estas propiedades. La mayoría de ellas son análogas a las del desarrollo en serie de Fourier, por lo que se recomienda revisar aquéllas a la vez que se estudien éstas.

Linealidad. La propiedad de linealidad se conserva por supuesto para la transformada de Fourier. Dada la linealidad de las integrales, es trivial demostrar que para dos señales $x(t)$ e $y(t)$ con espectros $X(\omega)$ e $Y(\omega)$, el espectro de $\alpha x(t) + \beta y(t)$ es $\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)$, para cualesquiera α y β complejos.

Desplazamiento temporal. Dado el espectro de $x(t)$, $X(\omega)$, queremos calcular el espectro de $y(t) = x(t - t_0)$:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j\omega(s + t_0)) ds \\ &= \exp(-j\omega t_0) \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-j\omega s) ds = \exp(-j\omega t_0) X(\omega), \end{aligned} \quad (61)$$

donde se ha realizado el cambio de variable $s = t - t_0$. Es decir, el efecto del **desplazamiento**

en el tiempo de la señal $x(t)$ sobre la transformada de Fourier es una **modulación** (producto por exponenciales complejas) de frecuencia angular t_0 .

Inversión en el tiempo. Consideremos ahora la señal $y(t) = x(-t)$, resultado de *reflejar* la señal $x(t)$ en sentido horizontal en torno al eje de ordenadas:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(j\omega s) ds = X(-\omega), \quad (62)$$

donde el cambio de variable es ahora $s = -t$.

Escalado temporal. Supongamos $y(t) = x(\alpha t)$. Su espectro es:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha t) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp\left(-j\omega \frac{s}{\alpha}\right) \frac{ds}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp\left(-j\frac{\omega}{\alpha} s\right) ds = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \end{aligned} \quad (63)$$

De nuevo es necesario hacer un cambio de variable, en este caso: $s = \alpha t$. El escalado en tiempo conlleva un escalado inverso en el dominio transformado de Fourier (o dominio de la frecuencia), de forma que si la señal en tiempo se ensancha el espectro se contrae, y viceversa. Nótese el operador módulo que aparece debido al cambio de variable.

Conjugación. Si tomamos la señal conjugada de $x(t)$, $y(t) = x(t)^*$, su transformada será:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \exp(-j\omega t) dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(j\omega t) dt \right)^* = X(-\omega)^*. \quad (64)$$

Modulación. Supongamos que multiplicamos (modulamos) la señal $x(t)$ por una exponencial compleja de frecuencia angular ω_0 : $y(t) = x(t) \exp(j\omega_0 t)$. La transformada de Fourier para la señal resultante será:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(j\omega_0 t) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j(\omega - \omega_0) t) dt = X(\omega - \omega_0), \end{aligned} \quad (65)$$

y la modulación temporal se traduce en un desplazamiento (frecuencial) del espectro. Esta propiedad es la dual del desplazamiento en tiempo, que producía una modulación en frecuencia. Nótese que en este caso la modulación no lleva un signo negativo. La dualidad de hecho se puede generalizar no sólo a las propiedades sino a las propias señales en ambos dominios, como se muestra a continuación.

Dualidad. En un ejemplo anterior vimos que la transformada de un impulso unitario era una constante, mientras que la transformada de Fourier de una constante es un impulso unitario. Esta propiedad es fácilmente generalizable. En particular, supongamos que el espectro de

$x(t)$ es $X(\omega)$. Nos preguntamos entonces cuál es el espectro de $X(t)$. Aplicando la definición:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{X(t)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \exp(-j\omega t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi X(t) \exp(j(-\omega)t) dt \\ &= \mathfrak{F}^{-1}\{2\pi X(t)\}(-\omega) = 2\pi \mathfrak{F}^{-1}\{X(t)\}(-\omega) = 2\pi x(-\omega),\end{aligned}\quad (66)$$

donde se ha utilizado la propiedad de linealidad. Vemos que hay una estrecha relación entre el espectro de $X(\omega)$ y la señal original $x(t)$, lo cual no debería sorprender dada la similitud entre las ecuaciones de análisis y síntesis. Éstas se diferencian en una constante 2π , que aparece en la ecuación anterior, y un signo ‘-’ en la exponencial compleja, que se refleja en la inversión temporal. Compárese esta propiedad con el ejemplo visto para la delta de Dirac (en este caso no aparece la inversión temporal porque tenemos señales pares).

