Sistemas Lineales

TEMA 4. ANÁLISIS DE FOURIER PARA SEÑALES DISCRETAS

1. Introducción

En el tema anterior hemos estudiado los aspectos fundamentales del análisis de Fourier de señales continuas, dividiendo dicho estudio entre señales periódicas y señales no periódicas (en principio de energía, aunque ya hemos visto que la generalización a señales de potencia es posible mediante el uso de distribuciones delta de Dirac).

En el presente tema se va a desarrollar, de forma paralela, la teoría correspondiente a señales de variable discreta. Al igual que ocurre con variable continua, una de las principales ventajas de la representación en términos de exponenciales complejas es que éstas son, también en el caso discreto, autofunciones para cualquier sistema LTI:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \exp\left(j\Omega(n-k)\right) = \exp(j\Omega n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \exp(-j\Omega k) = H(\Omega) \exp(j\Omega n), \tag{1}$$

por lo que todos los comentarios hechos en el tema anterior siguen siendo válidos.

El resto del presente tema se divide entre el estudio de señales periódicas (de potencia) a través del desarrollo en serie de Fourier discreto y de señales no periódicas de energía a través de la transformada de Fourier en tiempo discreto[1]. En la última parte veremos que de nuevo la transformada de Fourier puede extenderse a señales periódicas y a otras señales de potencia.

2. Desarrollo en serie de Fourier de señales discretas

Para señales de variable discreta, recordemos que $x[n]$ es periódica si y sólo si existe un número **entero** N tal que, **para todo** n se cumple:

$$x[n+N] = x[n]. \tag{2}$$

Si además no podemos encontrar otro entero $M < N$ para el que se cumpla la condición anterior, decimos que N es el período fundamental de la señal. Por analogía con lo visto en el tema anterior, estamos interesados en la representación de $x[n]$ en la forma:

$$x[n] = \sum_k c_k \exp\left(j\frac{2k\pi}{N}n\right). \tag{3}$$

En este caso no hemos especificado los límites del sumatorio. En la siguiente sección veremos por qué.

[1]Una vez más, nótese que deliberadamente estamos utilizando la denominación “transformada de Fourier en tiempo discreto” y **no** “transformada de Fourier discreta”, ya que este último concepto es otro tipo de transformada que no veremos en la asignatura, y que está íntimamente relacionado con el desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto.

2.1. Sobre las exponenciales complejas discretas

Las exponenciales complejas en tiempo discreto presentan algunas peculiaridades respecto a las exponenciales complejas en tiempo continuo. Recordemos que:

- **No todas las exponenciales complejas discretas son periódicas.** Una exponencial de la forma $\exp(j\Omega n)$ es periódica en n si y sólo si la constante Ω es una fracción racional de 2π, es decir, $\Omega = 2\pi/(p/q)$ para p, q enteros. Puesto que queremos representar señales periódicas como superposición de exponenciales complejas, éstas deben ser necesariamente periódicas. Esta condición se ha tenido ya en cuenta en la expresión (3).

- Ambigüedad de las exponenciales complejas. Supongamos una exponencial compleja discreta periódica: $\exp\left(j\frac{2k\pi}{N}n\right)$, para cualquier k entero. Consideremos ahora una segunda exponencial compleja a la frecuencia angular correspondiente a $k' = k + N$:

$$\begin{aligned} \exp\left(j\frac{2k'\pi}{N}n\right) &= \exp\left(j\frac{2(k+N)\pi}{N}n\right) \\ &= \exp\left(j\frac{2k\pi}{N}n\right)\exp(j2\pi n) = \exp\left(j\frac{2k\pi}{N}n\right), \end{aligned} \tag{4}$$

  y obtenemos la exponencial original. Por tanto, sólo tendremos N exponenciales complejas diferentes de la forma considerada, y son aquéllas correspondientes a $k = 0, 1, \ldots, N-1$, ya que la correspondiente a N es idéntica a la de 0; la de $N + 1$ idéntica a la de 1, etcétera.

De la discusión anterior podemos concluir que para cualquier entero N tenemos N exponenciales complejas periódicas diferentes cuyos períodos sean múltiplos enteros del período fundamental N. Por tanto, el desarrollo en serie de Fourier discreto tendrá la forma:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp\left(j\frac{2kn\pi}{N}\right). \tag{5}$$

2.2. Ecuaciones de análisis y síntesis

El resultado al que hemos llegado en el apartado anterior puede deducirse también desde un punto de vista algebraico. De hecho, la analogía algebraica vista al principio del tema anterior resulta mucho más directa en el caso de señales en tiempo discreto: si consideramos las N muestras de la señal $x[n]$ correspondientes a un período completo, podemos formar el vector columna $\mathbf{x} = [x[0], x[1], \ldots, x[N-1]]^T \in \mathbb{C}^N$. Puesto que tenemos un vector en $\mathbb{C}^N$, podremos representar éste en términos de cualquier base de este espacio vectorial. Las N exponenciales complejas diferentes son precisamente una base ortogonal de dicho espacio. El elemento k-ésimo de la base, $0 \leq k < N$, será:

$$\mathbf{e}_k = \left[\exp\left(j\frac{2k\pi \cdot 0}{N}\right), \exp\left(j\frac{2k\pi \cdot 1}{N}\right), \ldots, \exp\left(j\frac{2k\pi \cdot (N-1)}{N}\right)\right]^T. \tag{6}$$

Es muy sencillo comprobar que la base es realmente ortogonal. Para $k \neq l$:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l \rangle &\triangleq \mathbf{e}_l^H \mathbf{e}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(j\frac{2kn\pi}{N}\right)\exp\left(-j\frac{2ln\pi}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(j\frac{2(k-l)n\pi}{N}\right) \\ &= \frac{\exp\left(j\frac{2(k-l)N\pi}{N}\right)-1}{\exp\left(j\frac{2(k-l)\pi}{N}\right)-1} = \frac{\exp\left(j2(k-l)\pi\right)-1}{\exp\left(j\frac{2(k-l)\pi}{N}\right)-1} = 0; \end{aligned} \tag{7}$$

en la expresión anterior $\mathbf{e}_k^H$ denota el vector hermítico de $\mathbf{e}_k$, es decir, su traspuesto conjugado. Hemos utilizado la fórmula de la suma de una progresión geométrica hasta el elemento $N-1$, y hemos tenido en cuenta que $k-l$ es siempre entero y por lo tanto la exponencial del último numerador es siempre 1.

