

SISTEMAS LINEALES
EXAMEN DE ENERO 2005

1. **(2,5 pts.)** Sea $x(t)$ una señal limitada en tiempo, de tal modo que $x(t) = 0$ $|t| > T_0$. Estudie el efecto que tiene en el dominio temporal el muestreo de su transformada de Fourier $X(\omega)$ por un tren de impulsos equiespaciados. (Supóngase que el tren de impulsos se modela como un tren de deltas equiespaciadas una distancia W , con $W < \frac{\pi}{T_0}$.) Ilustre el resultado con un ejemplo gráfico.
2. **(2,5 pts.)** Demuestre que una secuencia discreta real y periódica $x[n]$ puede escribirse como una suma de senos y cosenos. (Por facilidad suponga que el periodo N es impar).
3. **(2,5 pts.)** Un determinado instrumento musical genera un tono puro junto con todos sus armónicos. Podemos modelar este comportamiento de la siguiente manera:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\alpha n} \cos(n\omega_0 t)$$

con $\alpha > 0$ y real.

- (a) Calcule y represente $X(\omega)$.
- (b) Explique si se podría recuperar la señal $x(t)$ muestreada usando un filtro pasabajo, y en caso afirmativo calcule la frecuencia de muestreo mínima.
- (c) La transformada de Fourier de una señal periódica se puede escribir como una suma ponderada de deltas de la siguiente forma:

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - kW)$$

Se define la potencia de una señal periódica como

$$P = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega$$

donde $S_X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \delta(\omega - kW)$. Partiendo de la señal $x(t)$ de los apartados anteriores, se desea generar la señal $y(t) = x(t) * h(t)$, donde $h(t)$ es un filtro pasabajo de ganancia unidad. Calcule la frecuencia de corte del filtro (en función de α) de tal modo que la señal $y(t)$ tenga al menos el 90% de la potencia de $x(t)$. Calcule la frecuencia de corte para $\alpha = 0.3$. (Indicación: Trabaje en el dominio de la frecuencia).

4. **(2,5 pts.)** Considere el sistema LTI representado por la siguiente respuesta al impulso:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}$$

- (a) Escriba la ecuación en diferencias que da lugar a esta respuesta al impulso.
- (b) Represente el diagrama de bloques de dicho sistema (formas directas I y II).
- (c) Calcule dos sistemas $h_1[n]$ y $h_2[n]$ que cumplan que

$$h[n] * h_1[n] = h[n] * h_2[n] = \delta[n]$$