Multiplicación. Para dos señales $x(t)$ e $y(t)$, el espectro $Z(\omega)$ de su producto $z(t) = x(t)y(t)$ será:

$$\begin{aligned}Z(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) \exp(jst) ds \right) y(t) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \exp(jst) \exp(-j\omega t) dt \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \exp(-j(\omega - s)t) dt \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) Y(\omega - s) ds = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega);\end{aligned}\quad (67)$$

en primer lugar hemos escrito $x(t)$ en términos de su transformada de Fourier inversa (usando la variable auxiliar s en lugar de ω), y después hemos intercambiado el orden de las dos integrales. Por tanto, un producto en el dominio del tiempo se traduce en la convolución de ambos espectros ponderada por un factor $(2\pi)^{-1}$. De manera dual:

Convolución. Si $z(t) = x(t) * y(t)$, el espectro $Z(\omega)$ es:

$$\begin{aligned}Z(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau) d\tau \right) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) \exp(-j\omega t) dt \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) Y(\omega) \exp(-j\omega\tau) d\tau \\ &= Y(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau = X(\omega) Y(\omega),\end{aligned}\quad (68)$$

donde hemos utilizado la propiedad de desplazamiento temporal deducida anteriormente. Es decir, la convolución temporal se transforma en un producto de espectros. Esta propiedad es de una enorme importancia. Recordemos del tema anterior que la salida de cualquier sistema LTI puede calcularse como la convolución de la entrada con la respuesta al impulso. Esta propiedad significa que en el dominio de la frecuencia basta con multiplicar (operación mucho más sencilla que la convolución) el espectro de la señal de entrada con la respuesta en frecuencia del sistema, definida como la transformada de Fourier de su respuesta al impulso.

Es fácil darse cuenta del enorme potencial del análisis de Fourier en el estudio de sistemas LTI, dada esta propiedad.

Derivación. Si consideramos la derivada de una señal $x(t)$, $y(t) = dx(t)/dt$, su transformada puede deducirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \frac{d}{dt} \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) j\omega \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega X(\omega)) \exp(j\omega t) d\omega, \end{aligned} \quad (69)$$

y sin más que identificar términos vemos que la transformada de Fourier de $y(t)$ ha de ser $Y(\omega) = j\omega X(\omega)$. Esta propiedad es de gran interés en el análisis de sistemas definidos por ecuaciones en diferencias.

Integración. De igual forma, si ahora $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$, puede deducirse la siguiente relación:

$$Y(\omega) = \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0) \delta(\omega). \quad (70)$$

El primer término es evidentemente el inverso del operador derivación, ya que derivada e integral son operadores inversos. El segundo término da cuenta de la singularidad que se produce si el valor medio de $x(t)$ no es 0, ya que al integrar dicho valor medio desde menos infinito la integral no estará acotada. El hecho de que este sumando vaya multiplicado por $X(0)$ resultará claro cuando se vea la siguiente propiedad.

Valor medio. El valor medio de la señal $x(t)$ es sencillo de calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j \cdot 0 \cdot t) dt = X(0). \quad (71)$$

y por tanto el valor medio de la señal coincide con el valor de su transformada en $\omega = 0$.