Ejercicio: Demostrar que la norma al cuadrado de todos los elementos de la base de exponenciales complejas discretas es: $\|\mathbf{e}_k\|^2 = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\rangle = \mathbf{e}_k^H\mathbf{e}_k = N$.

Al contrario de lo que ocurría con el desarrollo en serie en tiempo continuo, no hemos tenido que definir un producto escalar en términos de operadores integrales. En este caso hemos utilizado el producto escalar clásico en $\mathbb{C}^N$ (suma de productos componente a componente), ya que nuestras señales de interés pueden interpretarse directamente como vectores N-dimensionales en el espacio complejo $\mathbb{C}^N$. Por esta razón hemos dicho que la analogía algebraica es mucho más clara en este caso. Teniendo en cuenta los conceptos de álgebra repasados en el tema anterior, podemos calcular los coeficientes de la combinación lineal que representa $\mathbf{x}$ en esta base como la proyección sobre sus elementos:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \mathbf{e}_k = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k\rangle}{\|\mathbf{e}_k\|^2}\mathbf{e}_k = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{\mathbf{e}_k^H\mathbf{x}}{N}\mathbf{e}_k. \tag{8}$$

Sin más que usar la definición de producto escalar e identificar términos en la expresión anterior, obtenemos las ecuaciones de análisis y de síntesis:

$$\begin{aligned}\textbf{análisis:}\quad & c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-j\frac{2kn\pi}{T}\right); \\ \textbf{síntesis:}\quad & x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp\left(j\frac{2kn\pi}{T}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

2.3. Periodicidad de los coeficientes del desarrollo en serie

Ya hemos comentado antes la ambigüedad de las exponenciales complejas discretas, concluyendo que la exponencial para $k+N$ es idéntica a la exponencial para k. Por ello, si aplicamos la ecuación de análisis anterior a la exponencial a $k + N$ obtendremos evidentemente el coeficiente c_k. Si interpretamos los coeficientes c_k del desarrollo en serie de Fourier como una nueva secuencia discreta $c[k]$, tendremos:

$$c_k \longrightarrow c[k]: \quad c[k+N] = c[k], \tag{10}$$

y por tanto el desarrollo en serie de Fourier discreto puede verse como una nueva señal discreta también periódica de período N.

2.4. Sobre la convergencia del desarrollo en serie de Fourier discreto

En el caso de variable continua tanto el desarrollo en serie como la transformada de Fourier presentaban problemas de convergencia, en el sentido de que la señal reconstruida no tendía a la original punto a punto (en general) sino en el sentido del error cuadrático medio. En el caso discreto hemos visto que el desarrollo en serie puede verse como una simple igualdad entre vectores, por lo que la convergencia es punto a punto para todo n, sin necesidad de ningún otro tipo de consideración.

3. Propiedades del desarrollo en serie de Fourier discreto

A continuación se derivan algunas de las propiedades más relevantes del desarrollo en serie de Fourier discreto. Como siempre, se recomienda comparar éstas con las vistas en el tema anterior para el caso continuo. Con respecto a la suma y el producto de dos señales $x[n]$ e $y[n]$, en general supondremos que ambas señales son periódicas con el mismo período N (en principio será el período fundamental, pero no tiene por qué, ver el comentario al respecto en el tema anterior).

Linealidad. En lo que sigue supondremos las señales $x[n]$, $y[n]$ y $z[n]$, todas ellas periódicas de período N, con coeficientes del desarrollo en serie de Fourier c_k, d_k y e_k, respectivamente. Si $z[n] = \alpha x[n] + \beta y[n]$, es trivial demostrar que $e_k = \alpha c_k + \beta d_k$.

Desplazamiento temporal. Se trata de calcular los coeficientes del desarrollo en serie de $y[n] = x[n - n_0]$. Utilizando el cambio de índice $m = n - n_0$:

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n-n_0]\exp\left(-j\frac{2kn\pi}{N}\right) = \frac{1}{N}\sum_{m=-n_0}^{N-n_0-1} x[m]\exp\left(-j\frac{2k(m+n_0)\pi}{N}\right) \\ &= \exp\left(-j\frac{2kn_0\pi}{N}\right)\frac{1}{N}\sum_{m=-n_0}^{N-n_0-1} x[m]\exp\left(-j\frac{2km\pi}{N}\right) \\ &= \exp\left(-j\frac{2kn_0\pi}{N}\right)\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\exp\left(-j\frac{2km\pi}{N}\right) = c_k\exp\left(-j\frac{2kn_0\pi}{N}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

En la última linea hemos tenido en cuenta que tanto la señal $x[n]$ como la exponencial compleja son periódicas de período N, y por tanto el sumatorio en cualquier período completo será siempre idéntico al sumatorio entre 0 y N. Al igual que ocurría en el caso de variable

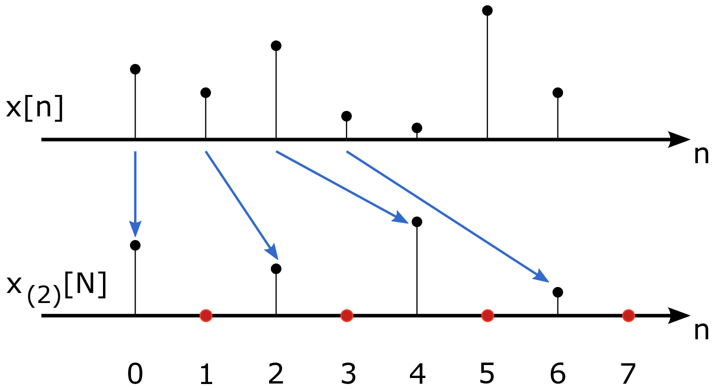

Figura 1: Construcción de la señal $x_{(M)}[n]$ (x módulo M) a partir de la señal original $x[n]$. En este caso se ha elegido $M = 2$, con lo cual una de cada 2 muestras de $x_{(M)}[n]$ corresponde a una muestra de $x[n]$, y el resto son simplemente 0. Esta definición es válida tanto para señales periódicas como no periódicas.

continua, tenemos una modulación por una exponencial compleja. Pero al contrario que en el desarrollo en serie de Fourier continuo ahora esta exponencial **sí es siempre periódica:** como hemos mencionado antes, los coeficientes de la serie de Fourier discreta son a su vez una secuencia periódica; en este caso tenemos el producto de los c_k (periódicos) por una exponencial compleja, así que ésta debe ser necesariamente periódica.

