Sistemas Lineales

Examen de Febrero 2010

1. **(2.5 pt.)** Sea la señal $x[n] = e^{-a|n|}$, con a un número complejo.

   (a) Asumiendo que $\Re\{a\} > 0$, calcule $y_1[n] = x[n] * x[n]$.

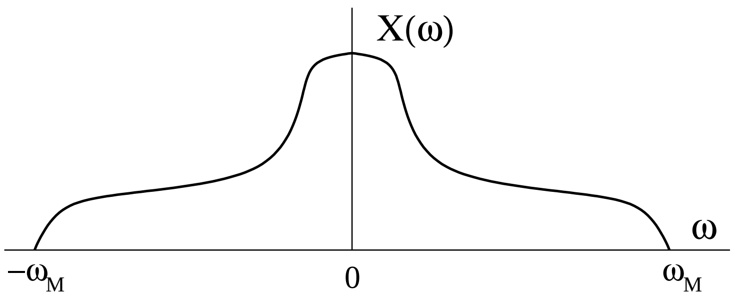
   (b) Asumiendo que $\Re\{a\} > 0$, calcule $y_2[n] = x[n-4] * x[n-4]$.

   (c) Para cualquier valor de a, calcule la transformada Z de $x[n]$.

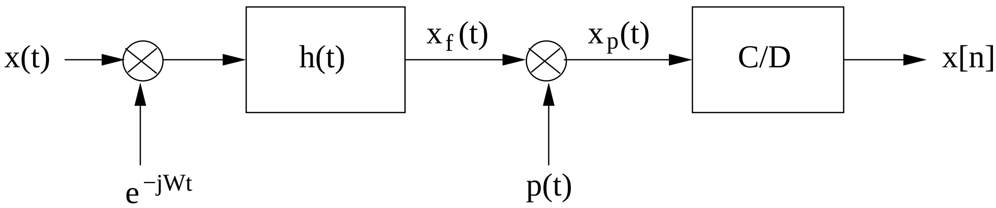
   (d) Asumiendo que $\Re\{a\} > 0$, calcule la energía, potencia media y potencia instantánea de $x[n]$ en función de a.

   (e) Suponga un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n] = x[n]$. Estudie su estabilidad y su causalidad. Calcule la respuesta al impulso del sistema inverso (para aquellos valores de a en que exista).

2. **(2.5 pt.)** Sea una señal de audio $x(t)$, tal que su transformada de fourier $X(\omega) = 0$ si $|\omega| > \omega_M$, con $\omega_M = 4\pi \cdot 10^4$, tal y como se muestra en la figura: Se asume que $X(\omega)$ es además real y par.



   Se pretende diseñar un sistema de comunicación móvil digital, para lo que va a ser necesario acondicionar la señal a los requerimientos del sistema, de acuerdo con el siguiente esquema:



   - $W = 2\pi \cdot 3,4 \cdot 10^3$.
   - $h(t)$ es un filtro pasobajo de ganancia 1 y frecuencia de corte $3,4kHz$.
   - $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$, con T el periodo de muestreo que se corresponde con la frecuencia de Nyquist.

   Se pide:

   (a) Dibuje la transformada de Fourier de las señales $x_p(t)$ y $x[n]$.

   (b) Proponga un esquema para recuperar una versión pasobajo de $x(t)$ a partir de $x[n]$. Represente el esquema en el dominio temporal.

3. **(2.5 pt.)** Dada la señal $x(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5)$ y la respuesta al impulso de un sistema LTI $h(t) = e^{j\omega_0 t}$

(a) Determine los valores de ω_0 que aseguren que $y(t) = 0$.

(b) Demuestre que para una señal $x(t)$ arbitraria la salida será siempre periódica (o nula). Calcule su periodo y su serie de Fourier.

4. **(2.5 pt.)** En el siguiente problema se explorarán algunas propiedades de la transformada de Laplace. Supóngase que un sistema LTI causal viene descrito mediante una ecuación diferencial con coeficientes constantes de la forma:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^{i)}y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{M} b_i \frac{d^{i)}x(t)}{dt^i}$$

donde a_i y b_i con coeficientes constantes.

(a) Si la respuesta al impulso del sistema $h(t)$ es real, estudie qué propiedades han de tener los polos y los ceros de $H(s)$. (NOTA: tenga en cuenta que los polos y los ceros pueden ser complejos).

(b) Encuentre una relación entre N y M si se cumple que $\lim_{s\to\infty} H(s) = 1$.

(c) Encuentre alguna restricción a los coeficientes a_i y b_i si se cumple que $\lim_{s\to 0} H(s) = 1$.

(d) Calcule la respuesta al impulso del sistema $h(t)$ teniendo en cuenta las siguientes propiedades:

- $h(t)$ es real y causal.
- $\lim_{s\to\infty} H(s) = 2$.
- $H(s)$ tienes dos ceros complejos.
- Uno de los polos de $H(s)$ está en $s = 2 + j$.
- Uno de los ceros de $H(s)$ está en $s = -1 - 0.5j$