Relación de Parseval. La energía de una señal $x(t)$ puede relacionarse con la energía de su transformada de Fourier $X(\omega)$:

$$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \|X(\omega)\|^2. \quad (72)$$

Para probar esta propiedad, consideremos en primer lugar la señal $y(t) = x(t)x(t)^*$ cuya transformada de Fourier será, según las propiedades de multiplicación y conjugación vistas anteriormente:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X(-\omega)^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) X(-(\omega - s))^* ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) X(s - \omega)^* ds. \end{aligned} \quad (73)$$

La energía de la señal $x(t)$ puede verse como el valor medio de las señal $y(t)$ así obtenida, de forma que aplicando la propiedad de valor medio:

$$\begin{aligned}\|x(t)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t)^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = Y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s)X(s-0)^* ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s)X(s)^* ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \|X(\omega)\|^2.\end{aligned}\quad (74)$$

Ejercicio: Probar que si $x(t)$ es real su transformada de Fourier tiene simetría hermítica, $X(\omega) = X(-\omega)^*$, mientras que si $x(t)$ es imaginaria pura su transformada tiene simetría antihermítica, $X(\omega) = -X(-\omega)^*$.

RESUMEN. A modo de resumen, la Tabla 2 describe brevemente las propiedades que hemos estudiado hasta el momento.

12. Transformada de Fourier de señales periódicas

A pesar de que la transformada de Fourier está definida en principio para señales de energía, puede generalizarse para señales de potencia haciendo uso de la distribución delta de Dirac. En particular, estudiamos a continuación el caso de señales periódicas, que son señales de potencia. Para ello, el punto de partida será el ejemplo visto en la sección 10.1. Podemos razonar de la siguiente forma:

1. La transformada de Fourier de una delta de Dirac es una señal constante de valor 1.
2. Por la propiedad de desplazamiento temporal, la transformada de Fourier de $\delta(t - t_0)$ será $\exp(-jt_0\omega)$.
3. Empleando la propiedad de dualidad entre pares transformados, la transformada de $\exp(-j\omega_0 t)$ será $2\pi\delta(-\omega - \omega_0) = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$, ya que la distribución delta es par.
4. Empleando la propiedad de inversión temporal, y teniendo en cuenta de nuevo que la distribución delta es par, vemos que la transformada de Fourier de $\exp(j\omega_0 t)$ debe ser $2\pi\delta(-\omega + \omega_0) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$:

$$\mathfrak{F}\{\exp(j\omega_0 t)\}(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).\quad (75)$$

Una vez hecha esta deducción consideremos ahora una señal $x_p(t)$ **periódica** de período T . Si su potencia media es finita, dicha señal puede expresarse en términos de su desarrollo en serie de Fourier:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right).\quad (76)$$

Finalmente, sólo tenemos que utilizar la propiedad de linealidad para calcular la transformada de Fourier de esta señal:

$$\mathfrak{F}\{x_p(t)\}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathfrak{F}\left\{\exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right)\right\}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right). \quad (77)$$

Es decir, la transformada de Fourier de una señal periódica es un tren de deltas a las frecuencias angulares múltiplos de la frecuencia fundamental de $x_p(t)$, cuyos pesos son precisamente los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x_p(t)$ (multiplicados por 2π). Este resultado no debería ser sorprendente: en el caso de una señal periódica, no necesitamos todas las posibles frecuencias del espectro, sino sólo aquéllas que sean múltiplos de la fundamental, como vimos en el caso del desarrollo en serie de Fourier. Por eso la transformada consta sólo de deltas a dichas frecuencias.

13. Respuesta en frecuencia de un sistema LTI

Las propiedades de la transformada de Fourier también permiten el análisis de sistemas LTI de manera sencilla. En concreto, sabemos que la salida $y(t)$ de cualquier sistema LTI puede calcularse como la convolución de la entrada $x(t)$ con la respuesta al impulso $h(t)$. Usando la propiedad de convolución, vemos que la relación entrada/salida en el dominio frecuencial puede describirse como:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega), \quad (78)$$

donde $H(\omega)$ es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso, conocida como respuesta en frecuencia o función de transferencia del sistema LTI. Una operación tan complicada como la convolución queda entonces reducida a un simple producto. La respuesta en frecuencia caracteriza completamente el sistema, al igual que lo hace la respuesta al impulso.