Inversión en el tiempo. Si ahora $y[n] = x[-n]$:

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[-n]\exp\left(-j\frac{2kn\pi}{N}\right) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{-(N-1)} x[m]\exp\left(j\frac{2k(-m)\pi}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=-(N-1)}^{0} x[m]\exp\left(j\frac{2k(-m)\pi}{N}\right) = c_{-k}; \end{aligned} \tag{12}$$

los límites del sumatorio pueden intercambiarse ya que el orden en que sumemos los N términos es irrelevante (**no hay que cambiar el signo del sumatorio**).

Escalado temporal. En este caso el escalado ha de interpretarse de una forma diferente. Obviamente no tiene sentido hacer $x[n/M]$, ya que en general n/M no será un número entero. En lugar de ello, podemos definir la señal "x módulo M" como:

$$x_{(M)}[n] = \begin{cases} x[n/M], & \text{si } n \text{ es múltiplo de } M \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases} \tag{13}$$

es decir: cada M muestras de $x_{(M)}[n]$ tomamos una muestra de la señal original, poniendo a 0 el resto[2]. La figura 1 muestra gráficamente este proceso. Si $y[n] = x_{(M)}[n]$, es importante

[2]Esta forma de construir la señal pueda parecer artificial pero tiene un enorme interés, aunque no podemos explicar por qué antes de ver el tema correspondiente al muestreo de señales continuas. No obstante, intuitivamente podemos decir que esta construcción interviene en la interpolación o aumento de resolución (sobremuestreo o *upsampling*). Por ejemplo, cuando a partir de una fotografía digital queremos aumentar la resolución (número de píxeles por pulgada cuadrada) de ésta.

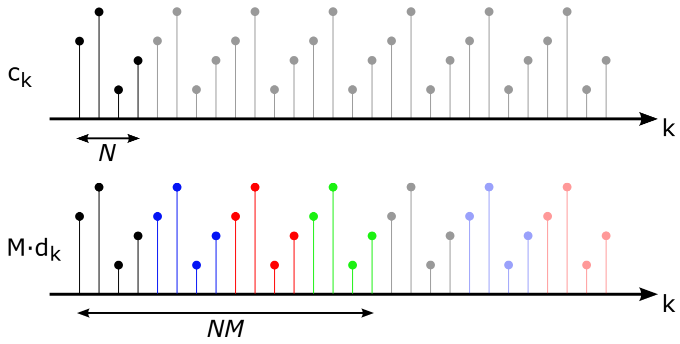

Figura 2: Relación entre los coeficientes de Fourier de $x_{(M)}[n]$ y los de $x[n]$. Los coeficientes c_k de $x[n]$ se repiten M veces hasta completar el período de longitud MN (en la figura, $N = 4$ y $M = 3$), aunque el período fundamental sigue siendo N.

notar que el nuevo período de la señal será MN. Los coeficientes de la serie serán por tanto:

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{NM-1} x_{(M)}[n]\exp\left(-j\frac{2kn\pi}{MN}\right) \\ &= \frac{1}{MN}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} x_{(M)}[lM+m]\exp\left(-j\frac{2k(lM+m)\pi}{MN}\right); \end{aligned} \tag{14}$$

simplemente hemos transformado el sumatorio en un sumatorio doble introduciendo un cambio de índice: $n = lM + m$. Nótese que: $l = 0, m = 0 \Rightarrow n = 0$; $l = N-1, m = M-1 \Rightarrow n = NM-1$, y por tanto el doble sumatorio inferior incluye todos los índices del sumatorio original. Ahora bien, sólo cuando $m = 0$ el índice $n = lM + n$ será múltiplo de M. Para otros valores de m, la señal $x_{(M)}[lM + n]$ será nula, y por tanto esta expresión se reduce a:

$$d_k = \frac{1}{MN}\sum_{l=0}^{N-1} x_{(M)}[lM]\exp\left(-j\frac{2klM\pi}{MN}\right) = \frac{1}{MN}\sum_{l=0}^{N-1} x[l]\exp\left(-j\frac{2kl\pi}{N}\right) = \frac{1}{M}c_k. \tag{15}$$

Pero la señal $x_{(M)}[n]$ tiene período MN, y por tanto MN coeficientes de Fourier d_k, mientras que $x[N]$ tendrá sólo N coeficientes c_k. Esto no es ninguna contradicción: para $k \geq N$, podremos escribir $k = Nm + k'$, $0 \leq m < M, 0 \leq k' < N$, donde k' es el resto entero de dividir k entre N que denotaremos por $k' = k(\text{mod})N$ ("k módulo N"). Entonces:

$$d_k = d_{Nm+k'} = \frac{1}{M}c_{Nm+k'} = \frac{1}{M}c_{k'} = \frac{1}{M}c_{k(\text{mod})N}, \tag{16}$$

ya que c_k es periódica de período N. Concluimos pues que la serie de Fourier de $x_{(M)}[n]$ tiene tan sólo N coeficientes diferentes, que se repiten M veces hasta completar el período completo. En otras palabras: aunque los coeficientes de la serie de $x_{(M)}[n]$ deben ser periódicos de período MN (el mismo que la propia señal), el período fundamental de dichos coeficientes es N. Esta situación se describe en la figura 2.

