Sistemas Lineales

2011-2012

Tema 7. La Transformada de Laplace

Depto. Teoría de la Señal y Comunicaciones e IT
Universidad de Valladolid

1 Introducción

En los temas anteriores hemos estudiado los aspectos básicos del análisis de Fourier. Esta herramienta nos permite describir las señales de interés en términos de una superposición (discreta o continua, dependiendo de la periodicidad o no de la señal) de exponenciales complejas (en tiempo discreto o continuo, dependiendo de la naturaleza discreta o continua de la señal). Esta descripción tiene dos ventajas:

1. Puesto que las exponenciales complejas son autofunciones de cualquier sistema LTI, la caracterización de éstos se reduce al producto de la entrada con la respuesta en frecuencia, operación conceptualmente mucho más sencilla que la convolución.

2. La transformada de Fourier o espectro de una señal tiene una interpretación cualitativa muy conveniente como "contenido frecuencial", tremendamente útil en teoría de la comunicación, comunicaciones por radio, multiplexación, etcétera.

El análisis de Fourier se enfoca en principio a señales de energía finita (o de potencia finita, en el caso periódico). Como vimos en temas anteriores, para este tipo de señales la transformada de Fourier está bien definida como una función, e incluso la inmensa mayoría de las señales de interés (las que cumplen las condiciones de Dirichlet) pueden ser reconstruidas punto a punto a partir de su transformada de Fourier. No obstante, cuando las señales consideradas no son de energía finita, la transformada de Fourier ha de extenderse a distribuciones tipo delta de Dirac, con la consiguiente dificultad operativa. Por ejemplo, consideremos la señal:

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\ u(t) = \mathrm{sinc}(t)\ u(t), \tag{1}$$

que no es más que una función sinc truncada a los valores de t mayores que 0. Esta señal es de energía finita, como podemos comprobar con dos sencillas acotaciones:

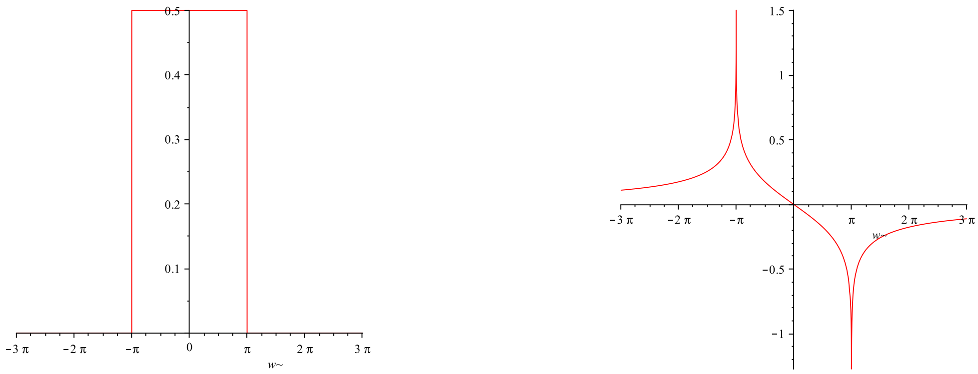
$$\begin{aligned}\int_{\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{(\pi t)^2} dt = \int_0^1 \mathrm{sinc}^2(\pi t) dt + \int_1^{\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{(\pi t)^2} dt \\ &\leq \int_0^1 1\ dt + \int_1^{\infty} \frac{1}{(\pi t)^2} dt = 1 + \frac{1}{\pi^2} < \infty. \end{aligned} \tag{2}$$

La transformada de Fourier de la función sinc, como sabemos de temas anteriores, es un pulso rectangular $\Pi(\omega) = u(\omega + \pi) - u(\omega - \pi)$. La transformada de Fourier de la sinc truncada tiene una expresión un poco más complicada[1]:

$$x(t) = \mathrm{sinc}(t)\ u(t) \longrightarrow X(\omega) = \mathfrak{F}\left\{x(t)\right\}(\omega) = \frac{1}{2}\Pi(\omega) - \frac{j}{2\pi} \log\left(\frac{\omega+\pi}{\omega-\pi}\right), \tag{3}$$

cuyo comportamiento se muestra en la Figura 1.

[1]Recordemos que para un número complejo cualquiera, $z \in \mathbb{C}$, su logaritmo puede calcularse como: $\log(z) = \ln(|z|) + j\angle z$, con $\angle z$ la fase de z. En particular, si z es real y negativo, $\log(z) = \ln(|z|) + j\pi$.



$$X(\omega) = \frac{1}{2}\Pi(\omega) - \frac{j}{2\pi}\log\left(\frac{\omega+\pi}{\omega-\pi}\right)$$

Figura 1: Gráfica de la transformada de Fourier de $\mathrm{sinc}(t)\ u(t)$, en parte real (izquierda) e imaginaria (derecha). La parte imaginaria presenta dos singularidades en $\omega = \pm\pi$ en los valores para los que el logaritmo presenta polos, pero la función es de energía finita.

Ejercicio: Demostrar la relación dada en la ecuación (3) para la transformada de Fourier de una función sinc truncada.

Puesto que $x(t)$ en este caso es de energía finita, su transformada de Fourier es otra señal que también tiene energía finita, aunque vemos que esta última presenta dos singularidades en $\omega = \pm\pi$. Ahora bien, ¿qué ocurrirá si consideramos la señal $t{\cdot}x(t)$? De las propiedades de la transformada de Fourier deducimos que su transformada será $j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$. Puesto que $X(\omega)$ contiene funciones escalón, al derivar obtendremos deltas de Dirac, correspondientes al hecho de que $t{\cdot}x(t) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\ u(t)$ **no tiene** energía finita:

$$\int_{\infty}^{\infty} |t{\cdot}x(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty}\sin^2(\pi t)dt = \frac{1}{\pi^2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_n^{n+1}\sin^2(\pi t)dt = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2\pi^2} = \infty. \tag{4}$$

De hecho, la transformada de Fourier de $t{\cdot}x(t)$ puede calcularse de forma sencilla:

$$\mathfrak{F}\left\{t{\cdot}x(t)\right\}(\omega) = \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\ u(t)\right\}(\omega) = \frac{j}{2}\left(\delta(\omega+\pi) - \delta(\omega-\pi)\right) + \frac{1/2\pi}{\omega+\pi} - \frac{1/2\pi}{\omega-\pi}. \tag{5}$$

Ahora tenemos dos polos en $\pm\pi$ (términos $1/(\omega\pm\pi)$ que ahora **no son** de cuadrado integrable) correspondientes a las derivadas de la parte imaginaria de $X(\omega)$, y además aparecen las deltas de Dirac correspondientes a las derivadas de las funciones escalón.

Ejercicio: Demostrar la relación dada en la ecuación (5) para la transformada de Fourier de un seno truncado:

1. Utilizando la propiedad de diferenciación en frecuencia sobre la $X(\omega)$ de la ecuación (3).
2. Utilizando la propiedad de convolución en frecuencia entre la transformada de Fourier del seno y de la función escalón.

El hecho de que aparezcan distribuciones delta de Dirac en la transformada de Fourier es un inconveniente a la hora de operar con ésta, ya que las deltas de Dirac **no son funciones** y por tanto no se puede operar con ellas como si lo fueran. En el presente tema introduciremos un nuevo tipo de transformada para señales no periódicas en tiempo continuo, la **transformada de Laplace**. Recordemos que la transformada de Fourier transformaba la variable **real** t en la variable **real** ω. La transformada de Laplace transforma la variable **real** t en la variable **compleja** $s = \sigma + j\omega$, siendo ésta la principal diferencia entre ambas. Como veremos a lo largo del tema, esta nueva herramienta tiene dos ventajas sobre la transformada de Fourier:

---

1. La transformada de Laplace no contendrá distribuciones del tipo delta de Dirac, y por lo tanto operar con ella será en general más sencillo. De hecho, la transformada de Laplace será una función analítica (esto es, que se puede expresar como una serie de potencias convergente: $X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n, \forall s : 0 \leq |s - s_0| < \rho$).

2. La transformada de Laplace permite caracterizar los sistemas LTI a través de una función de transferencia (análoga a la respuesta en frecuencia en el análisis de Fourier) que permitirá determinar ciertas propiedades de una forma más sencilla (recordemos que la causalidad o la estabilidad de un sistema, en general, no pueden se estudiadas a partir del análisis de Fourier de la respuesta al impulso).

