Sistemas Lineales

Tema 5. La Transformada Z

1 La transformada Z

Las señales exponenciales discretas de la forma z^n con $z = re^{j\Omega}$ son autosoluciones de los sistemas LTI. Para una entrada $x[n] = z_0^n$ la salida será

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= \sum_k h[k] z_0^{n-k} \\ &= z^n \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z_0^{-k} \right) \\ &= z_0^n H(z_0) \end{aligned}$$

siendo $H(z_0)$ la transformada Z de $h[n]$ evaluada en el punto z_0.

Definimos la transformada Z de una señal del siguiente modo:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Puede verse que la transformada de Fourier es un caso particular de la transformada Z cuando $z = e^{j\Omega}$, es decir, cuando $r = 1$:

$$X(\Omega) = X(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

Del mismo modo, podemos ver la transformada Z como una transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n] r^{-n} \right) e^{-j\Omega n} \\ &= \mathcal{F}\{x[n] r^{-n}\} \end{aligned}$$

Usaremos la transformada Z fundamentalmente por dos razones:

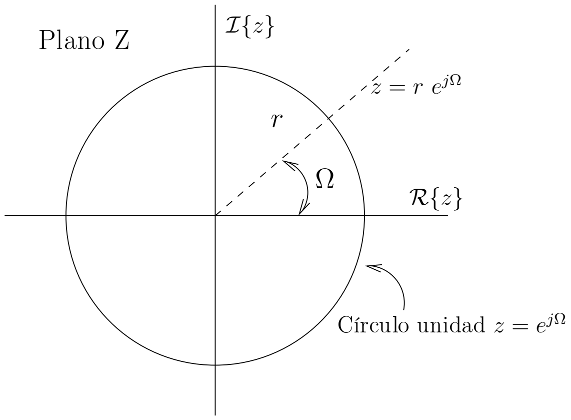
1. Hace ver más claro algunas propiedades de los sistemas.

2. Hay señales que no tienen transformada de Fourier, pero sí transformada Z.

2 Regiones de convergencia

En la transformada Z, la variable z es un número complejo con módulo y fase. La existencia de este módulo va a hacer que, a diferencia de Fourier, la convergencia se dé por regiones. En Fourier, la transformada converge o no converge. Como veremos a continuación, en Z, van a existir valores de z para los que la transformada converge.

Ilustramos el plano Z (en el que se encuentran todos los posibles valores de la variable z) de la siguiente forma:



El círculo en que $r = 1$ se le conoce como círculo unidad.

2.1 Ejemplos previos

Ejemplo 1: Sea la señal $x[n] = a^n u[n]$. Calculamos su transformada Z:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n \end{aligned}$$

Un sumatorio del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n$$

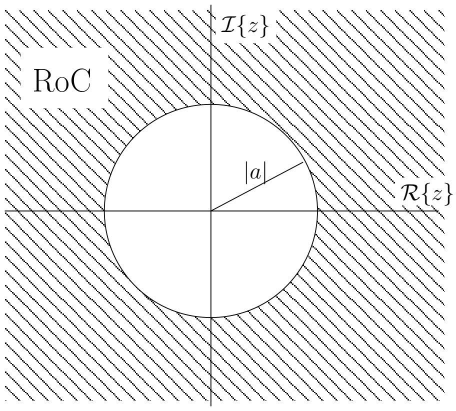
converge siempre y cuando $|b| < 1$. Por lo tanto, la transformada Z converge si

$$\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \quad \rightarrow \quad |z| > |a| \quad \rightarrow \quad r > |a|$$

Asumiendo que hay convergencia, la transformada Z será:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

La convergencia viene dada por el módulo de z, es decir, por r. Nótese que define una *región de convergencia* (RoC): siempre y cuando el módulo de z sea mayor que $|a|$ va a existir la transformada Z. Podemos ilustrarlo en el plano Z:



Ejemplo 2: Sea la señal $x[n] = -a^n u[-n-1]$. Calculamos su transformada Z:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} -\left(\frac{a}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{z}{a}\right)^n \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} -\left(\frac{z}{a}\right)^n \end{aligned}$$

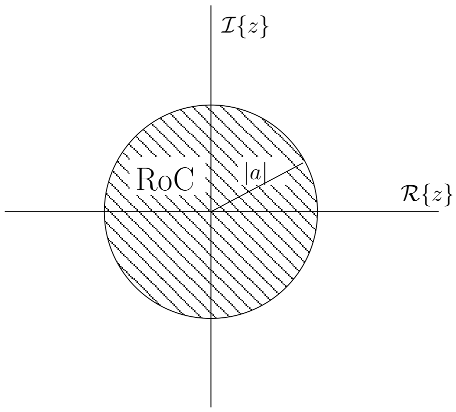
EL sumatorio converge si

$$\left|\frac{z}{a}\right| < 1 \quad \rightarrow \quad |z| < |a| \quad \rightarrow \quad r < |a|$$

Asumiendo que hay convergencia, la transformada Z será:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - z/a} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

La convergencia viene de nuevo dada por el módulo de z. La transformada Z va a converger siempre y cuando el módulo de z sea menor que $|a|$. Podemos ilustrarlo en el plano Z:



Nótese que en los dos ejemplos se parte de dos señales distintas, pero se llega a la misma transformada Z. Sin embargo, sus regiones de convergencia son distintas. Por lo tanto, para caracterizar una señal necesitamos su transformada Z y su RoC.