Conjugación. Si $y[n] = x[n]^*$:

$$d_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]^*\exp\left(-j\frac{2kn\pi}{N}\right) = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(j\frac{2kn\pi}{N}\right)\right)^* = c_{-k}^*. \tag{17}$$

Modulación. Modulamos $x[n]$ con una exponencial compleja discreta. Para que la serie de Fourier tenga sentido, esta exponencial compleja ha de ser también periódica de período N, es decir, para algún **entero** M tenemos $y[n] = \exp(jM(2n\pi)/N)x[n]$. Entonces:

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(jM\frac{2n\pi}{N}\right)\exp\left(-j\frac{2kn\pi}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-j\frac{2(k-M)n\pi}{N}\right) = c_{k-M}. \end{aligned} \tag{18}$$

Multiplicación. Si $z[n] = x[n]y[n]$:

$$\begin{aligned} e_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y[n]\exp\left(-j\frac{2kn\pi}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\sum_{l=0}^{N-1} d_l\exp\left(j\frac{2ln\pi}{N}\right)\right)\exp\left(-j\frac{2kn\pi}{N}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} d_l\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-j\frac{2(k-l)n\pi}{N}\right) = \sum_{l=0}^{N-1} d_l c_{k-l}, \end{aligned} \tag{19}$$

que es la convolución **periódica** de las señales discretas periódicas formadas por los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier discreto de $x[n]$ e $y[n]$.

Convolución periódica. De manera dual a la propiedad anterior, si $z[n]$ es la convolución periódica de $x[n]$ e $y[n]$:

$$\begin{aligned} e_k &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{l=0}^{N-1} x[l]y[n-l]\right)\exp\left(-j\frac{2kn\pi}{N}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x[l]\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y[n-l]\exp\left(-j\frac{2kn\pi}{N}\right) = \sum_{l=0}^{N-1} x[l]d_k\exp\left(-j\frac{2kl\pi}{N}\right) \\ &= Nd_k\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} x[l]\exp\left(-j\frac{2kl\pi}{N}\right) = Nc_kd_k. \end{aligned} \tag{20}$$

En la segunda linea hemos utilizado la propiedad de desplazamiento temporal.

Diferenciación. Recordemos que el operador análogo a la derivada en variable continua es el operador diferenciación: $y[n] = x[n]-x[n-1]$. Combinando las propiedades de desplazamiento temporal y linealidad resulta evidente que:

$$d_k = \left(1-\exp\left(-j\frac{2k\pi}{N}\right)\right)c_k. \tag{21}$$

Sumatorio. La operación inversa de la anterior es el sumatorio: $y[n] = \sum_{l=0}^{n} x[l]$. Esta operación tiene sentido (para señales periódicas) sólo si el valor medio en un período es 0; de otra forma, el sumatorio sería infinito al irse acumulando el valor medio de cada período desde $l = -\infty$. Como veremos más adelante, esto se traduce en que el coeficiente c_0 debe ser 0. De nuevo podemos usar las propiedades de linealidad y desplazamiento temporal y despejar el valor de d_k:

$$d_k = \frac{1}{1 - \exp\left(-j\frac{2k\pi}{N}\right)} c_k, \tag{22}$$

de acuerdo con la idea de que ambos operadores (diferenciación y sumatorio) son inversos.

Dualidad. En el caso de la transformada de Fourier en tiempo continuo, obteníamos una señal en tiempo continuo a partir de otra señal del mismo tipo. Dada la similitud entre las ecuaciones de análisis y de síntesis, fuimos capaces de encontrar una relación sencilla entre pares transformados. En el caso del desarrollo en serie de Fourier en tiempo discreto la idea es la misma: obtenemos una señal discreta periódica de período N a partir de otra señal de la misma clase. Si retomamos la notación $c[k] \equiv c_k$, tenemos:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c[k] \exp\left(j\frac{2kn\pi}{N}\right) = N \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c[k] \exp\left(-j\frac{2k(-n)\pi}{N}\right); \tag{23}$$

intercambiando los índices k y n:

$$x[k] = N \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} c[n] \exp\left(-j\frac{2n(-k)\pi}{N}\right), \tag{24}$$

y por tanto la señal **periódica** $x[n]$ representa los coeficientes de Fourier de la señal **periódica** $c[k] \equiv c_k$ reflejados y escalados por la longitud del período.

Valor medio. Es trivial demostrar que el coeficiente c_0 es precisamente el valor medio de la señal en un período:

$$c_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]. \tag{25}$$

Relación de Parseval. Utilizar un procedimiento análogo al que se llevó a cabo en el tema anterior para deducir la relación de Parseval para la transformada de Fourier continua, y concluir que se verifica:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 . \tag{26}$$

Ejercicio: Deducir las propiedades que han de cumplir los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier discreto para señales simétricas (reales, imaginarias puras, pares, impares, hermíticas y antihermíticas).

RESUMEN. La Tabla 1 describe brevemente las propiedades que hemos enunciado.

4. Transformada de Fourier en tiempo discreto

La forma de deducir las ecuaciones de análisis y síntesis de la transformada de Fourier en tiempo discreto es completamente análoga a lo visto en el tema anterior en el caso continuo. En primer lugar, consideremos que en la serie de Fourier discreta usamos los N armónicos periódicos básicos $\exp(2k\pi/N \cdot n)$, para $k = 0 \ldots N-1$. Es fácil darse cuenta de que estos armónicos $\exp(j\Omega n)$ corresponden a N frecuencias angulares Ω equiespaciadas entre 0 y 2π, por grande que sea N.

Recordemos que en tiempo continuo necesitábamos frecuencias angulares arbitrariamente grandes (entre $-\infty$ e ∞). En el caso discreto sólo necesitamos las frecuencias entre 0 y 2π. Por otro lado, hemos visto que la serie de Fourier discreta es una secuencia discreta periódica en k de período N. De igual modo, la transformada de Fourier en tiempo discreto será periódica de período 2π.

Como en el tema anterior, a partir de una señal $x[n]$ de energía y por tanto no periódica construimos su extensión periódica de período N, $x_p[n]$:

$$x_p[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-mN] \Rightarrow x[n] = \lim_{N\to\infty} x_p[n]. \tag{27}$$

La serie de Fourier de $x_p[n]$ quedará descrita por:

$$x_p[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp\left(j\frac{2k\pi}{N}n\right), \tag{28}$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] \exp\left(-j\frac{2k\pi}{N}n\right). \tag{29}$$

O bien, si introducimos unos coeficientes no normalizados $X[k] \equiv X_k = Nc_k$:

$$x_p[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X[k]}{N} \exp\left(j\frac{2k\pi}{N}n\right), \tag{30}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] \exp\left(-j\frac{2k\pi}{N}n\right). \tag{31}$$