Con respecto al segundo punto, conviene recordar aquí que las exponenciales complejas son autofunciones de cualquier sistema LTI. Es decir, $\forall s \in \mathbb{C}$:

$$e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(s(t-\tau))h(\tau)d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-s\tau)h(\tau)d\tau = H(s)e^{st}. \tag{6}$$

2 Definición de la Transformada de Laplace

La transformada de Laplace se define de forma análoga a la transformada de Fourier, teniendo en cuenta el cambio de variable $\omega \in \mathbb{R} \rightarrow s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$:

---

análisis: $$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-st)dt. \tag{7}$$

Como puede verse, si restringimos la variable compleja s al eje imaginario, $s = j\omega$, la expresión se reduce a la transformada de Fourier. Para entender el porqué de esta definición, vamos a retomar el ejemplo anterior. Supongamos que $\sigma = \Re\{s\} > 0$, y calculemos la transformada de Laplace de $x(t)$:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \exp(-st)dt = \frac{j}{2\pi} \log\left(\frac{s - j\pi}{s + j\pi}\right), \tag{8}$$

resultado que de momento no demostraremos. De la misma manera que en el ejemplo anterior con la transformada de Fourier, la función resultante tiene dos polos (singularidades) en $s = \pm j\pi$. ¿Qué ocurrirá ahora si calculamos la transformada de Laplace de

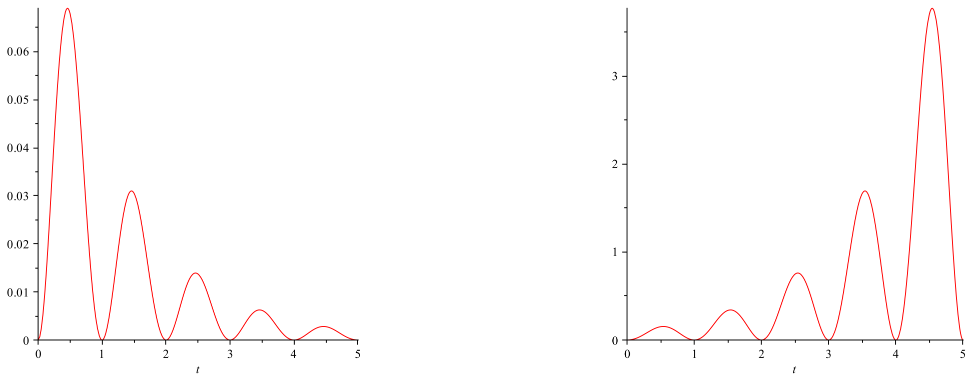


Figura 2: Módulo al cuadrado del integrando que define la transformada de Laplace de $x(t)$, $|\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\exp(-\sigma t)|^2$, para $\sigma > 0$ (izquierda) y $\sigma < 0$ (derecha).

$t{\cdot}x(t)$? Veámoslo suponiendo de nuevo que $\sigma = \Re\{s\} > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t{\cdot}x(t)\right\}(s) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin(\pi t)\exp(-st)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\exp(j\pi t)-\exp(-j\pi t)}{2j}\exp(-st)dt \\
&= \frac{1}{2j\pi}\int_0^\infty \exp((j\pi - s)t)dt - \frac{1}{2j\pi}\int_0^\infty \exp((-j\pi - s)t)dt \\
&= \frac{1}{2j\pi(j\pi - s)}\exp((j\pi - s)t)\Big|_{t=0}^{\infty} - \frac{1}{2j\pi(-j\pi - s)}\exp((-j\pi - s)t)\Big|_{t=0}^{\infty} \\
&= \frac{-1}{2j\pi(j\pi - s)} + \frac{1}{2j\pi(-j\pi - s)} = \frac{1}{s^2+\pi^2},
\end{aligned} \tag{9}$$

que ahora no contiene distribuciones delta de Dirac, sino que es una función relativamente sencilla en la variable compleja s (con polos en $s = \pm\pi$).

- Es importante notar que este comportamiento se debe a la parte real σ de la variable compleja s, que introduce una exponencial real decreciente y hace que el integrando decaiga rápidamente cuando $t \to \infty$ y por tanto el resultado sea integrable.

- Es más, si en lugar de $t{\cdot}x(t)$ considerásemos cualquier otra potencia arbitraria, $t^n x(t), n > 0$, la integral que define la transformada de Laplace seguiría siendo convergente, ya que $t^n \sin(\pi t)\exp(-\sigma t)$ será siempre integrable.

- Gracias a la generalización de la variable real ω a la variable compleja $s = \sigma + j\omega$ conseguimos que la transformada de Laplace sea siempre una función en sentido tradicional, sin necesidad de recurrir a distribuciones, para cualquier $t^n x(t)$.

- Por contra, si intentásemos generalizar el caso $t^n x(t), n > 0$ a la transformada de Fourier, veríamos que en ésta aparecerían las derivadas sucesivas de la delta de Dirac, que **tampoco son funciones** y por tanto imponen ciertas restricciones a la hora de operar con ellas.

Por último, notemos que la transformada de Laplace no existirá para cualquier posible valor de la variable s. En particular, si en el ejemplo anterior tomamos $\sigma = \Re\{s\} < 0$ las exponenciales $\exp(-\sigma t)$ son crecientes (ver Figura 2), y por tanto las integrales no existen. Este comportamiento es completamente general: como veremos a continuación, la transformada de Laplace de una cierta señal $x(t)$ estará definida sólo para un subconjunto de valores $s \in \mathrm{ROC} \subseteq \mathbb{C}$, aquéllos contenidos en la región de convergencia (ROC).

2.1 Regiones de convergencia (ROC)

La ROC de la transformada de Laplace de una señal $x(t)$ se define como el conjunto de números complejos $s \in \mathbb{C}$ para los cuales $x(t)\exp(-st)$ es absolutamente integrable[2]:

$$\mathrm{ROC} \triangleq \left\{ \forall s \in \mathbb{C} \text{ tal que: } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)\exp(-st)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\exp(-\sigma t)dt < \infty \right\}. \quad (10)$$

La primera observación importante es que el que s pertenezca o no a la ROC depende únicamente de la parte real $\sigma = \Re\{s\}$: puesto que el módulo de $x(t)\exp(-st)$ no depende de $\omega = \Im\{s\}$, si $x(t)\exp(-\sigma t)$ es absolutamente integrable la integral que define la transformada de Laplace será convergente para cualquier valor de ω. Según esto, la ROC estará formada por bandas verticales paralelas al eje imaginario, como se muestra en la Figura 5. A continuación veremos unos pocos ejemplos de transformadas de Laplace con sus ROC.

Delta de Dirac. Aunque, como hemos dicho antes, la transformada de Laplace no contendrá distribuciones del tipo delta de Dirac, tiene sentido considerar la transformada de Laplace de una delta de Dirac:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\exp(-st)dt = 1; \ \mathrm{ROC} = \{\forall s \in \mathbb{C}\}, \quad (11)$$

ya que la integral resultante será siempre convergente para cualquier s.

Función escalón. Aplicando la definición:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t)\}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\exp(-st)dt = \int_{0}^{\infty} \exp(-(\sigma + j\omega)t)dt \\ &= \left.\frac{\exp(-(\sigma + j\omega)t)}{-(\sigma + j\omega)}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{\sigma + j\omega} = \frac{1}{s}; \ \mathrm{ROC} = \{\forall s \in \mathbb{C} : \Re\{s\} > 0\}, \quad (12) \end{aligned}$$

ya que en este caso la integral sólo converge si σ es estrictamente positiva. Notemos que la función $\frac{1}{s}$ tiene un polo en $s = 0$ y por tanto este valor no puede estar contenido en la ROC, ya que corresponde a una integral no convergente.

Exponencial truncada. Para un número complejo cualquiera $c = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\exp(-ct)u(t)\}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ct)\exp(-st)u(t)dt = \int_{0}^{\infty} \exp(-((\alpha + \sigma) + j(\beta + \omega))t)dt \\ &= \frac{1}{(\alpha + \sigma) + j(\beta + \omega)} = \frac{1}{s + c}; \ \mathrm{ROC} = \{\forall s \in \mathbb{C} : \Re\{s\} > -\alpha\}. \quad (13) \end{aligned}$$

De nuevo la transformada de Laplace tiene un polo (valor infinito) en $s = -c$, y por lo tanto no puede contener este punto ya que la integral correspondiente no converge.

[2] La condición de "absolutamente integrable" es más restrictiva que la de integrable. A veces se define la ROC como los $s \in \mathbb{C}$ para los que $x(t)\exp(-st)$ es simplemente integrable, pero esto conduce a conceptos matemáticos que van mucho más allá de lo que se pretende en esta asignatura. En general, y salvo casos muy excepcionales, ambas definiciones dan lugar a exactamente la misma ROC.