Esta representación encaja perfectamente con el concepto de autofunción de un sistema LTI. Como hemos visto antes, la transformada de Fourier representa una superposición de armónicos en todo el espectro de frecuencias, representada por la ecuación de síntesis:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega, \quad (79)$$

y la señal a la salida del sistema será entonces:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (80)$$

Es decir:

1. La señal $x(t)$ se descompone como superposición de armónicos.
2. Cada uno de dichos armónicos, al atravesar el sistema LTI, queda multiplicado por el autovalor correspondiente $H(\omega)$ (ya que los armónicos son autofunciones).
3. La salida es la misma superposición de armónicos debido a la linealidad, pero la amplitud de éstos se ve modificada por el sistema LTI por un factor $H(\omega)$.

En forma matemática, si denotamos por $\mathcal{H}\{x(t)\}$ la aplicación del sistema LTI sobre la señal $x(t)$ tenemos:

$$y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \mathcal{H} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \right\}; \quad (81)$$

puesto que el sistema es lineal:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \mathcal{H} \{ \exp(j\omega t) \} d\omega, \quad (82)$$

ya que la exponencial es el único término que depende de la variable temporal. Puesto que la exponencial compleja es autofunción del sistema LTI, con autovalor $H(\omega)$, la aplicación del sistema se reducirá al producto de la autofunción por el autovalor:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) \exp(j\omega t) d\omega, \quad (83)$$

y por supuesto llegamos a la misma expresión que si usamos la propiedad de convolución.

La representación de la relación entrada/salida como producto es a su vez útil para el análisis y diseño de determinados sistemas LTI, como pueden ser los filtros selectivos en frecuencia⁶, o para estudiar el muestreo de señales continuas. Cada uno de estos problemas corresponde a uno de los siguientes temas de la asignatura.

13.1. Sistemas caracterizados por ecuaciones diferenciales

Como vimos en el tema anterior, los sistemas definidos por ecuaciones diferenciales son una clase especialmente importante de sistemas LTI, ya que modelan infinidad de procesos físicos. Resolver una ecuación diferencial es en general complicado, pero el uso de transformadas de Fourier simplifica notablemente el problema. Recordemos que la forma genérica de uno de estos sistemas es:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}; \quad (84)$$

utilizando la propiedad de derivación, podemos calcular fácilmente la respuesta en frecuencia del sistema:

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(\omega) \Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}, \quad (85)$$

que resulta ser un cociente de polinomios en ω . Por ejemplo, consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t). \quad (86)$$

⁶En este caso se explota la interpretación de $x(t)$ como superposición de armónicos. Por ejemplo, si diseñamos $h(t)$ de tal forma que $H(\omega)$ valga 1 para las frecuencias por debajo de 3 KHz. y 0 para el resto, estaremos eliminando aquellas frecuencias de $x(t)$ superiores a este valor, lo que puede ser útil en una línea telefónica para seleccionar sólo aquellas partes de la señal que se correspondan con la voz humana.

Es fácil comprobar que la respuesta en frecuencia del sistema es:

$$H(\omega) = \frac{(j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)}, \quad (87)$$

donde simplemente hemos factorizado el numerador y el denominador. Esta expresión puede descomponerse en fracciones simples, obteniéndose:

$$H(\omega) = \frac{1/2}{j\omega + 1} + \frac{1/2}{j\omega + 3}. \quad (88)$$

Puede comprobarse que, si $\Re\{z\} > 0$:

$$\mathfrak{F}\{e^{-zt}u(t)\}(\omega) = \frac{1}{z + j\omega}, \quad (89)$$

y por lo tanto, usando la propiedad de linealidad, la respuesta al impulso (transformada inversa de Fourier de $H(\omega)$) para este sistema es:

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t), \quad (90)$$

sin tener que resolver explícitamente la ecuación diferencial. Para una entrada dada $x(t)$, bastaría con calcular la transformada inversa de $H(\omega)X(\omega)$, en lugar de tener que resolver una parte homogénea y una parte no homogénea.

Ejercicio: Demostrar la relación dada en la ecuación (89).

