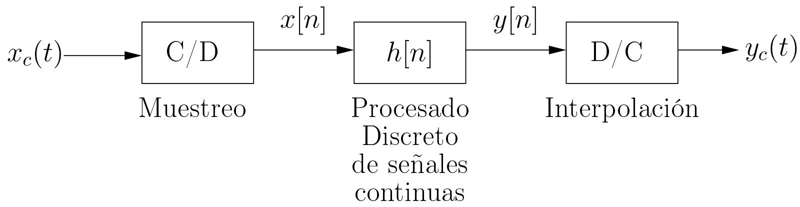
Sistemas Lineales

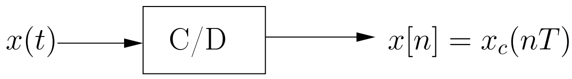
Tema 5. Muestreo

1 Introducción

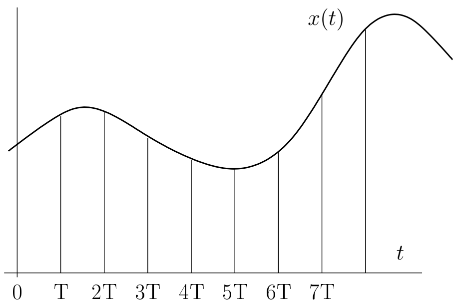
Trabajamos con sistemas discretos porque es más útil trabajr con precesadores digitales. Para ello va a ser necesario definir un proceso que treanforme las señales continuas en señales discretas. Dicho proceso se conoce como *muestreo*, y se puede resumir en la siguiente figura:



2 Muestreo y teorema del muestreo

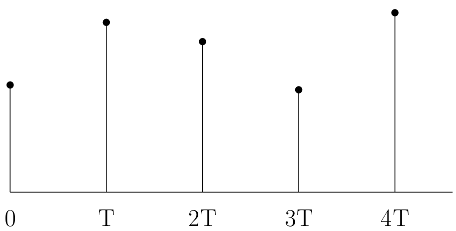


Partimos de una señal continua a la que llamaremos $x_c(t)$. Para transformarla en una señal discreta tomamos *muestras* de esta señal separadas un cierto intervalo T:

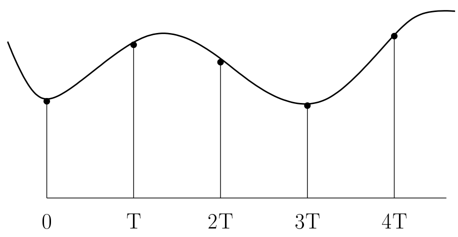


La pregunta es ¿cuántas muestras hay que tomar? ¿Cómo de separadas tienen que estar estas muestras? ¿Habrá un valor de T para el que podamos recuperar toda la información de la señal a partir de las muestras?

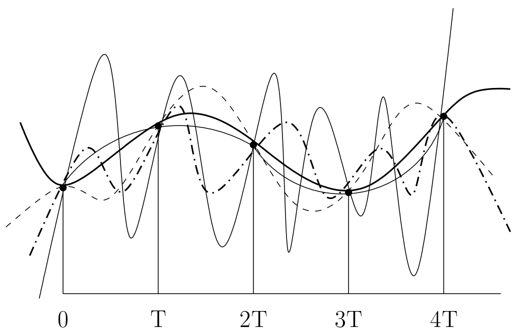
Supongamos que tenemos las siguientes muestras de una señal:



La señal continua que pasa por esas muestras puede ser la siguiente



pero también cualquiera de las siguientes:

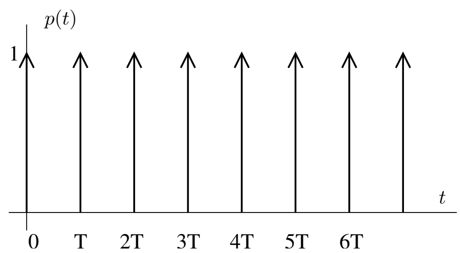


De manera intuitiva parece que no vamos a poder recuperar una señal a partir de sus muestras, ya que por unos puntos dados pasan infinitas señales continuas. Sin embargo, en la práctica, si tomamos un T sufiucientemente pequeño y la señal es de banda limitada, vamos a ser capaces de recuperar toda o casi toda la información de la señal.