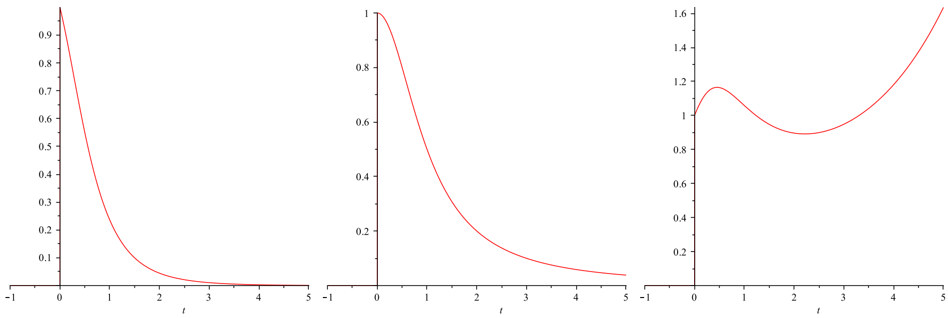


Figura 3: Integrando de la transformada de Laplace de la función racional $\frac{1}{1+t^2}$ truncada, para $\sigma > 0$ (izquierda), $\sigma = 0$ (centro) y $\sigma < 0$ (derecha).

Exponencial truncada (II). Para un número complejo cualquiera $c = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{-\exp(-ct)u(-t)\}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} -\exp(-ct)\exp(-st)u(-t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} -\exp(-((\alpha+\sigma)+j(\beta+\omega))t)dt = \left.\frac{\exp(-((\alpha+\sigma)+j(\beta+\omega))t)}{(\alpha+\sigma)+j(\beta+\omega)}\right|_{-\infty}^{0} \\ &= \frac{1}{(\alpha+\sigma)+j(\beta+\omega)} = \frac{1}{s+c};\ \mathrm{ROC} = \{\forall s \in \mathbb{C} : \Re\{s\} < -\alpha\}, \qquad (14)\end{aligned}$$

ya que en este caso es el límite inferior el que es infinito, y por tanto la convergencia requiere $-(\alpha+\sigma) > 0 \Rightarrow \sigma < -\alpha$. Comparando este ejemplo con el ejemplo anterior, vemos que en ambos casos la expresión funcional de la transformada de Laplace es idéntica, y ambas transformadas se distinguen tan solo por sus respectivas regiones de convergencia. Esta consideración da lugar a una importante conclusión:

La transformada de Laplace de una señal $x(t)$ queda completamente determinada sólo cuando se dan **tanto su expresión funcional como su ROC**. Dicho de otra forma, para recuperar una señal $x(t)$ a partir de su transformada de Laplace **no basta con conocer su expresión funcional**, sino que debemos conocer también su ROC.

Función racional truncada. Supongamos la señal $x(t) = \frac{1}{1+t^2}u(t)$. Su ROC vendrá dada por los valores de σ tal que la integral que define la transformada de Laplace es absolutamente convergente:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{1+t^2}\exp(-st)u(t)\right|dt = \int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\exp(-\sigma t)dt < \infty. \qquad (15)$$

El integrando de la ecuación previa se representa en la Figura 3 para diferentes valores de σ. Para valores positivos de σ la integral es obviamente convergente (puesto que decae exponencialmente), mientras que para valores negativos la integral no converge (crece exponencialmente). Para $\sigma = 0$, podemos calcular explícitamente la integral:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\exp(0\cdot t)dt = \int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(t)\Big|_{0}^{\infty} = \frac{\pi}{2} < \infty. \qquad (16)$$

A diferencia de los tres ejemplos anteriores, en este caso la frontera de la ROC contiene valores de s para los que la transformada de Laplace sí es absolutamente convergente.

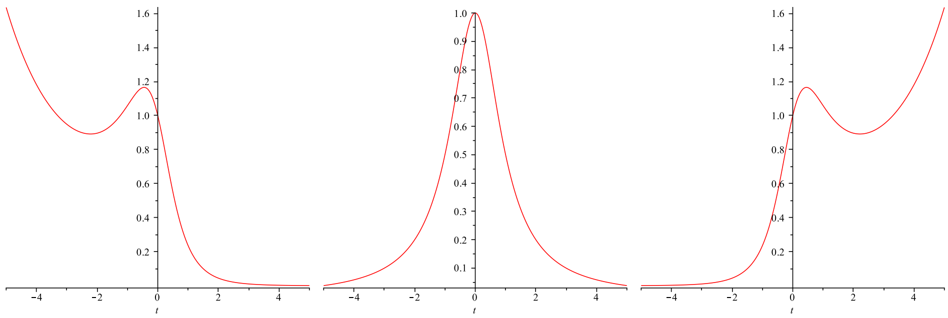


Figura 4: Integrando de la transformada de Laplace de la función racional $\frac{1}{1+t^2}$ sin truncar, para $\sigma > 0$ (izquierda), $\sigma = 0$ (centro) y $\sigma < 0$ (derecha).

Incluso así, la ROC es en este caso ROC $= \{\forall s \in \mathbb{C} : \Re\{s\} > 0\}$, excluyendo el eje $j\omega$:

La ROC es siempre un conjunto abierto, y **no contiene a su frontera** incluso aunque la integral que define la transformada de Laplace sea absolutamente convergente para todos los puntos de ésta[3].

Función racional. Por último, supongamos la señal $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$, esta vez sin truncar a los valores mayores que 0. La condición para que s esté contenida en la ROC es ahora:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1+t^2} \exp(-st) \right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} \exp(-\sigma t) dt < \infty. \tag{17}$$

Si representamos el integrando de la ecuación anterior para diferentes valores de σ, como se ha hecho en la Figura 4, podemos comprobar que la integral no es convergente ni para $\sigma > 0$ ni para $\sigma < 0$, puesto que en ambos casos tenemos colas que crecen de forma exponencial. Para $\sigma = 0$ la integral puede calcularse de forma explícita como en la ecuación (16) y el resultado es π. Puesto que la ROC debe ser un conjunto abierto, pero la transformada de Laplace sólo es convergente para $\Re\{s\} = 0$, esta función **no admite una transformada de Laplace**.

Ejercicio: Demostrar que la función racional $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$ no admite transformada de Laplace pero sí que admite transformada de Fourier. Calcular esta última.

Para finalizar esta sección, la Figura 5 muestra las ROC (si éstas existen) de cada uno de los ejemplos propuestos hasta este momento.

2.2 Algunas propiedades de la ROC

La ROC de la transformada de Laplace de una señal $x(t)$ exhibe una serie de propiedades que, como veremos más adelante, son de gran importancia para la caracterización de sistemas LTI a partir de la transformada de Laplace de su respuesta al impulso:

[3] El que la ROC se defina como un abierto tiene que ver con que $X(s)$ es analítica en todos los puntos de ésta: si $s_0 \in$ ROC existe un disco de radio $\rho > 0$ donde $X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n$, $\forall s : |s - s_0| < \rho$. Si tomamos un s_0 en la frontera de la ROC, cualquier disco de radio $\rho > 0$ centrado en s_0 contendrá valores fuera de la ROC, donde la serie de potencias no será convergente: es decir, $X(s)$ no es analítica en la frontera de la ROC, y por eso ésta no incluye su frontera.