Propiedad	Dominio del tiempo	Coefficientes de la serie
<i>Linealidad</i>	$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$	$e_k = \alpha c_k + \beta d_k$
<i>Desplazamiento</i>	$y(t) = x(t - t_0)$	$d_k = \exp\left(-j \frac{2k\pi}{T} t_0\right) c_k$
<i>Inversión</i>	$y(t) = x(-t)$	$d_k = c_{-k}$
<i>Escalado</i> ¹	$y(t) = x(\alpha t)$	$d_k = c_k$
<i>Conjugación</i>	$y(t) = x(t)^*$	$d_k = c_{-k}^*$
<i>Modulación</i>	$y(t) = x(t) \exp\left(jM \frac{2\pi}{T} t\right)$	$d_k = c_{k-M}$
<i>Multiplicación</i>	$z(t) = x(t)y(t)$	$e_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l d_{k-l}$
<i>Convolución periódica</i>	$z(t) = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$e_k = c_k d_k$
<i>Derivación</i>	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$d_k = j \frac{2k\pi}{T} c_k$
<i>Relación de Parseval</i>	$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) ^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k ^2$
<i>Valor medio</i>	$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) dt$	c_0
<i>Señales simétricas</i>	$x(t) = x(-t)$	$c_k = c_{-k}$
	$x(t) = -x(-t)$	$c_k = -c_{-k}$
	$x(t) = x(-t)^*$	$\Im\{c_k\} = 0$
	$x(t) = -x(-t)^*$	$\Re\{c_k\} = 0$

¹ En este caso hay que tener en cuenta que el período de la señal $y(t)$ resultante es $T' = T/\alpha$; a pesar de que los coeficientes del desarrollo en serie no cambian, **sí que cambia** la propia representación como serie, ya que los coeficientes están asociados a diferentes funciones base con diferente frecuencia fundamental.

Cuadro 1: Resumen de propiedades del desarrollo en serie de Fourier en tiempo continuo. Asumimos que $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son señales periódicas todas ellas con idéntico período, T , y los coeficientes de sus series de Fourier son respectivamente c_k , d_k y e_k .

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio frecuencial
<i>Linealidad</i>	$z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$	$Z(\omega) = \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)$
<i>Desplazamiento</i>	$y(t) = x(t - t_0)$	$Y(\omega) = \exp(-jt_0\omega) X(\omega)$
<i>Inversión</i>	$y(t) = x(-t)$	$Y(\omega) = X(-\omega)$
<i>Escalado</i>	$y(t) = x(\alpha t)$	$\frac{1}{ \alpha } X\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
<i>Conjugación</i>	$y(t) = x(t)^*$	$Y(\omega) = X(-\omega)^*$
<i>Modulación</i>	$y(t) = x(t) \exp(j\omega_0 t)$	$Y(\omega) = X(\omega - \omega_0)$
<i>Dualidad</i>	$X(\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)\}(\omega)$	$2\pi x(-\omega) = \mathfrak{F}\{X(t)\}(\omega)$
<i>Multiplicación</i>	$z(t) = x(t)y(t)$	$Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$
<i>Convolución</i>	$z(t) = x(t) * y(t)$	$Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$
<i>Derivación</i>	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$Y(\omega) = j\omega X(\omega)$
<i>Integración</i>	$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$Y(\omega) = \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
<i>Relación de Parseval</i>	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$
<i>Valor medio</i>	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$	$Y(0)$
<i>Señales simétricas</i>	$x(t) = x(-t)$	$X(\omega) = X(-\omega)$
	$x(t) = -x(-t)$	$X(\omega) = -X(-\omega)$
	$x(t) = x(-t)^*$	$\mathfrak{I}\{X(\omega)\} = 0$
	$x(t) = -x(-t)^*$	$\mathfrak{R}\{X(\omega)\} = 0$

Cuadro 2: Resumen de propiedades de la transformada de Fourier continua. Asumimos que $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ tienen transformadas de Fourier respectivas $X(\omega)$, $Y(\omega)$ y $Z(\omega)$.