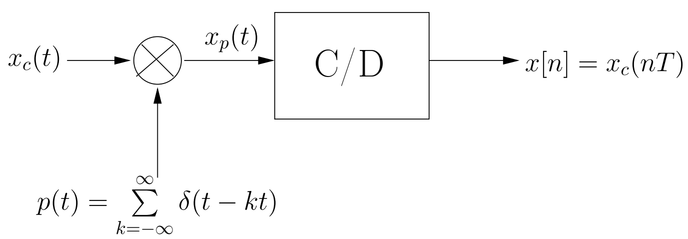
2.1 Muestreo con un tren de impulsos

Vamos a estudiar una clase de muestreo que se conoce como muestreo con un tren de impulsos (o con un tren de deltas). Para ello definimos el tren de impulsos $p(t)$, también llamado *función de muestreo*:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt)$$



sieno T el periodo de muestreo. Definimos la frecuencia de muestreo $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$. El proceso de muestreo de la señal es como sigue:

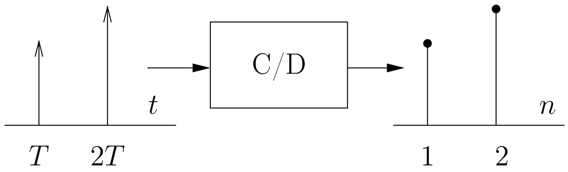


La señal continua $x_c(t)$ se multiplica por un tren de deltas $p(t)$ y da lugar a la *señal muestreada continua* $x_p(t)$. Luego se pasa por un conversor continuo/discreto (bloque C/D) que trasnforma las deltas continuas en deltas discretas.

Veamos el proceso paso a paso de forma analítica:

$$
\begin{aligned}
x_p(t) &= x_c(t)\cdot p(t) = x_c(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT_s)\delta(t-kT)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-kT)
\end{aligned}
$$

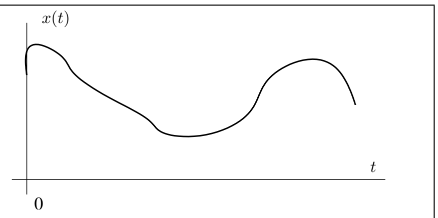
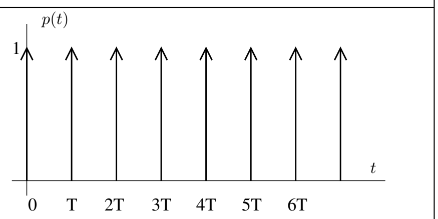
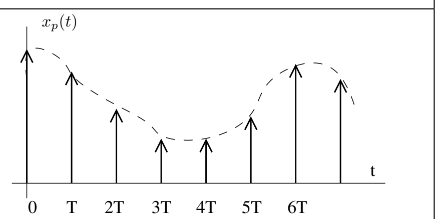
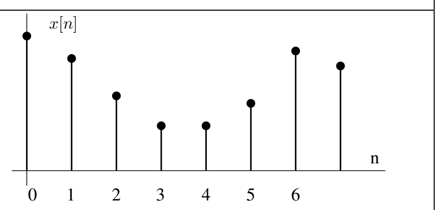
Posteriormente pasamos la señal por un conversor C/D que convierte las deltas continuas en deltas discretas:



de tal modo que a la salida tenemos

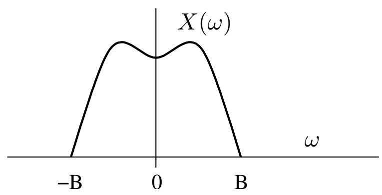
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

A continuación lo representamos desde un punto de vista gráfico:

$x_c(t)$	
$p(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kt)$	
$x_p(t) = x(t)\cdot p(t)$	
$x[n]$	