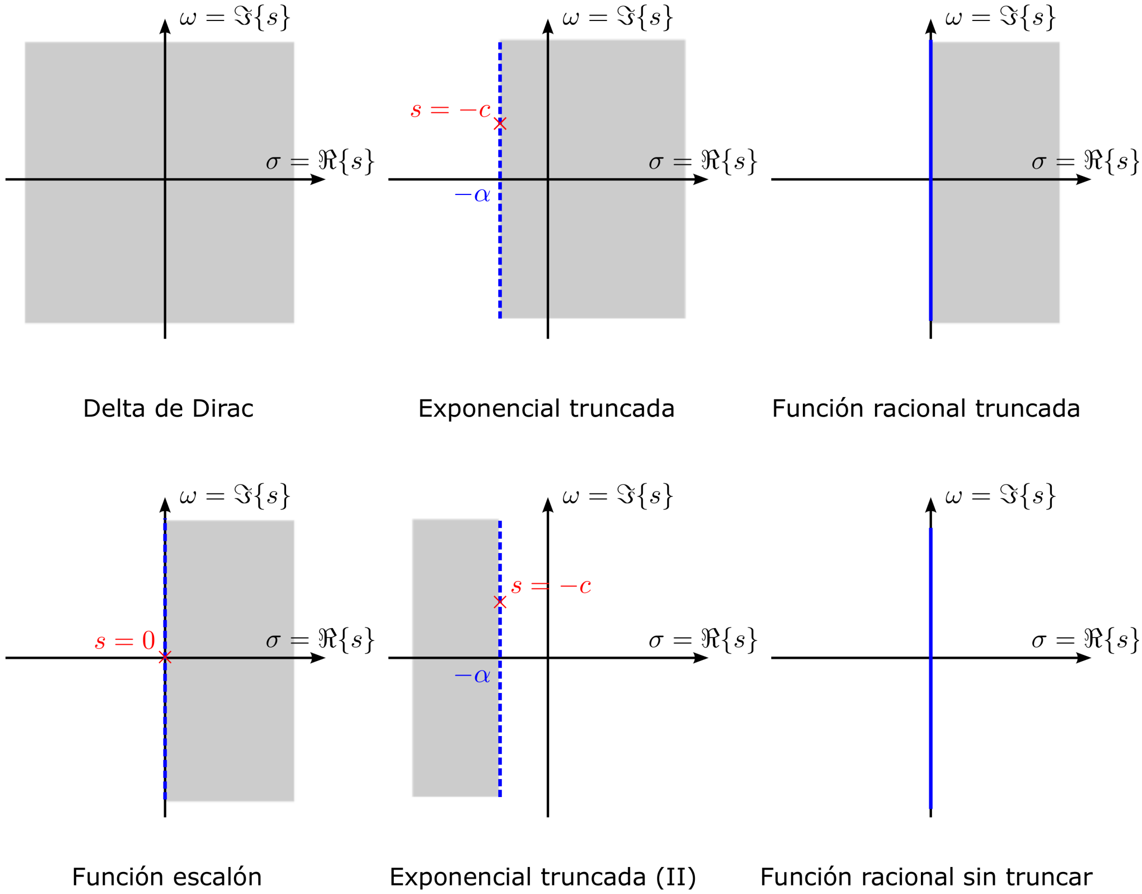


Figura 5: Representación gráfica de las zonas donde la integral que define la transformada de Laplace es absolutamente convergente. Las lineas sólidas indican que la integral es absolutamente convergente para los valores en la frontera, mientras que las lineas punteadas indican lo contrario. Las cruces rojas son los polos en la transformada de Laplace. Las ROC respectivas son entonces las zonas sombreadas. Para la función racional no truncada no existe una ROC, y por tanto esta función no admite transformada de Laplace.

La ROC está formada por bandas paralelas al eje $j\omega$. Como ya hemos comentado, esta propiedad se deduce fácilmente teniendo en cuenta que la convergencia de la transformada de Laplace depende sólo de $\sigma = \Re\{s\}$.

La ROC no contiene polos de la transformada de Laplace. Supongamos que $s_0 \in$ ROC fuese un polo de $X(s)$. Entonces tendríamos:

$$|X(s_0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-s_0 t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) \exp(-s_0 t)| \, dt < \infty, \tag{18}$$

puesto que $s_0 \in$ ROC. Pero, puesto que $|X(s_0)| < \infty$, s_0 **no puede ser un polo** de $X(s)$.

Si $x(t)$ es absolutamente integrable y de duración finita, la ROC es todo el plano complejo salvo quizá $s = \pm\infty$. Puesto que $x(t) = 0$ para $|t| > t_0 > 0$, podemos acotar el integrando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)\exp(-st)|\,dt &= \int_{-t_0}^{t_0} |x(t)|\cdot\exp(-\sigma t)dt \\ \leq \int_{-t_0}^{t_0} |x(t)|\cdot\exp(|\sigma|t_0)dt &= \exp(|\sigma|t_0)\int_{-t_0}^{t_0}|x(t)|\,, \end{aligned}\tag{19}$$

que al ser $x(t)$ absolutamente integrable tendrá un valor finito para todos los valores finitos de σ. No obstante, si $\sigma\to\infty$ la integral deja de estar acotada:

En general, la transformada de Laplace puede contener polos para $\sigma=\pm\infty$.

Si $x(t)$ es unilateral a derechas, la ROC se extiende hacia la derecha. En este caso suponemos que $x(t)=0$ para $t<t_0$ (por ejemplo, una señal causal es un caso particular de este tipo de señales si fijamos $t_0=0$). Supongamos que $\Re\{s\}=\sigma_0$ está contenido en la ROC, y supongamos también $\sigma>\sigma_0$. Podemos hacer una acotación similar a la de la propiedad anterior:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)\exp(-\sigma t)|\,dt &= \int_{t_0}^{\infty}|x(t)|\exp(-(\sigma-\sigma_0)t)\exp(-\sigma_0 t)dt \\ \leq \int_{t_0}^{\infty}|x(t)|\exp(-(\sigma-\sigma_0)t_0)\exp(-\sigma_0 t)dt &= e^{-(\sigma-\sigma_0)t_0}\int_{t_0}^{\infty}|x(t)|\exp(-\sigma_0 t)dt,\end{aligned}\tag{20}$$

que será finita por pertenecer $\Re\{s\}=\sigma_0$ a la ROC. Por tanto, si $\sigma_0\in$ ROC, cualquier valor $\sigma>\sigma_0$ está también contenido en ella y la ROC se extenderá hacia la derecha. No obstante puede haber un polo en $+\infty$.

Si $x(t)$ es unilateral a izquierdas, la ROC se extiende hacia la izquierda. La demostración es muy similar a la de la propiedad anterior, y se deja como ejercicio. En este caso puede haber también un polo en $-\infty$.

Si $x(t)$ es bilateral la ROC es una banda paralela al eje $j\omega$, o bien no existe transformada de Laplace. Una señal bilateral $x(t)$ podrá escribirse como la suma de dos señales unilaterales:

1. $x_1(t)=x(t)u(t)$, cuya transformada $X_1(s)$ convergerá para $\Re\{s\}>\sigma_1$.
2. $x_2(t)=x(t)u(-t)$, cuya transformada $X_2(s)$ convergerá para $\Re\{s\}<\sigma_2$.

Para que la transformada de $x(t)$ sea convergente:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\exp(-\sigma t)dt=\int_{-\infty}^{0}|x_1(t)|\exp(-\sigma t)dt+\int_{0}^{\infty}|x_2(t)|\exp(-\sigma t)dt<\infty,\tag{21}$$

así que $X(s)$ será convergente para aquellos valores de s que pertenezcan simultáneamente a las ROC de $X_1(s)$ y $X_2(s)$, es decir, a la banda $\sigma_1<\Re\{s\}<\sigma_2$. Podría ocurrir que no existiese tal banda si $\sigma_1>\sigma_2$, y entonces no existe la transformada de Laplace. En la siguiente sección veremos algunas consideraciones al respecto.

Ejercicio: Para $x(t)=\sin(t)$, escribir esta señal como una señal a derechas $x_1(t)$ más una señal a izquierdas $x_2(t)$. Calcular σ_1 y σ_2 y demostrar que esta señal no admite transformada de Laplace.

2.3 Definiciones alternativas de la transformada de Laplace

Como se vio en el ejercicio inmediatamente anterior, la señal bilateral $x(t) = \sin(t)$ no admite transformada de Laplace, a pesar de ser una función sencilla. De hecho hay multitud de señales bilaterales sencillas que no tienen transformada de Laplace. Para superar esta dificultad, en algunas disciplinas se usa una definición alternativa a la de la ecuación (7) para la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}_{\text{unilateral}}\{x(t)\}(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)\exp(-st)dt, \tag{22}$$

que es la transformada de Laplace unilateral, en contraposición con la transformada bilateral que es la que usaremos en esta asignatura. Con esta definición alternativa es sencillo comprobar que la transformada de $x(t) = \sin(t)$ es $X(s) = \frac{1}{1+s^2}$, $\Re\{s\} > 0$. Puesto que integramos para $t \geq 0$ estamos ignorando el valor de $x(t)$ para instantes anteriores a $t = 0$, lo que en la práctica supone asumir que las señales y los sistemas que analizaremos serán todos ellos causales. Aunque esto pueda parecer muy restrictivo, en realidad la transformada unilateral es muy útil: por ejemplo, cualquier circuito eléctrico será un sistema causal, y lo que nos interesa es estudiar su comportamiento a partir del instante $t = 0$ (cuando se conecta el circuito), por lo que la transformada unilateral es perfecta para analizar su comportamiento temporal (lo que se conoce como régimen transitorio).