Manipulando la ecuación (30) podemos obtener:

$$x_p[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X[k]}{N} \exp\left(j\frac{2k\pi}{N}n\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{2\pi}{N} X[k] \exp\left(j\frac{2k\pi}{N}n\right), \tag{32}$$

donde $2\pi/N$ es precisamente el espaciado entre las frecuencias angulares de los armónicos. De nuevo, la ecuación anterior se puede ver como la suma de Riemann de la integral de una cierta función de variable continua entre 0 y 2π, de modo que:

$$\lim_{N\to\infty} x_p[n] = x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)\exp(j\Omega n)\,d\Omega, \tag{33}$$

que será la correspondiente ecuación de síntesis. Para la ecuación de análisis, simplemente identificamos términos en la ecuación (31) y concluimos:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\exp(-j\Omega n)\,. \tag{34}$$

4.1. Relación con la serie de Fourier discreta

Siguiendo con el paralelismo con el tema anterior, deberíamos deducir la relación entre los coeficientes de la serie de Fourier discreta y la transformada de Fourier de su período fundamental. Atendiendo a la definición de los coeficientes:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p[n]\exp\left(-j\frac{2k\pi}{N}n\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\exp\left(-j\frac{2k\pi}{N}n\right) = \frac{1}{N}X\left(\frac{2k\pi}{N}\right). \tag{35}$$

4.2. Periodicidad de la transformada de Fourier en tiempo discreto

En la deducción de las ecuaciones de análisis y síntesis hemos considerado los períodos fundamentales entre 0 y $N-1$, obteniendo una integral entre 0 y 2π. Si hubiésemos elegido los armónicos entre $-N/2$ y $N/2-1$ (suponiendo N par), que sabemos que son equivalentes debido a la ambigüedad de las exponenciales complejas discretas, habríamos obtenido una integral entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. En realidad, es trivial demostrar que la transformada de Fourier en tiempo continuo es periódica de período 2π:

$$X(\Omega+2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\exp(-j(\Omega+2\pi)n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\exp(-j\Omega n) = X(\Omega)\,; \tag{36}$$

dada esta periodicidad, la integral que define la ecuación de síntesis puede extenderse a cualquier período, de modo que las ecuaciones de análisis y síntesis se pueden escribir de la forma:

$$\begin{aligned} &\textbf{análisis:} \qquad X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\exp(-j\Omega n)\,; \\ &\textbf{síntesis:} \qquad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(\Omega)\exp(j\Omega n)\,d\Omega. \end{aligned} \tag{37}$$

4.3. Convergencia de la transformada de Fourier en tiempo discreto

En general podemos decir que las ecuaciones de análisis y síntesis serán válidas en sentido estricto para señales absolutamente sumables:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty. \tag{38}$$

Esta condición supone a su vez que la señal $x[n]$ es de energía finita:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty. \tag{39}$$

Como siempre, el formalismo de la trasformada de Fourier puede extenderse a otro tipo de señales mediante el uso de distribuciones delta de Dirac.

5. Propiedades de la transformada de Fourier

Las propiedades son las de costumbre. En lo que sigue, consideramos las señales no periódicas (y en principio de energía) $x[n]$, $y[n]$ y $z[n]$ con transformadas de Fourier respectivas $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ y $Z(\Omega)$. Podemos enunciar las siguientes propiedades:

Linealidad. Si $z[n] = \alpha x[n] + \beta y[n]$, entonces $Z(\Omega) = \alpha(\Omega) + \beta Y(\Omega)$.

Desplazamiento temporal. Si $y[n] = x[n - n_0]$:

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0] \exp(-j\Omega n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \exp(-j\Omega(m+n_0)) \\ &= \exp(-j\Omega n_0) \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \exp(-j\Omega m) = \exp(-j\Omega n_0) X(\Omega), \end{aligned} \tag{40}$$

donde se ha hecho el cambio $m = n - n_0$. Como siempre el desplazamiento temporal se traduce en una modulación (nótese que $Y(\Omega)$ sigue siendo periódica de período 2π).

Inversión en el tiempo. Si $y[n] = x[-n]$, haciendo $m = -n$:

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] \exp(-j\Omega n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \exp(-j(-\Omega)m) = X(-\Omega). \tag{41}$$

Escalado temporal. El mismo comentario del tema anterior sigue siendo válido. Con señales discretas no podemos hablar de escalado propiamente dicho, sino de la señal x módulo M. Si

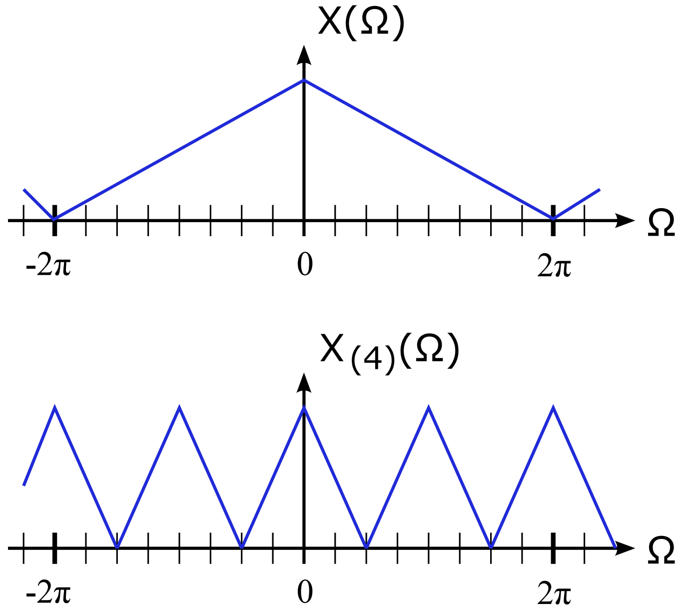

Figura 3: Relación del espectro de $x[n]$, $X(\Omega)$, con el de $x_{(M)}[n]$, $X_{(M)}(\Omega)$. Para la ilustración se ha elegido $M = 4$.

$y[n] = x_{(M)}[n]$, atendiendo a la definición de esta señal, tenemos:

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(M)}[n] \exp(-j\Omega n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{M-1} x_{(M)}[pM+q] \exp(-j\Omega(pM+q)) \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_{(M)}[pM] \exp(-j\Omega pM) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p] \exp(-j(M\Omega)p) = X(M\Omega). \end{aligned} \tag{42}$$

Al igual que ocurría con la serie de Fourier, $Y(\Omega)$ sigue siendo periódica de período 2π, aunque el período fundamental es $2\pi/M$. El espectro de $Y(\Omega)$ será el resultado de comprimir el de $X(\Omega)$ por un factor M y replicarlo M veces hasta completar un período de longitud 2π. Esta situación se representa en la figura 3.