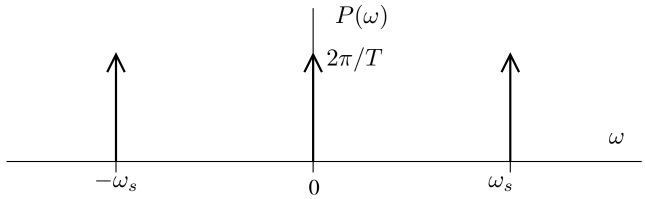
Para comprender mejor las implicaciones de este proceso de muestreo, estudiemos qué ocurre en el dominio de la frecuencia.

Sea una señal $x_c(t)$ con transformada de Fourier $X_c(\omega)$ de banda limitada:



La transformada de Fourier del tren de deltas $p(t)$ va a ser también un tren de deltas $P(\omega)$:

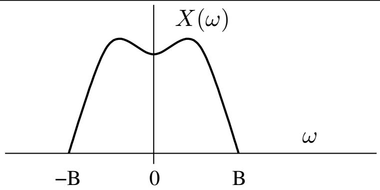
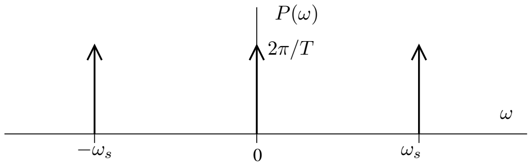
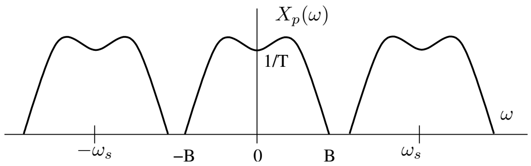
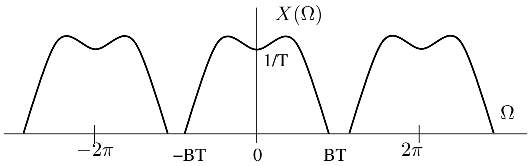
$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$



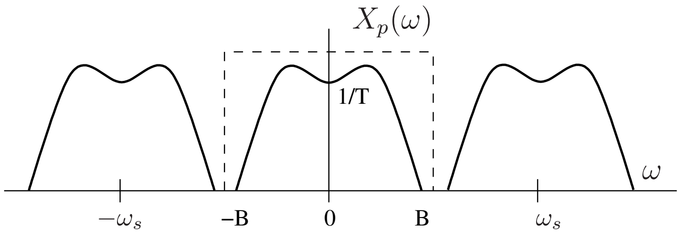
con $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$. De este modo, la transformada de Fourier de la señal muesterada continua $x_p(t)$ queda:

$$\begin{aligned} X_p(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[X_c(\omega) * P(\omega) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[X_c(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \right] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\omega - k\omega_s) \end{aligned}$$

Al muestrear en tiempo, en frecuencia lo que ocurre es que la transformada de Fourier de la señal se duplica en los múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo. Desde un punto de vista gráfico:

$X_c(\omega)$	
$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$	
$X_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\omega - k\omega_s)$	
$X(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\Omega - k2\pi}{T}\right)$	

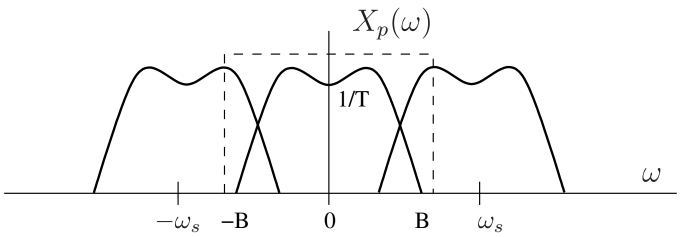
Si observamos las transformadas de Fourier vemos que es equivalente trabajar con $X(\Omega)$ y con $X_p(\omega)$, ya que basicamente son la misma señal escalada por la frecuencia de muestreo. Observemos pues $X_p(\omega)$. En el ejemplo que hemos planteado, vemos que la señal $X_p(\omega)$ contiene a la señal $X_c(\omega)$:



Concretamente, en este caso se cumple que

$$X_c(\omega) = T X_p(\omega) \quad |\omega| < \frac{\omega_s}{2}$$

Así que parece que si vamos a poder recuperar sin problemas la señal $X_c(\omega)$ sin más que filtrar la señal $X_p(\omega)$. Pero, ¿esto va a ser siempre así? Vemos el siguiente ejemplo:



En este caso, las réplicas de la señal en los múltiplos de la frecuencia de muestreo se *solapan* con la señal centrada en cero. No vamos a poder recuperar $X_c(\omega)$ filtrando $X_p(\omega)$.A este solapamiento se le llama *aliasing*. Por lo tanto, para que la señal pueda recuperarse tiene que cumplirse que las réplicas de la señal no se solapen con las réplicas en cero; que no haya aliasing. Esto nos lleva a plantear el siguiente teorema.

Teorema del Muestreo (de Nyquist): Dada una señal $x(t)$ de banda limitada ($X(\omega) = 0\ \forall\omega > \omega_M$) la señal podrá ser reconstruida tras ser muestreada si

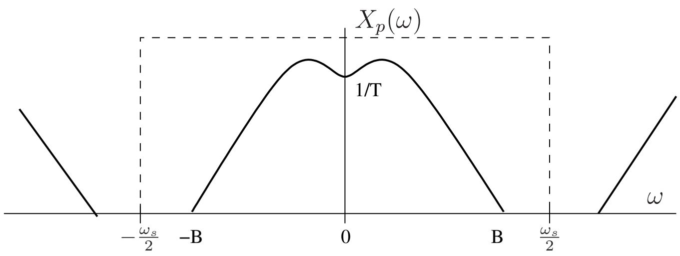
$$\omega_s > 2\omega_M$$

siendo ω_s la frecuencia de muestreo y ω_M la frecuencia máxima de la señal. A la frecuencia $\omega_s = 2\omega_M$ se le conoce como Frecuencia de Nyquist, y es la mínima frecuencia a la que puedo puestrear la señal para poderla recuperar.

Desde un punto de vista intuitivo, lo que nos dice el teorema de Nyquist es que para poder recuperar la señal tienen que cumplirse dos condiciones:

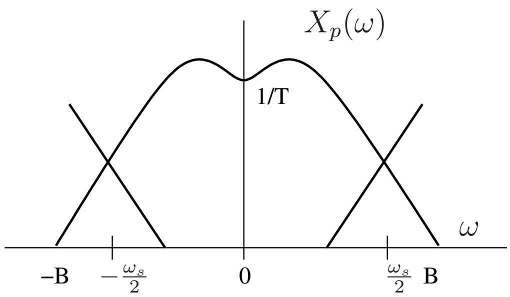
1. La señal a muestrear $x_c(t)$ sea de banda limitada, es decir que $X_c(\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$.

2. Que no haya aliasing. para es esto se cumpla, la frecuencia máxima de la señal, ω_M, ha de ser menos que la mitad de la frecuencia de muestreo:



$$\omega_M < \frac{\omega_s}{2}$$

En caso contrario, existirá un solapamiento entre los espectros que va a hacer imposible recuperar la señal:



3 Interpolación

La interpolación es el proceso de reconstruir una señal continua a partir de sus muestras. Hay muchas maneras de obtener una señal continua a partir de una señal discreta, pero vamos a estudiar lo que se conoce como reconstrucción óptima.