3 Transformada inversa de Laplace

3.1 Relación con la transformada de Fourier

Dada la similitud formal entre la transformada de Laplace y la transformada de Fourier, ver ecuación (7), resulta evidente que la transformada de Fourier de $x(t)$, $\tilde{X}(\omega)$, y su transformada de Laplace, $X(s)$, guardarán algún tipo de relación. En concreto, supongamos que $s = 0$ está contenido en la ROC, y por tanto lo están todos aquellos s tal que $\sigma = \Re\{s\} = 0$. Si calculamos la transformada de Fourier de $x(t)$:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{F}\{x(t)\}(\omega)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j\omega t)dt\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-(0+j\omega)t)dt\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)\exp(-(0+j\omega)t)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)\exp(-0\cdot t)|\, dt < \infty, \end{aligned} \tag{23}$$

ya que $\Re\{s\} = 0$ pertenece a la ROC. Es decir, la integral anterior está bien definida y es finita para cualquier valor de ω, por lo que podemos concluir:

Si para una señal $x(t)$ $\Re\{s\} = 0$ está contenido en la ROC de su transformada de Laplace, entonces $x(t)$ tiene transformada de Fourier $\tilde{X}(\omega)$ y ésta es una función en el sentido clásico (no incluye deltas de Dirac). Además dicha transformada de Fourier se puede calcular a partir de la transformada de Laplace de $x(t)$, $X(\omega)$:

$$\tilde{X}(\omega) = X(s)|_{s=j\omega} = X(j\omega). \tag{24}$$

Supongamos ahora que $\Re\{s\} = \sigma_0$ pertenece a la ROC, y calculemos la transformada de Laplace de $x(t)$ en $s = \sigma_0 + j\omega$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t)\}(\sigma_0 + j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-(\sigma_0 + j\omega)t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)\exp(-\sigma_0 t))\exp(-j\omega t)dt = \mathfrak{F}\{x(t)\exp(-\sigma_0 t)\}(\omega). \quad (25)\end{aligned}$$

Supongamos que $\Re\{s\} = \sigma_0$ pertenece a la ROC de la transformada de Laplace de $x(t)$, $X(s)$. Entonces se cumple:

$$X(s)|_{s=\sigma_0 + j\omega} = X(\sigma_0 + j\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)\exp(-\sigma_0 t)\}(\omega). \quad (26)$$

Este resultado permite encontrar una fórmula de inversión para la transformada de Laplace, como se muestra a continuación.

3.2 Forma directa

A partir de la ecuación (26), y para un valor de σ_0 tal que $\Re\{s\} = \sigma_0$ pertenece a la ROC, podemos recuperar la señal original $x(t)$ a partir de su transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}X(\sigma_0 + j\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)\exp(-\sigma_0 t)\}(\omega) \Rightarrow x(t) = \exp(\sigma_0 t)\cdot \mathfrak{F}^{-1}\{X(\sigma_0 + j\omega)\}(t) \\ = \exp(\sigma_0 t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma_0 + j\omega)\exp(j\omega t)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma_0 + j\omega)\exp((\sigma_0 + j\omega)t)d\omega. \quad (27)\end{aligned}$$

La integral previa puede verse como una integral paramétrica en el plano complejo: $\sigma_0 + j\omega, \omega \in (-\infty, \infty)$ define una recta vertical (paralela al eje $j\omega$) en el plano complejo y contenida en la ROC. Al derivar esta parametrización obtenemos $\frac{d}{d\omega}s = j$, por lo que se suele dar una expresión alternativa para la transformada inversa de Laplace:

Para cualquier σ_0 tal que la recta paralela al eje imaginario $\Re\{s\} = \sigma_0$ está contenida en la ROC, tenemos la siguiente fórmula de inversión para la transformada de Laplace:

$$\textbf{síntesis:}\ x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma_0 + j\omega)\exp((\sigma_0 + j\omega)t)d\omega = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\omega} X(s)\exp(st)ds. \quad (28)$$

Notemos que la ecuación (28) **no es un cambio de variable**, al contrario de lo que se sugiere en algunos libros. Mientras que la primera expresión es una integral en una variable real, la segunda es una **integral de línea** en el plano complejo. Haciendo uso del teorema de los residuos puede demostrarse que de hecho la fórmula de inversión sigue siendo válida si elegimos cualquier camino de integración (no necesariamente una recta) contenido en la ROC. De hecho la expresión paramétrica resulta útil sólo en casos muy particulares. La integral en el plano complejo es a menudo mucho más útil, ya que permite reducir la inversión de la transformada de Laplace a un problema de cálculo de residuos.

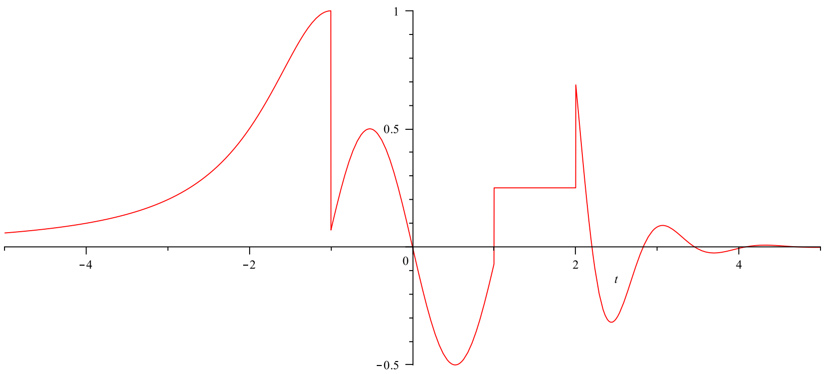


Figura 6: Ejemplo de señal continua a tramos. Este tipo de señales no contiene distribuciones delta de Dirac ni tampoco singularidades.

3.3 Descomposición en fracciones simples

Para sistemas LTI descritos por ecuaciones diferenciales la función de transferencia del sistema será un cociente de polinomios, y por tanto podrá descomponerse en fracciones simples. Esta descomposición permitirá calcular la transformada de Laplace inversa por simple inspección. En la sección 6 veremos un ejemplo completo de esta metodología.

4 Propiedades de la transformada de Laplace

4.1 Consideraciones previas

Diremos que una señal es continua a tramos si no contiene distribuciones del tipo delta de Dirac, y si existe una colección de puntos $\{t_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tal que $x(t)$ es continua en el intervalo (t_n, t_{n+1}) y además existen y **son finitos** los límites: $\lim_{t\to t_n^+} x(t)$ y $\lim_{t\to t_n^-} x(t)$. La Figura 6 muestra un ejemplo de de este tipo de señales.
Por otro lado, diremos que una señal tiene una singularidad de orden superior en t_0 si la señal no es integrable en ese punto. Por ejemplo, consideremos la señal $x(t) = \frac{1}{|t-1|^{1/2}}u(t)$, que tiene una singularidad en $t_0 = 1$ pero ésta es integrable:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \exp(-\sigma t) dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{1/2}} \exp(-\sigma t) dt + \int_1^2 \frac{1}{(t-1)^{1/2}} \exp(-\sigma t) dt + \int_2^{\infty} \frac{1}{(t-1)^{1/2}} \exp(-\sigma t) dt \\
&\leq \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{1/2}} + \int_1^2 \frac{dt}{(t-1)^{1/2}} + \int_2^{\infty} \exp(-\sigma t) dt = 2 + 2 + \frac{1}{\sigma} e^{-2\sigma} < \infty, \qquad (29)
\end{aligned}$$

y existe la transformada de Laplace para $\Re\{s\} > 0$. Si ahora consideramos $x(t) = \frac{1}{|t-1|}u(t)$, la singularidad en $t = 1$ es de orden superior y la integral diverge. Para $\Re\{s\} > 0$:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \exp(-\sigma t) dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-t} \exp(-\sigma t) dt + \int_1^2 \frac{1}{t-1} \exp(-\sigma t) dt + \int_2^{\infty} \frac{1}{t-1} \exp(-\sigma t) dt \qquad (30) \\
&\geq \int_0^1 \frac{\exp(-\sigma)}{1-t} dt + \int_1^2 \frac{\exp(-2\sigma)}{t-1} dt + \int_2^{\infty} \frac{\exp(-\sigma t)}{t-1} d = +\infty + \infty + K = \infty,
\end{aligned}$$

y $x(t)$ no tiene transformada de Laplace. Estas definiciones son relevantes porque:

- Las señales continuas a tramos, y las combinaciones de éstas con deltas de Dirac, tienen transformada de Laplace y cumplen las propiedades que estudiaremos.
- Las señales con singularidades integrables tienen transformada de Laplace, pero no siempre cumplen las propiedades que veremos a continuación.
- Las señales con singularidades de orden superior no tienen transformada de Laplace.