Por otro lado, nótese que el círculo unidad es aquel en que $r = 1$, por lo tanto es el lugar en que la transforma Z y la transformada de Fourier coinciden. Si el círculo unidad está dentro de la RoC, la transformada de Fourier también converge.

2.2 Propiedades de las regiones de convergencia

1. *La RoC de $X(z)$ son anillos en el plano Z centrados alrededor del origen.* La Transformada Z puede verse como la transformada de Fourier de la señal $x[n]r^n$. Esta TF converge si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r^{-n} < \infty$$

   La convergencia va a depender del valor de r y no del valor de Ω, por lo que dará lugar a regiones circulares alrededor del origen.

2. *La RoC no contiene ningún polo.* Por definición.

3. *Si $x[n] = 0$ para $n < n_0$ y $n > n_1$ (señal de duración finita) entonces su región de convergencia será todo el plano Z:*

$$\text{RoC} = Z \pm \{0\} \pm \{\infty\}$$

   Es decir, las secuencias de duración finita convergen en todo el plano Z. Pueden converger o no en cero y en infinito.

4. *Si $x[n] = 0$ para $n < n_0$ (secuencia derecha) y si el círculo $r = r_0$ está en el RoC, también lo estarán todos los valores finitos de z tales que $r > r_0$.*

   Si una TZ converge para $r = r_0$ se cumple que

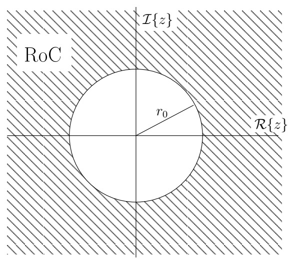
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty$$

   Entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n < \infty$$

   Converge si $\frac{r_0}{r} < 1$, es decir, si $r > r_0$.

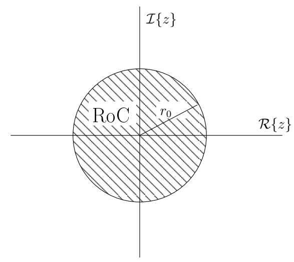
   Resumiendo, si $x[n]$ es una secuencia derecha, la convergencia va a darse de una circunferencia *hacia el exterior*:



   (NOTA: hay que tener cuidado con lo que ocurre en infinito).

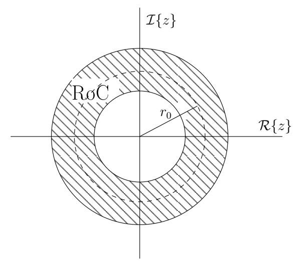
5. *Si $x[n] = 0$ para $n > n_0$ (secuencia izquierda) y si el círculo $r = r_0$ está en el RoC, también lo estarán todos los valores finitos de z tales que $r < r_0$.*

   Resumiendo, si $x[n]$ es una secuencia izquierda, la convergencia va a darse de una circunferencia *hacia el interior*:



(NOTA: hay que tener cuidado con lo que ocurre en el origen).

6. *Si una secuencia $x[n]$ es bilateral, y si el círculo $r = r_0$ está en la RoC, ésta será un anillo que contenga r_0*



Una secuencia bilateral $x[n]$ puede verse como la suma de una secuencia derecha $x_d[n]$ y de una secuencia izquierda $x_i[n]$:

$$x[n] = x_d[n] + x_i[n]$$

Su transformada Z será

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_d[n]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x_i[n]z^{-n}$$

La RoC, en caso de existir, será (por lo menos) la intersección de las RoC de la secuencia derecha e izquierda:

$$\text{RoC} \subset \text{RoC}_d \cap \text{RoC}_i$$

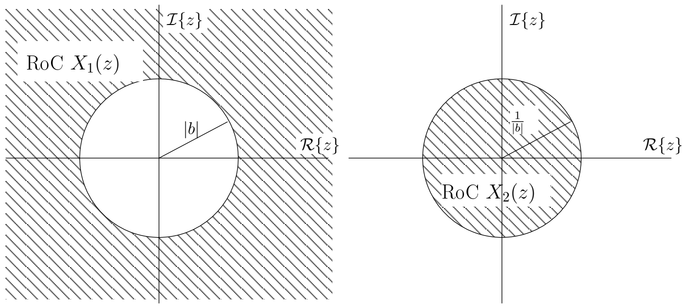
Ejemplo 3: Sea la señal $x[n] = b^{|n|}$ con b real y $b > 0$. La señal es bilateral, y podemos dividirla en una parte derecha y una izquierda:

$$x[n] = \underbrace{b^n u[n]}_{\text{derecha}} + \underbrace{b^{-n} u[-n-1]}_{\text{izquierda}} = x_1[n] + x_2[n]$$