3.1 Dominio de la frecuencia

Sea $x_c/t($ una señal continua de banda limitada tal que $X_c(\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$. La señal se ha muestreado con un tren de deltas usando una frecuencia de muestreo tal que $\omega_s > 2\omega_M$ dando lugar a la señal muestreada continua $x_p(t)$ y a la señal discreta $x[n]$. COmo se ha visto anteriormente, sus transformadas de Fourier cumplen:

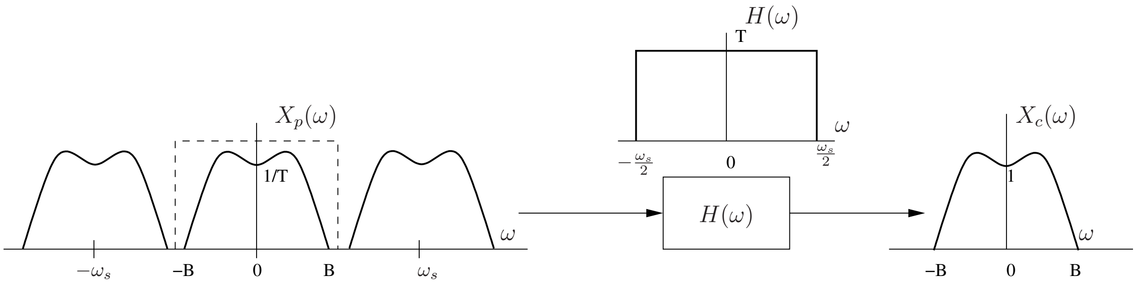
$$X_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\omega - k\omega_s)$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c \left(\frac{\Omega - k2\pi}{T} \right)$$

En caso de no haber aliasing, se cumple que

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T} X_c(\omega) \quad |\omega| < \frac{\omega_s}{2}$$

y por lo tanto podemos recuperar la señal utilizando para ello un filtro pasobajo ideal.



El filtro pasobajo se define:

$$H(\omega) = \begin{cases} T & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

De forma analítica:

$$X_c(\omega) = X_p(\omega) H(\omega)$$

3.2 Dominio temporal

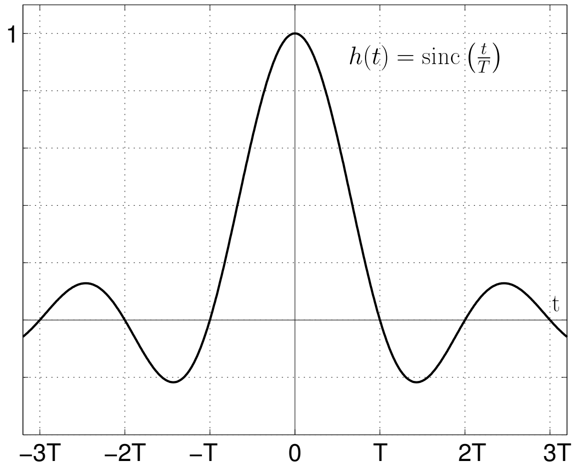
Analicemos ahora qué ocurre en el dominio temporal al interpolar.

$$\begin{aligned} X_c(\omega) &= X_p(\omega) H(\omega) \\ x_c(t) &= x_p(t) * h(t) \\ &= \left[\sum_k x_c(kT) \delta(t - kT) \right] * h(t) \\ &= \sum_k x_c(kT) h(t - kT) \\ &= \sum_k x[k] h(t - kT) \end{aligned}$$

Veamos cómo es $h(t)$:

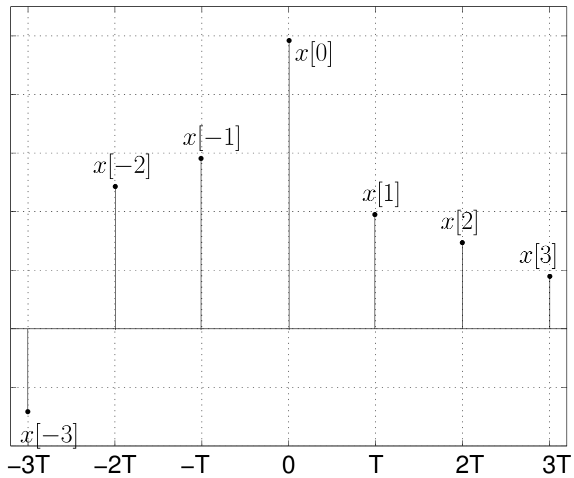
$$
\begin{aligned}
H(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(t) &= \frac{\omega_c T}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) \\
&= \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)
\end{aligned}
$$

siendo $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ la frecuencia de corte del filtro.