4.2 Propiedades básicas de la transformada de Laplace

Dada la similitud formal entre ambas transformadas, muchas de las propiedades de la transformada de Fourier se extrapolan directamente a la transformada de Laplace, por lo que dejamos como ejercicio la demostración de los resultados mostrados a continuación. No obstante, recordemos que la transformada de Laplace de una señal $x(t)$ no queda completamente determinada si no se conoce su ROC. Por tanto se hace necesario estudiar también la ROC para cada una de las propiedades que enunciamos a continuación. En lo que sigue asumimos que $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son tres señales con transformadas de Laplace $X(s)$, $Y(s)$ y $Z(s)$, y con regiones de convergencia R_x, R_y y R_z, respectivamente.

Linealidad. Si $z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t)$, entonces $Z(s) = \alpha X(s) + \beta Y(s)$ (**demostrar**). Respecto a la región de convergencia, es fácil comprender que $R_z \supseteq R_x \cap R_y$, es decir, que $Z(s)$ converge al menos en aquellos puntos donde tanto $X(s)$ como $Y(s)$ convergen. Supongamos que $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ es uno de estos puntos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |z(t)\exp(-s_0 t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha x(t) + \beta y(t)| \exp(-\sigma_0 t)dt \\ \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha||x(t)| \exp(-\sigma_0 t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} |\beta||y(t)| \exp(-\sigma_0 t)dt < \infty, \end{aligned} \tag{31}$$

y por tanto s_0 pertenece a R_z. No obstante, R_z podría ser más amplia que $R_x \cap R_y$. A modo de ejemplo sencillo, consideremos $x(t) = \exp(-t)u(t)$ e $y(t) = -\exp(-t)u(t)$, ambas con ROC: $R_x = R_y = \{\forall s \in \mathbb{C} : \Re\{s\} > -1\}$. Si sumamos estas señales obtenemos $z(t) = 0$, cuya ROC es el plano complejo completo.

Desplazamiento temporal. Si $y(t) = x(t - t_0)$, entonces $Y(s) = \exp(-st_0)X(s)$ (**demostrar**). En este caso $R_y = R_x$. Para demostrarlo, supongamos que $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0 \in R_x$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| \exp(-\sigma_0 t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t - t0)| \exp(-\sigma_0 t)dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \exp(-\sigma_0(t + t_0))dt = \exp(-\sigma_0 t_0) \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \exp(-\sigma_0 t)dt < \infty, \end{aligned} \tag{32}$$

y por tanto $s_0 \in R_y$. Supongamos ahora que $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0 \notin R_x$. El mismo cálculo anterior nos muestra que la integral no es convergente: $\exp(-\sigma_0 t_0)$ es una constante finita que multiplica a una integral no convergente (ya que $s_0 \notin R_x$), y por tanto la integral original no es convergente.

Desplazamiento en s. Si $y(t) = x(t)\exp(s_0 t)$, entonces $Y(s) = X(s - s_0)$ (**demostrar**). Estudiemos la ROC, teniendo en cuenta que $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| \exp(-\sigma t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \exp(\sigma_0 t) \exp(-\sigma t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \exp(-(\sigma - \sigma_0)t)dt, \tag{33}$$

por tanto $s \in R_y$ si y sólo si $s - s_0 \in R_x$. En otras palabras, R_y es la misma banda que R_x pero desplazada σ_0 hacia la derecha si $\Re\{s\} > 0$ (o $|\sigma_0|$ hacia la izquierda si $\Re\{s\} < 0$). Aunque esta propiedad es antagónica a la anterior, con transformada de Laplace **no hablaremos de dualidad**. La transformada de Laplace transforma señales de variable real en funciones **de variable compleja**, y por tanto no hay dualidad posible.

Inversión en el tiempo. Si $y(t) = x(-t)$, entonces $Y(s) = X(-s)$ (**demostrar**). Respecto a la ROC:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| \exp(-\sigma t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(-t)| \exp(-\sigma t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \exp(\sigma t) dt, \tag{34}$$

por tanto $s \in R_y$ si y sólo si $-s \in R_x$. En otras palabras, R_y es el resultado de reflejar R_x en el eje horizontal.

Escalado en el tiempo. Si $y(t) = x(at)$, $a \in \mathbb{R}$, entonces $Y(s) = \frac{1}{|a|} X(\frac{s}{a})$ (**demostrar**). Respecto a la ROC:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| \exp(-\sigma t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(at)| \exp(-\sigma t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \exp\left(-\sigma \frac{t}{a}\right) \frac{dt}{|a|}, \tag{35}$$

por tanto $s \in R_y$ si y sólo si $s/a \in R_x$. En otras palabras, R_y es una versión escalada de R_x (expandida si $|a| > 1$ o contraída en caso contrario). También puede aparecer reflejada en el eje horizontal si $a < 0$.

Conjugación. Si $y(t) = x(t)^*$, entonces $Y(s) = X^*(s^*)$ (**demostrar**). Para la ROC:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| \exp(-\sigma t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x^*(t)| \exp(-\sigma t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \exp(-\sigma t)\, dt, \tag{36}$$

y por tanto $R_y = R_x$ y la ROC no cambia.

Convolución. Al igual que ocurría en el caso de la transformada de Fourier, esta propiedad tiene una gran importancia. Si $z(t) = (x * y)(t)$, entonces $Z(s) = X(s)Y(s)$ (**demostrar**), de forma que cualquier sistema LTI se podrá caracterizar en términos del producto de la transformada de Laplace de su entrada con una función de transferencia H(s). Estudiemos la ROC de $Z(s)$ para un s contenido simultáneamente en R_x y R_y:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} |z(t)| \exp(-\sigma t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right| \exp(-\sigma t) dt \\
\leq \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| \cdot |y(t-\tau)| d\tau \right) \exp(-\sigma t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |y(t-\tau)| \exp(-\sigma t) dt \\
\stackrel{r=t-\tau}{=} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |y(r)| \exp(-\sigma r) \exp(-\sigma \tau) dr \\
\stackrel{s\in R_y}{=} \quad & K_y \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| \exp(-\sigma \tau) d\tau \stackrel{s\in R_x}{=} K_x K_y < \infty,
\end{aligned} \tag{37}$$

con K_x y K_y dos constantes positivas finitas, que han de existir puesto que estamos asumiendo que $s \in R_x$ y $s \in R_y$. Podemos concluir entonces que $R_z \supseteq R_x \cap R_y$. Al igual que pasaba con la suma de transformadas de Laplace, la ROC puede ser mayor que la intersección de las ROC originales; puesto que tenemos el producto de las transformadas de Laplace, la ROC resultante será mayor que la intersección cuando los ceros de una de las transformadas cancelen los polos de la otra. Por ejemplo:

Ejercicio: Para las señales $x(t) = \exp(-2t)u(t) + \exp(t)u(-t)$ e $y(t) = 2\delta(t) + \delta'(t)$:

1. Calcular la transformada de Laplace de ambas señales, $X(s)$ e $Y(s)$, junto con las ROC correspondientes, R_x y R_y. Recodemos que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)f(t) = -f'(0)$.
2. Representar los polos y los ceros de $X(s)$ e $Y(s)$ junto con sus ROC.
3. Calcular la convolución entre ambas señales, $z(t) = (x * y)(t)$.
4. Calcular la transformada de Laplace de $z(t)$, $Z(S)$, junto con su ROC, R_z, y comprobar que de hecho R_z es más amplia que $R_x \cap R_y$.

Diferenciación en tiempo. Si $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, y si tanto $x(t)$ como $y(t)$ admiten transformada de Laplace, entonces $Y(s) = sX(s)$. En este caso el cálculo de la ROC se hace más sencillo utilizando la propiedad anterior: podemos ver la derivada como una convolución con la derivada de la delta de Dirac, cuya transformada de Laplace será:

$$\mathcal{L}\{\delta'(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(s)\exp(-st)dt = -\frac{d}{dt}\exp(-st)\bigg|_{t=0} = s, \tag{38}$$

siendo la integral convergente $\forall s \in \mathbb{C}$. Derivar $x(t)$ será equivalente a convolucionar con $\delta'(t)$, y por tanto $Y(s) = sX(s)$ con $R_y \supseteq R_x \cap \mathbb{C} = R_x$. R_y es al menos R_x, pudiendo ser incluso más amplia (considerar por ejemplo el escalón de Heaviside y su derivada, la delta de Dirac). Es importante notar que exigimos que tanto $x(t)$ como $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ admitan transformada de Laplace; por ejemplo, $x(t) = \frac{1}{(t-1)^{1/2}}u(t)$ presenta una singularidad integrable en $t = 1$, mientras que su derivada, $y(t) = -j\delta(t) - \frac{1}{2}\frac{1}{(t-1)^{3/2}}$, presenta una singularidad de orden superior y por tanto no admite transformada de Laplace.