Sus TZ serán

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} \qquad |z| > b$$
$$X_2(z) = \frac{-1}{1 - (bz)^{-1}} \qquad |z| > 1/b$$

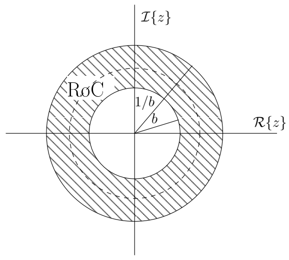
Las regiones de convergencia quedan:



La TZ total será

$$X(z) = \begin{cases} X_1(z) + X_2(z) & b < |z| < \frac{1}{|b|} \quad \text{si } b < 1 \\ \\ -- & \text{RoC} = \emptyset \quad \text{si } b \geq 1 \end{cases}$$

Nótese que si $b \geq 1$ $b \geq 1/b$; no hay intersección de las RoC de cada parte de la señal, y por lo tanto no hay RoC. En caso contrario ($b < 1$) la RoC será un anillo:



3 La transformada inversa

La TZ puede expresarse en función de la transformada de Fourier:

$$X(z) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$$

De este modo podemos escribir

$$x[n]r^{-n} = \mathcal{F}^{-1}\{X(z)\}$$

Vamos a tratar de calcular la transformada inversa de la TZ a partir de la transformada inversa de Fourier.

$$\begin{aligned} x[n]r^{-n} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega \\ x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega})r^n e^{j\Omega n}d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(re^{j\Omega})\left(re^{j\Omega}\right)^n d\Omega \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = re^{j\Omega}$, $dz = jre^{j\Omega} = jzd\Omega$:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_r X(z)z^{n-1}dz$$

donde $\oint_r$ denota la integración en un contorno circular cerrado en sentido contrario a las agujas del reloj centrado en el origen y con un radio r (donde r pertenece a la RoC).

4 Propiedades de la Transformada Z

Propiedad	Señal	Transformada Z	RoC
	$x[n]$	$X(z)$	R
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en n	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R \pm \{0\}$
Escalado en z	$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\Omega_0 n}z)$	R
	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R$
	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$	$\lvert a\rvert R$ (El conjunto de puntos $\{\lvert a\rvert z\}$ para z en R)
Inversión en n	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	R^{-1} (el conjunto de puntos z^{-1} donde z está en R)
Expansión en n	$x_{(k)}[n]$	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (el conjunto de puntos $z^{1/k}$ donde z está en R)
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Primera diferencia	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	Al menos $R \cap (\lvert z\rvert > 0)$
Acumulación	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	Al menos $R \cap (\lvert z\rvert > 1)$
Diferenciación en z	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	R

Teorema del valor inicial

Si $x[n] = 0$ para $n < 0$ entonces $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$

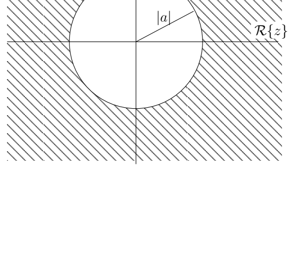
5 Análisis y caracterización de sistemas LTI usando la Transformada Z

Por la propiedad de convolución, en un sistema LTI podremos escribir:

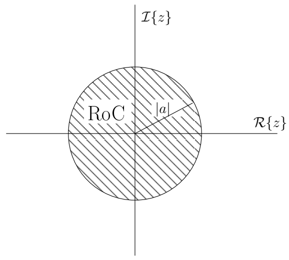
$$Y(z) = X(z)H(z)$$

donde $H(z)$ es la transformada Z de la respuesta al impulso. Esta $H(z)$ se conoce como *función de transferencia del sistema* y proporciona mucha información acerca de éste:

- **Causalidad:** Un sistema LTI será causal si $h[n] = 0\ \forall n < 0$. En ese caso tendremos una secuencia derecha cuya TZ converge hacia el exterior de un círculo. Por lo tanto, si la RoC de $H(z)$ es de la forma $\lvert z\rvert > a$ (y no hay polo en ∞) el sistema es causal.



Un sistema LTI será anticausal si $h[n] = 0 \ \forall n \geq 0$. En ese caso tendremos una secuencia izquierda cuya TZ converge hacia el interior de un círculo. Por lo tanto, si la RoC de $H(z)$ es de la forma $|z| < a$ (y hay un cero en el origen) el sistema es anticausal.



- **Estabilidad:** Un sistema LTI es estable si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

En ese caso existe la transformada de Fourier de $h[n]$. Para que exista $H(\Omega)$, el círculo unidad tiene que estar dentro de la RoC de la TZ. Por lo tanto, si la RoC de la TZ contiene el círculo unidad, el sistema es estable.

- **Sistemas descritos mediante ecuaciones en diferencias**. De manera análoga a cómo se trabajaba en el dominio de Fourier, puede usarse la TZ para obtener la respuesta al impulso de un sistema LTI a partir de una ecuación en diferencias con coeficientes constantes.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \ y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \ x[n-k] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right) X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$