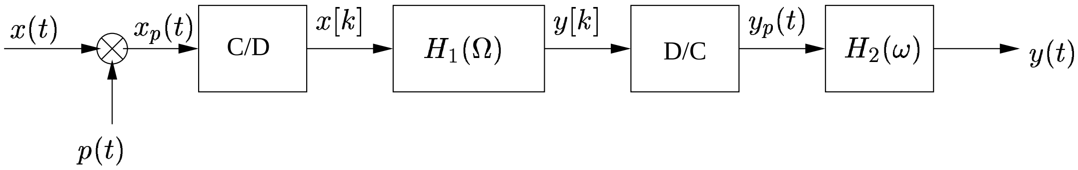
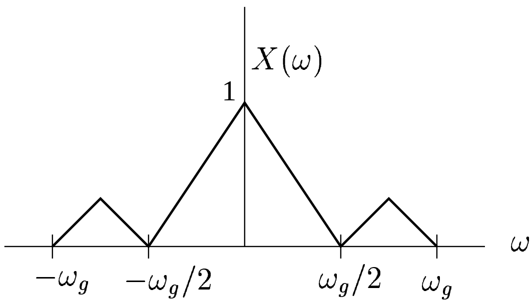
# Sistemas Lineales

## Examen de Enero 2004

1. (2 pt.) En el sistema que se muestra a continuación se realiza un filtrado pasobajo de una señal continua usando para ello un filtro pasobajo discreto.




La señal de entrada $x(t)$ viene dada por su transformada de Fourier $X(\omega)$:




La señal $p(t)$ es un tren de deltas equiespaciadas $T$. El bloque C/D es un conversor continuo-discreto que transforma las deltas continuas $\delta(t)$ es impulsos discretos $\delta[n]$, de tal modo que se cumple que $x[n] = x(nT)$. El bloque D/C realiza la tarea inversa, pasar de impulsos discretos $\delta[n]$ a deltas continuas $\delta(t)$. La señal de entrada $x(t)$ se muestrea a la frecuencia de Nyquist.

(a) Calcule $T$ y dibuje el espectro de $x_p(t)$.

(b) Dibuje $X(\Omega)$ (la Transformada de Fourier de la señal $x[n]$).

(c) Si se define la transformada de Fourier de $y[n]$ como

$$Y(\Omega) = \begin{cases} 0 & \frac{\pi}{2} < |\Omega| \leq \pi \\ T \cdot X(\Omega) & |\Omega| \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

dibuje el filtro $H_1(\Omega)$ y la señal $Y_p(\omega)$.

(d) Si $H_2(\omega)$ es un filtro pasobajo con frecuencia de corte $\omega_g$ calcule la respuesta al impulso global del sistema en el dominio temporal.

2. (2,5 pt.) Una señal continua

$$x_1(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) & 0 \leq t < 1.5 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

es la entrada a un sistema LTI con respuesta al impulso $x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 1.5k)$. Denotaremos la salida del sistema por $x(t)$.

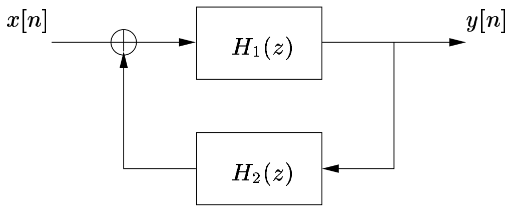
(a) Dibuje las señales $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x(t)$.

(b) Calcule la transformada de Fourier de $x(t)$.

(c) Calcule la señal de salida $y(t)$ cuando $x(t)$ es la entrada a un nuevo LTI con respuesta al impulso

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{e^{-j\omega}}{\omega^2+1} & |\omega| \leq \pi \\ 0 & |\omega| > \pi \end{cases}$$

3. (2,5 pt.) Considere el sistema de la figura




Sabiendo que $h_1[n]$ es un sistema LTI causal que tiene un polo en $z_1 = 0.5$ y un cero en $z = 0.25$, y

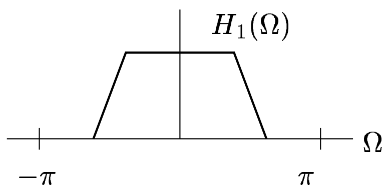
$$h_2[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(a) Determinar la estabilidad del sistema.

(b) Calcular el diagrama de polos y ceros del sistema.

(c) Obtener la respuesta al impulso del sistema inverso causal.

4. (1 pt) Un filtro pasobajo discreto $h_1[n]$ tiene por transformada de Fourier $H_1(\Omega)$. Un periodo de dicha señal tiene la forma:




Calcule y dibuje $H_2(\Omega)$, siendo $h_2[n] = (-1)^n h_1[n]$. ¿Qué clase de filtro es $h_2[n]$.

5. (2 pt.) Se va a proceder al estudio de un pulso rectangular $r(t)$, definido como

$$r(t) = \begin{cases} a & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

(a) Dibuje el módulo de la transformada de Fourier de $r(t)$, $|R(\omega)|$.

(b) Se muestrea $R(\omega)$ con un tren de deltas equidistantes $\omega_0$, dando lugar a la señal

$$R_p(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k\omega)\delta(\omega - k\omega_0)$$

Dibuje $R_p(\omega)$ para $|\omega| \leq \frac{4\pi}{T}$ cuando $\omega_0$ vale $\frac{2\pi}{4T}$, $\frac{2\pi}{2T}$ y $\frac{2\pi}{T}$.

(c) Dibuje la función temporal $r_p(t)$ para cada uno de los valores de $\omega_0$ del apartado anterior.