Diferenciación en s. Si $y(t) = t{\cdot}x(t)$, entonces $Y(s) = -\frac{d}{ds}X(s)$ (**demostrar**). La ROC R_y será idéntica a R_x:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|\exp(-\sigma t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)||t|\exp(-\sigma t)dt. \tag{39}$$

El carácter de la integral anterior viene dado por la caída de las colas del integrando. Puesto que una exponencial negativa cae más rápido que cualquier potencia t^n, y una exponencial positiva crece más rápido que cualquier potencia t^n, el producto del integrando por $|t|$ no afecta al carácter de la integral. Esta propiedad se podrá generalizar a:

$$\mathcal{L}\{t^n x(n)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}X(s),\ \text{ROC} = R_x. \tag{40}$$

Integración en tiempo. Supongamos que $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$. Al igual que la diferenciación en tiempo, la forma más sencilla de deducir esta propiedad es ver la integración como una convolución como la función de Heaviside, cuya transformada de Laplace es $U(s) = \frac{1}{s}$, $\Re\{s\} > 0$. Por tanto, $Y(s) = \frac{1}{s}X(s)$, y $R_y \supseteq R_x \cap \{\forall s \in \mathbb{C} : \Re\{s\} > 0\}$. Comparemos la deducción de la propiedad de integración en este caso con su deducción en el caso de la transformada de Fourier. Mientras que aquí se ha obtenido de forma trivial a partir de la propiedad de convolución, su obtención para la transformada de Fourier es mucho más complicada, requiriendo técnicas avanzadas de variable compleja. Esta consideración puede servir para ilustrar el hecho de que en general la operativa con transformada de Laplace será más sencilla.

4.3 Teoremas del valor inicial y valor final

Además de las ya mencionadas, vamos a ver dos propiedades adicionales de la transformada de Laplace que no tienen equivalente alguno en la transformada de Fourier. A diferencia de las vistas hasta ahora, las dos relaciones siguientes **no son válidas para todas las señales de interés**. En concreto, sólo serán aplicables cuando:

- La señal es causal, en el sentido de que $x(t) = 0, \forall t < 0$.
- La señal no contiene distribuciones del tipo delta de Dirac.
- La señal puede tener una singularidad ($\lim_{t\to 0^+} x(t) = \pm\infty$) en 0, pero ésta ha de ser integrable, es decir, $\int_0^{t_0} x(t)dt < \infty$.

Entonces se cumple:

$$\textbf{Teorema del valor inicial:} \quad \lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to\infty} sX(s); \tag{41}$$

$$\textbf{Teorema del valor final:} \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s). \tag{42}$$

No probaremos estos resultados de momento.

4.4 Resumen de propiedades de la transformada de Laplace

A modo de resumen, la Tabla 1 muestra las diferentes relaciones entre transformadas de Laplace vistas hasta el momento junto con las relaciones correspondientes entre las ROC.

5 Caracterización de sistemas LTI

Como comentamos al inicio del tema, una de las ventajas de la transformada de Laplace es que permite la caracterización de sistemas LTI de forma sencilla. En la sección anterior vimos que esta transformada también posee la propiedad de convolución, esto es, que convierte convoluciones en el dominio temporal en productos en el dominio transformado de Laplace. Como consecuencia:

Un sistema LTI quedará completamente determinado a través de la transformada de Laplace, $H(s)$, de su respuesta al impulso, $h(t)$, y de la ROC de ésta siempre y cuando dicha transformada de Laplace exista. En caso de existir, denominaremos función de transferencia del sistema a $H(s)$.

Una vez determinada la función e transferencia, en caso de existir ésta, podemos estudiar las propiedades del sistema. Respecto a la memoria, recordemos que un sistema LTI es sin memoria si y sólo si su respuesta al impulso es una delta de Dirac o combinación de derivadas de la delta de Dirac en el origen. Por tanto:

Un sistema LTI será **sin memoria** si su transformada de Laplace es un polinomio en la variable s: $a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0$, con ROC todo el plano complejo.

Propiedad	$z(t)$	$Z(s)$	ROC (R_z)
Linealidad	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\alpha X(s) + \beta Y(s)$	$R_z \supseteq R_x \cap R_y$
Desplazamiento (t)	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0} X(s)$	$R_z = R_x$
Desplazamiento (s)	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	$s \in R_z \Leftrightarrow s - s_0 \in R_x$
Inversión	$x(-t)$	$X(-s)$	$s \in R_z \Leftrightarrow -s \in R_x$
Escalado	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{s}{a}\right)$	$s \in R_z \Leftrightarrow \frac{s}{a} \in R_x$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	$R_z = R_x$
Convolución	$(x * y)(t)$	$X(s)Y(s)$	$R_z \supseteq R_x \cap R_y$
Diferenciación (t)	$\frac{d}{dt} x(t)$	$sX(s)$	$R_z \supseteq R_x$
Diferenciación (s)	$t^n x(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X(s)$	$R_z = R_x$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	$R_z \supseteq R_x \cap \{\Re\{s\} > 0\}$

Teoremas de valor inicial y final[1]

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} x(t) &= \lim_{s \to \infty} sX(s) \\ \lim_{t \to \infty} x(t) &= \lim_{s \to 0} sX(s) \end{aligned}$$

[1]Estas propiedades sólo son válidas para señales que:

1. Sean causales: $x(t) = 0, \forall t < 0$.
2. No contengan distribuciones del tipo delta de Dirac en el origen.
3. No contengan singularidades no integrables en el origen: $\int_0^{\epsilon} |x(t)| dt < \infty$.

Tabla 1: Resumen de propiedades de la transformada de Laplace. Asumimos que $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son señales con transformadas de Laplace respectivas $X(s)$, $Y(s)$ y $Z(s)$ convergentes en ROCs respectivas R_X, R_y y R_z. Estas propiedades tiene validez general con señales continuas a tramos y distribuciones delta de Dirac.

Esta propiedad era también sencilla de deducir a partir de la transformada de Fourier.

La estabilidad de un sistema LTI se traducía en la integrabilidad absoluta de su respuesta al impulso. Así pues, si la ROC de la transformada de Laplace contiene el eje imaginario $j\omega$ podremos concluir que el sistema es estable. No obstante, la afirmación contraria puede no ser cierta: si volvemos al ejemplo de la función racional truncada, $x(t) = \frac{1}{1+t^2} u(t)$, recordemos que la frontera de su ROC era precisamente el eje imaginario, que no está contenido en la ROC. Sin embargo había convergencia absoluta en todo el eje imaginario, siendo el sistema estable. Entonces:

Un sistema LTI será **estable** si y sólo si la ROC de su transformada de Laplace contiene el eje imaginario $j\omega$, o bien si la frontera de la ROC es el propio eje $j\omega$ y éste no contiene polos de la transformada de Laplace.

Recordemos que la deducción de esta propiedad a partir de la respuesta en frecuencia no es trivial.

La siguiente propiedad de interés es la causalidad o no (también la anticausalidad) del sistema. Recordemos que esta propiedad se traduce en que la respuesta al impulso se anule para instantes anteriores a 0. Desafortunadamente, esta propiedad no se puede deducir directamente de la transformada de Laplace o de la ROC en un caso general. Hemos demostrado antes que la ROC de una señal a derechas converge hacia la derecha, pero sabemos que hay señales a derechas que no son causales (por ejemplo, $h(t) = u(t+1)$). Para una respuesta al impulso genérica, sólo podremos decir:

La respuesta al impulso es **a derechas o de tiempo de encendido finito** si la ROC de la función de transferencia es un semiplano que se extiende hacia la derecha. La respuesta al impulso es **a izquierdas o de tiempo de apagado finito** si la ROC de la función de transferencia es un semiplano que se extiende hacia la izquierda.