Conjugación. Si $y[n] = x[n]^*$:

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]^* \exp(-j\Omega n) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(j\Omega n) \right)^* = Y(-\Omega)^*. \tag{43}$$

Modulación. Si $y[n] = x[n] \exp(j\Omega_0 n)$:

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(j\Omega_0 n) \exp(-j\Omega n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j(\Omega - \Omega_0)n) = X(\Omega - \Omega_0), \end{aligned} \tag{44}$$

que de nuevo es la propiedad dual al desplazamiento temporal.

Multiplicación. Si $z[n] = x[n]y[n]$:

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]\exp(-j\Omega n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y(s)\exp(jsn)\,ds\right)\exp(-j\Omega n) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y(s)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\exp(-j(\Omega-s)n)\right)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y(s)X(\Omega-s)ds, \end{aligned} \tag{45}$$

que es la convolución **periódica** de $X(\Omega)$ e $Y(\Omega)$ (nótese que podríamos haber elegido cualquier período de integración).

Convolución. Si, por el contrario, $z[n] = x[n] * y[n]$:

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[n-m]\right)e^{-j\Omega n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-m]e^{-j\Omega n}\right) \\ &= Y(\Omega)\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\exp(-j\Omega m) = Y(\Omega)X(\Omega), \end{aligned} \tag{46}$$

usando la propiedad de desplazamiento temporal. De nuevo, la transformada de Fourier nos permite convertir la convolución que define la relación entrada/salida de un sistema LTI en un producto de espectros, con todas las implicaciones que ello conlleva y que vimos en el tema anterior.

Diferenciación. Si $y[n] = x[n] - x[n-1]$, usamos las propiedades de linealidad y desplazamiento temporal para concluir:

$$Y(\Omega) = (1 - \exp(-j\Omega))\,X(\Omega). \tag{47}$$

Sumatorio. A la inversa, si $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{1-\exp(-j\Omega)}X(\Omega) + \pi X(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - 2k\pi)\,. \tag{48}$$

Producto por n. Si $y[n] = nx[n]$:

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]\exp(-j\Omega n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{-1}{j}\frac{d}{d\Omega}\exp(-j\Omega n)\,, \tag{49}$$

e identificando términos vemos que $Y(\Omega) = (-j)^{-1}\frac{d}{d\Omega}X(\Omega) = j\frac{d}{d\Omega}X(\Omega)$. Aunque no se enunció en el tema anterior, esta propiedad tiene su análoga en el caso de variable continua. Se deja como **ejercicio** demostrarla para la transformada de Fourier continua, usando las propiedades de derivación y dualidad, así como deducir las propiedades correspondientes para las series de Fourier.

Valor medio. Como siempre, resulta trivial demostrar que el valor medio de $x[n]$ es $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = X(0)$.

Relación de Parseval. La energía de la señal $x[n]$ puede expresarse en términos del valor medio de la señal $y[n] = x[n]x[n]^*$; utilizando las propiedades de conjugación y multiplicación podemos calcular el espectro de esta última señal, que resulta ser:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(s)X\left(-(\Omega - s)\right)^* ds; \tag{50}$$

la energía de $x[n]$ será el valor medio de $y[n]$, o bien $Y(0)$:

$$\|x[n]\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = Y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} |X(\Omega)|^2 \, d\Omega. \tag{51}$$

Ejercicio: Deducir las propiedades que han de cumplir los coeficientes de la transformada de Fourier en tiempo discreto para señales simétricas (reales, imaginarias puras, pares, impares, hermíticas y antihermíticas).

RESUMEN. La Tabla 2 describe brevemente las propiedades que hemos enunciado.

6. Ejemplos de transformadas de Fourier en tiempo discreto

6.1. Impulso discreto en el origen

Comencemos considerando la señal $x[n] = \delta[n]$, que vale 1 para $n = 0$ y 0 de otra forma. Su transformada será:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] \exp(-j\Omega n) = \exp(-j\Omega \cdot 0) = 1, \tag{52}$$

de igual forma que en la transformada continua. Nótese que una constante es periódica para cualquier período T, y en particular para $T = 2\pi$. Por el contrario, si $X(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega)$ **para** $0 \leq \Omega < 2\pi$, tendremos[3]:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega) \exp\left(j\Omega n\right) d\Omega = 1. \tag{53}$$

[3]Es muy importante notar que la transformada de Fourier en tiempo discreto **debe ser periódica de período** 2π; por tanto, esta descripción de $X(\Omega)$ se refiere sólo al período fundamental. La señal completa quedaría descrita como: $X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - 2k\pi)$, atendiendo a este carácter periódico.

6.2. Pulso cuadrado

Si ahora consideramos un pulso cuadrado de la forma:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N; \\ 0 & |n| > N, \end{cases} \tag{54}$$

su transformada será:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j\Omega n) = \sum_{n=-N}^{N} \exp(-j\Omega n) \\ &= \frac{\exp(j\Omega)\exp(j\Omega N) - \exp(-j\Omega N)}{\exp(j\Omega) - 1} \\ &= \frac{\exp(j\Omega/2)\exp(j\Omega N) - \exp(-j\Omega/2)\exp(-j\Omega N)}{\exp(j\Omega/2) - \exp(-j\Omega/2)} \\ &= \frac{2j\sin(\Omega(N+1/2))}{2j\sin(\Omega/2)} = \frac{\sin(\Omega(N+1/2))}{\sin(\Omega/2)}, \end{aligned} \tag{55}$$

donde se ha usado la fórmula de sumación de una progresión geométrica y se ha multiplicado numerador y denominador por $\exp(-j\Omega/2)$.

6.3. Exponencial decreciente

Finalmente, si consideramos una exponencial decreciente del tipo $x[n] = r^n u[n]$, $|r| < 1$:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j\Omega n) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \exp(-j\Omega n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (r\exp(-j\Omega))^n = \frac{1}{1 - r\exp(-j\Omega)}, \end{aligned} \tag{56}$$

usando de nuevo la fórmula de sumación de una progresión geométrica.