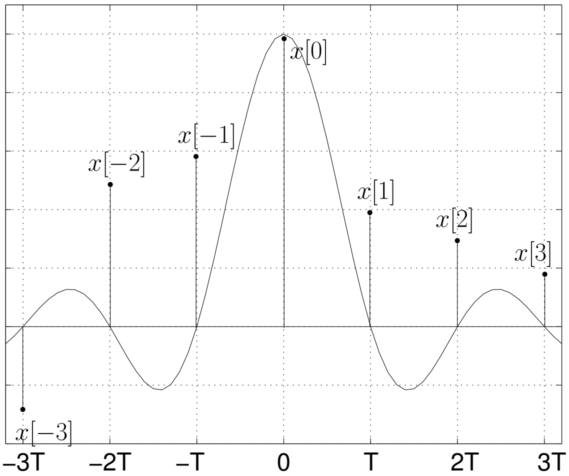


Esta sinc que aparece va a ser la función de interpolación. Nótese que la interpolación desde un punto de vista temporal consiste en situar una sinc encima de cada muestra y sumar el resultado.

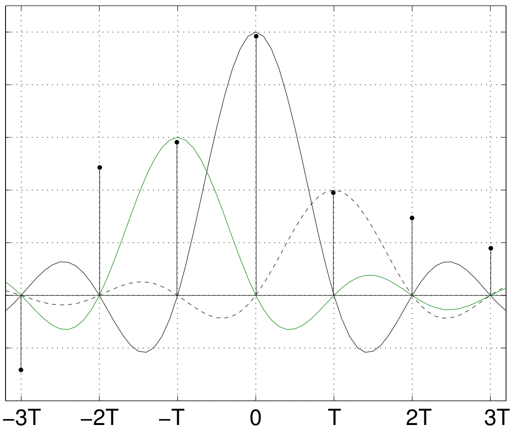
Veamos un ejemplo. Tenemos las siguientes muestras de una señal discreta, posicionadas en los múltiplos del periodo de muestreo:

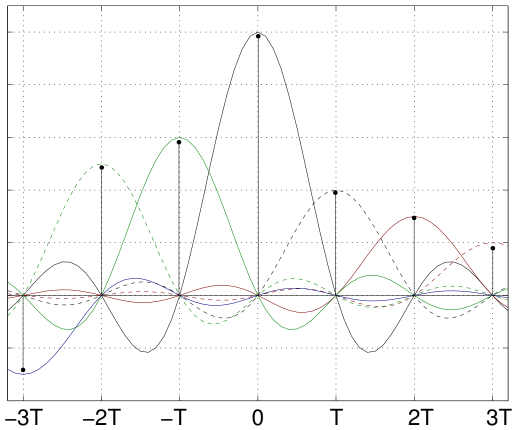


Cada muestra se multiplica por una sinc desplazada a la posición de la muestra:

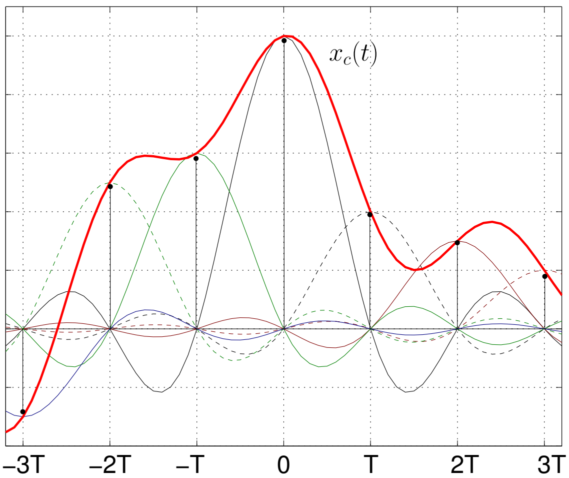


El proceso se repite para el resto de las sincs:



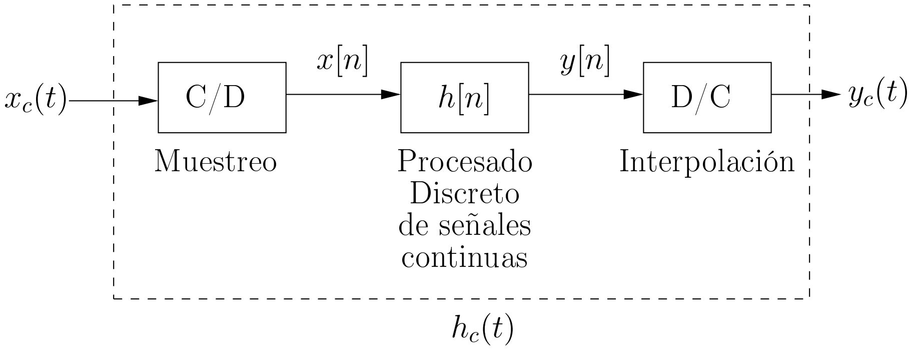


Y la suma de todas ellas da la señal interpolada $x_c(t)$.



4 Procesado Discreto de Señales Continuas

En la práctica es muy útil usar procesado discreto (digital) para procesar señales continuas (analógicas). Esta clase de procesado lleva asociado un muestreo y una interpolación, siguiendo el esquema que se vio al comienzo del tema:



Una señal continua $x_c(t)$ se muestreo obteniendo una señal discreta $x[n]$. La señal se procesa utilizando un sistema LTI discreto con respuesta al impulso $h[n]$, dando lugar a una señal discreta de salida $y[n]$. La señal se interpola para generar la señal continua de salida $y_c(t)$. Lo que se quiere es que todo el proceso sea similar a pasar la señal $x_c(t)$ por un sistema LTI continuo de respuesta al impulso $h_c(t)$. En esta sección se estudiará qué equivalencia hay entre $h[n]$ y $h_c(t)$.

Sea la señal continua

$$x_c(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_c(\omega)$$

de banda limitada, tal que $X_c(\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$. La señal se muestrea con un tren de delta. Hemos visto que se cumplen las siguientes relaciones:

$$x_p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_p(\omega) = \frac{1}{T}\sum_k X_c(\omega - k\omega_s)$$

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{\Omega - k2\pi}{T}\right)$$

En caso de que no haya aliasing, se cumple además que

$$X(\Omega) = \frac{1}{T}X_c\left(\frac{\Omega}{T}\right) \quad |\Omega| \leq \pi$$

Lo mismo ocurre para la señal de salida. Si $y_c(t)$ es la versión interpolada de $y[n]$, existe la siguiente relación:

$$y_p(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y_p(\omega) = \frac{1}{T}\sum_k X_c(\omega - k\omega_s)$$

$$y[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(\Omega) = \frac{1}{T}\sum_k X_c\left(\frac{\Omega - k2\pi}{T}\right)$$

y en caso de no haber aliasing

$$Y(\Omega) = \frac{1}{T}Y_c\left(\frac{\Omega}{T}\right) \quad |\Omega| \leq \pi$$

Dado que $y[n] = x[n] * h[n]$ en el dominio de Fourier

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \longrightarrow Y_c\left(\frac{\Omega}{T}\right) = X_c\left(\frac{\Omega}{T}\right)H(\Omega) \quad |\Omega| \leq \pi$$

Si $\omega = \frac{\Omega}{T}$ podemos reescribirlo como

$$Y_c(\omega) = X_c(\omega) H(\omega T) \quad |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$$

con lo que

$$H(\omega T) = \frac{Y_c(\omega)}{X_c(\omega)} \quad |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$$

Dado que $H_c(\omega) = \frac{Y_c(\omega)}{X_c(\omega)}$, ya tenemos una relación entre las transformadas de Fourier de $h[n]$ y de $h_c(t)$:

$$H_c(\omega) = \begin{cases} H(\omega T) & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

o visto de otro modo $H(\Omega) = H_c(\Omega/T)$entre $-\pi$ y π.