Aunque la causalidad no se pueda deducir directamente, en realidad muchos sistemas físicos sólo requieren caracterizar si son de tiempo de encendido finito. Por ejemplo, para un circuito eléctrico, si una determinada señal comienza en t_0 este desfase está diciéndonos tan sólo que el circuito se conectó en un instante diferente de $t = 0$, lo cual no afecta a sus propiedades. De hecho los circuitos eléctricos son sistemas descritos por ecuaciones diferenciales, que como veremos en la siguiente sección tienen una función de transferencia que es un cociente de polinomios en s. Para estos sistemas de hecho sí podemos estudiar la causalidad directamente a partir de la ROC:

Si la función de transferencia es un **cociente de polinomios en** s, entonces el sistema es **causal** si y sólo si la ROC es un semiplano que se extiende desde el polo más a la derecha hacia $s \to \infty$. Será **anticausal** si se extiende desde el polo más a la izquierda hacia $s \to -\infty$.

Por último, la causalidad o anticausalidad se pueden deducir a partir de la ROC de un sistema más general siempre y cuando la respuesta al impulso no contenga distribuciones del tipo delta de Dirac en el origen[4]:

Supongamos que la respuesta al impulso $h(t)$ no contiene distribuciones del tipo delta de Dirac en el origen, y que tampoco contiene singularidades de orden superior (no inte-

[4]Recordemos que con transformada Z la causalidad se traduce en que $z \to \infty$ no sea un polo de $H(z)$ para un $h[n]$ cualquiera. Esta propiedad no se puede extrapolar al caso de la transformada de Laplace debido a que las respuestas al impulso de tipo delta de Dirac no son funciones (en el caso discreto $\delta[n]$ es una señal más, sin ninguna peculiaridad). Por ejemplo, podemos calcular la función de transferencia para $h(t) = \delta'(t)$: $H(s) = s$, que presenta un polo en $s \to \infty$ a pesar de ser causal.

grables) de forma que su transformada de Laplace es convergente para una determinada ROC. El sistema es causal si y sólo si la ROC es un semiplano que se extiende hacia la derecha, y si además se cumple: $|\lim_{s\to\infty} X(s)| < \infty$. Es anticausal si la ROC es un semiplano hacia la izquierda y se cumple $|\lim_{s\to-\infty} X(s)| < \infty$.

De nuevo la causalidad o no del sistema no se pueden deducir en general de la respuesta en frecuencia de éste.

6 Ecuaciones diferenciales con transformada de Laplace

Recordemos que un sistema caracterizado por ecuaciones diferenciales tiene la forma:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}; \tag{43}$$

que utilizando la propiedad de derivación se traduce en la función de transferencia:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}, \tag{44}$$

que resulta ser un cociente de polinomios en s. Los polos de la función de transferencia serán las raíces del polinomio $a_N s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \ldots + a_0$, mientras que sus ceros serán las raíces del polinomio $b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \ldots + b_0$. Puesto que la ROC no puede contener polos, ésta vendrá dada por bandas contenidas entre los polos de $H(s)$. Veamos con un ejemplo cómo obtener la respuesta al impulso de una ecuación diferencial mediante el uso de transformada de Laplace. Consideremos:

$$\begin{aligned} &\frac{d^3y(t)}{dt^3} - 5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8\frac{dy(t)}{dt} - 4y(t) = 3\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 7\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) \\ \Rightarrow \quad & H(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{3s^2 - 7s + 5}{s^3 - 5s^2 + 8s - 4} = \frac{3s^2 - 7s + 5}{(s-1)(s-2)^2}, \end{aligned} \tag{45}$$

que tiene un polo simple en $s = 1$ y un polo doble en $s = 2$. Para calcular la transformada inversa de Laplace de $H(s)$ vamos a descomponer esta expresión en fracciones simples, y relacionaremos cada uno de los sumandos con las transformadas de Laplace de exponenciales truncadas (ver sección 2.1). Recordemos que al tener $H(s)$ un polo doble en $s = 2$ la descomposición en fracciones simples es de la forma:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2} = \frac{A(s-2)^2 + B(s-1)(s-2) + C(s-1)}{(s-1)(s-2)^2} \\ &= \frac{A(s^2-4s+4) + B(s^2-3s+2) + C(s-1)}{(s-1)(s-2)^2} \\ &= \frac{(A+B)s^2 + (-4A-3B+C)s + (4A+2B-C)}{(s-1)(s-2)^2}, \end{aligned} \tag{46}$$

donde las constantes desconocidas se calcularán agrupando los coeficientes en cada potencia de s y resolviendo el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 3 \\ -4A - 3B + C &= -7 \\ 4A + 2B - C &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{A = 1, B = 2, C = 3\}, \tag{47}$$

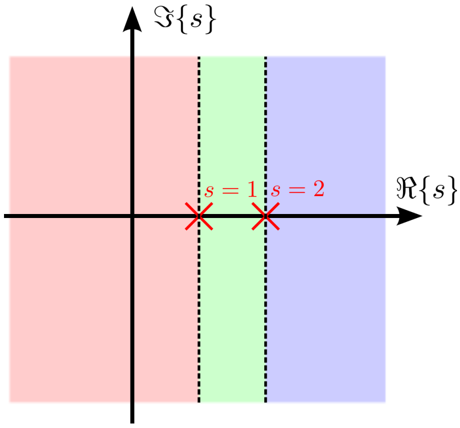


Figura 7: La ROC de $H(s) = \frac{3s^2-7s+5}{(s-1)(s-2)^2}$ puede ser una de las tres posibles mostradas arriba. La ROC para un cociente de polinomios en s estará siempre comprendida entre los polos de $H(s)$, que en este caso son $s=1$ (simple) y $s=2$ (doble).

y por tanto obtenemos:

$$H(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{2}{s-2} + \frac{3}{(s-2)^2}. \tag{48}$$

De la sección 2.1 sabemos que los dos primeros sumandos se corresponden con una exponencial truncada, que puede ser causal o anticausal. El tercer sumando puede relacionarse con el segundo en la forma:

$$\frac{3}{(s-2)^2} = \frac{-3}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s-2}\right), \tag{49}$$

y por tanto corresponderá a la misma exponencial truncada del segundo sumando multiplicada por $\frac{3}{2}t$. En cualquier caso, resulta obvio que no podemos determinar la respuesta al impulso $h(t)$ sin tener información adicional sobre la ROC de $H(s)$.

La respuesta al impulso de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial no podrá obtenerse mediante la transformada de Laplace si no se conoce explícitamente cuál es la ROC de la función de transferencia. Puesto que la ROC será una banda comprendida entre los polos de $H(s)$, deberá especificarse dicha banda.

En el caso que nos ocupa, la ROC puede ser una de las tres representadas en la Figura. 7:

- Si asumimos que la respuesta al impulso es causal, la ROC ha de ser un semiplano hacia la derecha, y por tanto será la zona sombreada en azul. Estamos asumiendo pues que la ROC de las tres fracciones simples se extiende hacia la derecha, y por lo tanto tenemos tres exponenciales causales:

$$h(t) = \exp(t)u(t) + 2\exp(2t)u(t) + 3t\exp(2t)u(t). \tag{50}$$

- Si asumimos que la respuesta al impulso es anticausal, la ROC ha de ser un semiplano hacia la izquierda, y por tanto será la zona sombreada en rojo. Estamos asumiendo pues que la ROC de las tres fracciones simples se extiende hacia la izquierda, y por lo tanto tenemos tres exponenciales anticausales:

$$h(t) = -\exp(t)u(-t) - 2\exp(2t)u(-t) - 3t\exp(2t)u(-t). \tag{51}$$

- Si asumimos que la respuesta al impulso no es causal ni anticausal, la ROC sólo puede ser la banda sombreada en verde comprendida entre los dos polos. Estamos asumiendo pues que la ROC de la primera fracción simple se extiende hacia la derecha (exponencial causal), y las de las otras fracciones simples hacia la izquierda (exponenciales anticausales):

$$h(t) = \exp(t)u(t) - 2\exp(2t)u(-t) - 3t\exp(2t)u(-t). \tag{52}$$

Como comentario final, notemos que en este caso se ha identificado causalidad con semiplanos hacia la derecha y anticausalidad con semiplanos hacia la izquierda. Esto sólo es válido debido a que estamos tratando con funciones de transferencia que son cocientes de polinomios en s, es decir, tratamos con sistemas descritos por ecuaciones diferenciales. En un caso general **no se puede** asociar causalidad con una determinada forma de la ROC.

Ejercicio: Resolver la ecuación diferencial (45) utilizando la transformada de Fourier. Comprobar que con transformada de Fourier sólo obtenemos una de las tres posibles soluciones calculadas con la transformada de Laplace. ¿Que característica tiene la solución que encontramos con la transformada de Fourier?