7. Transformada de Fourier de una señal periódica discreta

En el caso de señales periódicas, hemos visto que podemos utilizar la serie de Fourier discreta, dando lugar a la representación:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp\left(j\frac{2k\pi}{N}n\right). \tag{57}$$

A partir de la transformada de una constante, y usando propiedades básicas, es sencillo comprobar que la transformada de Fourier en tiempo discreto de una exponencial compleja periódica como las que forman la base de Fourier es $\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - 2k\pi/N - 2l\pi)$. El sumatorio en l hace que la transformada sea periódica de período 2π. Teniendo en cuenta la linealidad de la transformada de Fourier, podremos escribir:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta\left(\Omega - 2k\pi/N - 2l\pi\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\Omega - \frac{2(k+Nl)\pi}{N}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi c_{k+Nl} \delta\left(\Omega - \frac{2(k+Nl)\pi}{N}\right), \end{aligned} \tag{58}$$

ya que los coeficientes de la serie de Fourier son periódicos de período N. El último sumatorio recorre los índices $k + Nl$, para $0 \leq k < N$ y $-\infty < l < \infty$. Es sencillo comprobar que el índice así construido barre todos los números enteros entre $-\infty$ e ∞, y por tanto el doble sumatorio es equivalente a:

$$X(\Omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} 2\pi c_p \delta\left(\Omega - \frac{2p\pi}{N}\right), \tag{59}$$

que es la expresión final de la transformada. Al igual que ocurría en el caso continuo, sólo necesitamos un subconjunto de armónicos a frecuencias equiespaciadas. Nótese que al ser periódicos de período N los c_k, $X(\Omega)$ sigue siendo periódica de período 2π.

8. Respuesta en frecuencia de sistemas LTI discretos

La transformada de Fourier permite también en el caso discreto simplificar notablemente el análisis de sistemas lineales e invariantes. El principal motivo para ello es la propiedad que permite transformar las convoluciones temporales en productos de los espectros. Tal y como vimos en el tema anterior, esta propiedad responde precisamente al hecho de que las exponenciales complejas son autofunciones de cualquier sistema LTI. Si representamos por $y[n] = \mathcal{H}\{x[n]\}$ la salida del sistema LTI cuando a la entrada de éste introducimos la señal $x[n]$, podemos usar la interpretación de la transformada de Fourier en tiempo discreto como superposición de armónicos, y concluir:

$$y[n] = \mathcal{H}\{x[n]\} = \mathcal{H}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)\exp\left(j\Omega n\right) d\Omega\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)\mathcal{H}\{\exp\left(j\Omega n\right)\}d\Omega, \tag{60}$$

sin más que tener en cuenta la linealidad del operador. Como la exponencial compleja es autofunción de cualquier sistema LTI, podremos escribir:

$$y[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)H(\Omega)\exp\left(j\Omega n\right) d\Omega. \tag{61}$$

Es decir, $y[n]$ se representa mediante la misma combinación lineal de armónicos que hay a la entrada, pero al pasar éstos por el sistema LTI ven modificada su amplitud (y su fase) por un factor $H(\Omega)$, el autovalor, que depende de la frecuencia. Como vimos en el tema anterior esta interpretación puede usarse para diseñar filtros selectivos en frecuencia, en este caso para señales en tiempo discreto.

8.1. Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias

En el tema 3 vimos que los sistemas descritos por ecuaciones en diferencias son un subconjunto de especial importancia dentro de los sistemas LTI. Recordemos que en general pueden describirse con la ecuación:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k], \tag{62}$$

siendo N el orden de la ecuación. Utilizando la propiedad de desplazamiento temporal, vemos que la ecuación anterior se traduce en la siguiente relación entre transformadas de Fourier:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} a_k Y(\Omega) \exp(-jk\Omega) &= \sum_{k=0}^{M} b_k X(\Omega) \exp(-jk\Omega) \\ &\Rightarrow \ H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \exp(-jk\Omega)}{\sum_{k=0}^{N} a_k \exp(-jk\Omega)}. \end{aligned} \tag{63}$$

Esta formulación puede utilizarse para resolver ecuaciones en diferencias de forma sencilla. Por ejemplo, consideremos la ecuación en diferencias dada por la expresión:

$$y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = 2x[n], \tag{64}$$

cuya solución deseamos obtener cuando $x[n]$ es una función escalón: $x[n] = u[n]$. De acuerdo a lo anterior, la respuesta en frecuencia de este sistema LTI será:

$$H(\Omega) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}\exp(-j\Omega) + \frac{1}{8}\exp(-j2\Omega)} = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\exp(-j\Omega)\right)\left(1 - \frac{1}{4}\exp(-j\Omega)\right)}. \tag{65}$$

Nos interesa factorizar el denominador en términos de la forma mostrada, ya que éstos corresponden a exponenciales decrecientes como se vio en la sección 6.3. La transformada de Fourier $Y(\Omega)$ de la salida del sistema se calculará como el producto de su respuesta en frecuencia por la transformada de la entrada, $X(\Omega)$, que en este ejemplo concreto es una función escalón. Esta transformada de Fourier puede calcularse de forma sencilla a partir de la transformada del impulso discreto $\delta[n]$ y usando la propiedad del sumatorio:

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - \exp(-j\Omega)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\Omega - 2k\pi). \tag{66}$$

Nótese que el tren de deltas corresponde al carácter periódico de la transformada de Fourier en tiempo discreto (el primer término es evidentemente periódico). Por tanto, la salida del sistema podrá calcularse en el dominio transformado de Fourier como:

$$
\begin{aligned}
Y(\Omega) &= H(\Omega)X(\Omega) \\
&= \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)}\left(\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\Omega-2k\pi)\right) \\
&= \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)\left(1-e^{-j\Omega}\right)}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi\delta(\Omega-2k\pi)}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j2k\pi}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j2k\pi}\right)} \\
&= \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)\left(1-e^{-j\Omega}\right)}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi\delta(\Omega-2k\pi)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}} \\
&= \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)\left(1-e^{-j\Omega}\right)}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{16\pi}{3}\delta(\Omega-2k\pi); \qquad (67)
\end{aligned}
$$

se ha usado la propiedad de selección de la distribución delta de Dirac y el hecho de que $\exp(-j2k\pi) = 1,\ \forall k$. Respecto al primer término, podemos descomponerlo como suma de tres fracciones simples (no se dan detalles de cómo realizar esta descomposición ya que se considera que ésta es una técnica conocida):

$$
Y(\Omega) = \frac{-4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{2/3}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}+\frac{16/3}{1-e^{-j\Omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{16\pi}{3}\delta(\Omega-2k\pi); \qquad (68)
$$