Ejemplo: Diferenciador digital. Se desea diseñar un sistema discreto para procesar señales continuas. Concretamente un sistema tal que

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

El sistema que realiza la derivada es un sistema LTI, y la transformada de Fourier de su respuesta al impulso es

$$H_c(\omega) = j\omega$$

Dado que este sistema no es de banda limitada, lo primero que habrá que hacer para construir el sistema discreto es limitarlo en banda. Si las señales de entrada van a estar muestreadas a una frecuencia ω_s, entonces definimos el sistema continuo como

$$H_c(\omega) = \begin{cases} j\omega & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

La respuesta al impulso del sistema discreto equivalente será por lo tanto

$$H(\Omega) = j\frac{\Omega}{T} \quad |\Omega| < \pi$$

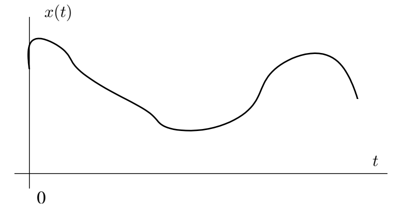
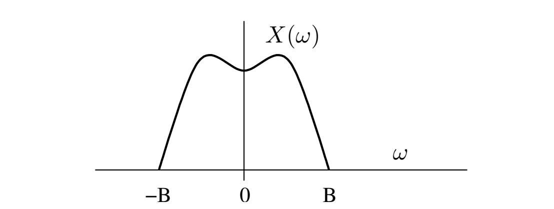
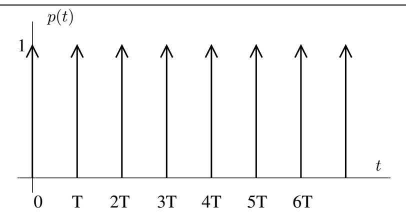
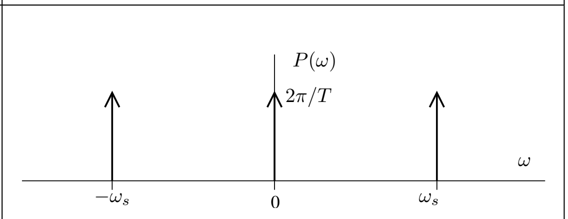
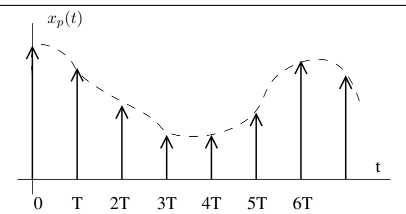
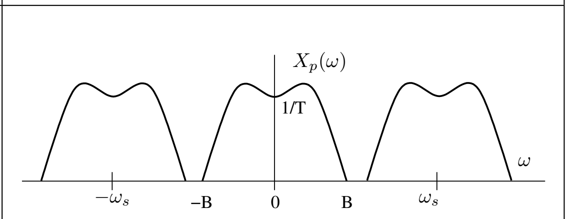
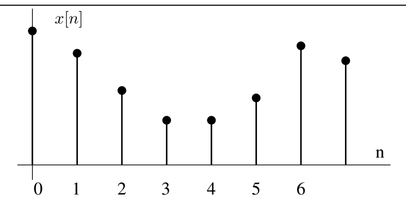
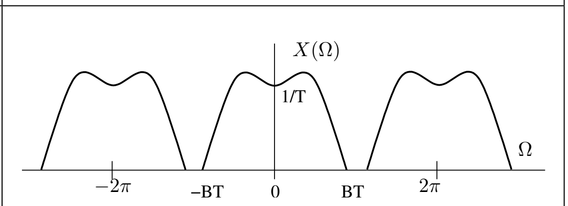
Señal	Dominio temporal	Dominio frecuencial
$x(t)$		
$p(t)$		
$x_p(t)$		
$x[n]$		

Table 1: Resumen de un proceso de muestreo en tiempo y frecuencia