Los dos últimos sumandos corresponden a una función escalón pesada por $\pi/3$, como se ha dicho más arriba. Los otros dos sumandos pueden identificarse con exponenciales decrecientes según lo expuesto en la sección 6.3. Por tanto:

$$
y[n] = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]+\frac{16}{3}u[n]. \qquad (69)
$$

Nótese que la salida obtenida es evidentemente causal, ya que tanto el sistema LTI como la entrada lo son. Se deja como ejercicio comprobar que la expresión anterior es realmente la solución de la ecuación en diferencias (64).

Propiedad	Dominio del tiempo	Coeficientes de la serie
Linealidad	$z[n] = \alpha x[n] + \beta y[n]$	$e_k = \alpha c_k + \beta d_k$
Desplazamiento	$y[n] = x[n - n_0]$	$d_k = \exp\left(-j\frac{2kn_0\pi}{N}\right) c_k$
Inversión	$y[n] = x[-n]$	$d_k = c_{-k}$
Escalado[1]	$y[n] = x_{(M)}[n]$	$d_k = \frac{1}{M} c_{k(\mathrm{mod})M}$
Conjugación	$y[n] = x[n]^*$	$d_k = c^*_{-k}$
Modulación	$y[n] = x[n] \exp\left(jM\frac{2n\pi}{T}\right)$	$d_k = c_{k-M}$
Multiplicación	$z[n] = x[n]y[n]$	$e_k = \sum_{l=0}^{N-1} c_l d_{k-l}$
Convolución periódica	$z[n] = \sum_{l=0}^{N-1} x[l]y[n-l]$	$e_k = N c_k d_k$
Diferenciación	$y[n] = x[n] - x[n-1]$	$d_k = \left(1 - \exp\left(-j\frac{2k\pi}{N}\right)\right) c_k$
Sumatorio[2]	$y[n] = \sum_{l=-\infty}^{n} x[l]$	$d_k = \left(1 - \exp\left(-j\frac{2k\pi}{N}\right)\right)^{-1} c_k$
Dualidad	$x[n] \longrightarrow c_k \equiv c[k]$	$c[n] \longrightarrow \frac{1}{N} x_{-k} \equiv \frac{1}{N} x[-k]$
Valor medio	$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]$	c_0
Relación de Parseval	$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x[n]\rvert^2$	$\sum_{k=0}^{N-1} \lvert c_k\rvert^2$
Señales simétricas	$x[n] = x[-n]$	$c_k = c_{-k}$
	$x[n] = -x[-n]$	$c_k = -c_{-k}$
	$x[n] = x[-n]^*$	$\Im\{c_k\} = 0$
	$x[n] = -x[-n]^*$	$\Re\{c_k\} = 0$

[1] *En este caso no podemos hablar de escalado propiamente dicho, ya que necesitaríamos muestras en posiciones fraccionarias de $x[n]$ (éstas se sustituyen por ceros). Además, hay que tener en cuenta que el período de la señal $y[n]$ resultante es $N' = MN$.*

[2] *Es necesario que se cumpla: $c_0 = 0$.*

Cuadro 1: Resumen de propiedades del desarrollo en serie de Fourier discreto. Asumimos que $x[n]$, $y[n]$ y $z[n]$ son señales periódicas todas ellas con idéntico período, N, y los coeficientes de sus series de Fourier son respectivamente c_k, d_k y e_k.

Propiedad	**Dominio del tiempo**	**Transformada de Fourier**
Linealidad	$z[n] = \alpha x[n] + \beta y[n]$	$Z(\Omega) = \alpha X(\Omega) + \beta Y(\Omega)$
Desplazamiento	$y[n] = x[n - n_0]$	$Y(\Omega) = \exp(-j\Omega n_0) X(\Omega)$
Inversión	$y[n] = x[-n]$	$Y(\Omega) = X(-\Omega)$
Escalado[1]	$y[n] = x_{(M)}[n]$	$Y(\Omega) = X(M\Omega)$
Conjugación	$y[n] = x[n]^*$	$Y(\Omega) = X(-\Omega)^*$
Modulación	$y[n] = x[n]\exp(j\Omega_0 n)$	$Y(\Omega) = X(\Omega - \Omega_0)$
Multiplicación	$z[n] = x[n]y[n]$	$Z(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(s)Y(\Omega - s)ds$
Convolución	$z[n] = x[n] * y[n]$	$Z(\Omega) = X(\Omega)Y(\Omega)$
Diferenciación	$y[n] = x[n] - x[n-1]$	$Y(\Omega) = (1 - \exp(-j\Omega)) X(\Omega)$
Sumatorio	$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$	$\begin{aligned} Y(\Omega) &= (1 - \exp(-j\Omega))^{-1} X(\Omega) \\ &+ \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2k\pi) \end{aligned}$
Producto por n	$y[n] = nx[n]$	$j\frac{d}{d\Omega}X(\Omega)$
Valor medio	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$	$X(0)$
Relación de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2$	$\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \lvert X(\Omega)\rvert^2 d\Omega$
Señales simétricas	$x[n] = x[-n]$	$X(\Omega) = X(-\Omega)$
	$x[n] = -x[-n]$	$X(\Omega) = -X(-\Omega)$
	$x[n] = x[-n]^*$	$\Im\{X(\Omega)\} = 0$
	$x[n] = -x[-n]^*$	$\Re\{X(\Omega)\} = 0$

[1] *En este caso no podemos hablar de escalado propiamente dicho, ya que necesitaríamos muestras en posiciones fraccionarias de $x[n]$ (éstas se sustituyen por ceros).*

Cuadro 2: Resumen de propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto. Asumimos que $x[n]$, $y[n]$ y $z[n]$ tienen transformadas respectivas $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ y $Z(\Omega)$.