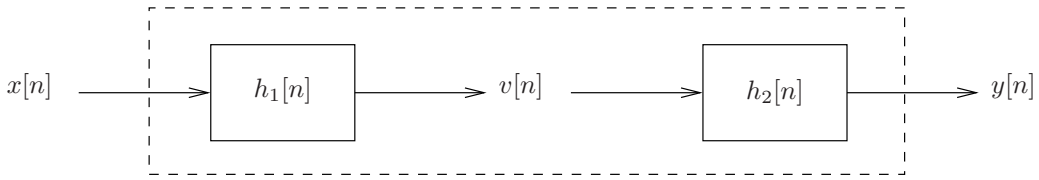
Sistemas Lineales

Examen de Julio 2010

1. **(2.5 puntos)** Se considera el siguiente esquema:



donde $h_1[n]$ es un sistema LTI causal descrito mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$v[n] = e^{-a \cdot T_s}\ v[n-1] + b\ x[n].$$

a y b son dos constantes complejas tales que $\mathcal{R}\{a\} > 0$ y $\mathcal{R}\{b\} > 0$, y T_s es el periodo de muestreo.

   (a) Calcule la función de transferencia $H_1(z)$ y la respuesta al impulso del sistema $h_1[n]$.

   (b) Calcule qué restricciones tiene que tener T_s para que el sistema $h_1[n]$ sea estable. (Indíquelas en función de a y b).

   (c) Calcule $h_2[n]$ si se sabe que $y[n] = x[n]$ para cualquier entrada.

2. **(2.5 pt.)** En el siguiente problema se analizará un esquema *real* de muestreo. En muchos esquemas comerciales, para muestrear una señal continua $x(t)$, en lugar de tomar su valor en un punto concreto, $x[n] = x(nT)$, lo que se hace es tomar el valor medio en un intervalo alrededor de ese punto:

$$x[n] = \frac{1}{T_s} \int_{(n-1/2)T}^{(n+1/2)T} x(t)dt$$

Esto puede modelarse usando un tren de deltas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x[n] &= x_2(nT) \\ x_p(t) &= x_2(t) \cdot p(t) \\ &= [x(t) * h_1(t)] \cdot p(t) \end{aligned}$$

donde

$$h_1(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \\ \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

y $p(t)$ es un tren de deltas equiespaciadas de la forma

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - kT\right)$$

Las señales $x[n]$ y $x_p(t)$ son alternativamente la señal muestreada discreta y la señal muestreada continua. Considerando que la señal $x(t)$ es de banda limitada, tal que $X(\omega) = 0$ si $|\omega| > \frac{\omega_s}{2}$:

   (a) Dibuje la transformada de Fourier de $x_2(t)$, $x_p(t)$ y $x[n]$ en función de la de $x(t)$.

   (b) Explique el efecto del esquema de muestreo sobre la señal $x(t)$. Indique si habrá o no aliasing y si la señal podrá recuperarse.

(c) En caso de poderse recuperar alguna de las señales, proponga un esquema para recuperar la señal promediada $x_2(t)$ y/o un esquema para recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

3. **(2.5 puntos)** El coseno alzado se define como:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\cos(\omega_0 t)+1}{2}, & |t| \leq \frac{\pi}{\omega_0}, \\ 0, & |t| > \frac{\pi}{\omega_0}. \end{cases}$$

(a) Calcule su energía total y su potencia media, indicando si es una señal de energía o de potencia.

(b) Para $\omega_0 = \pi$, calcule su convolución con la respuesta al impulso:

$$h(t) = u(2-t) - u(-1-t).$$

Dé la solución mediante una sola expresión simplificada.

4. **(2.5 pt.)** Para la evaluación de tumores en distintos tejidos se usa una técnica llamada *análisis de la perfusión*. Para ello se inyecta en un paciente un compuesto (Gadolíneo) que a través de la sangre pasa a los tejidos. En función de la cantidad de compuesto que pase a un tejido, éste puede verse como tejido sano o bien como tejido canceroso.

La perfusión del Gadolíneo de la sangre a los tejidos puede verse como un sistema lineal causal que sigue la siguiente ecuación difencial:

$$\frac{dc(t)}{dt} = K_T \cdot c_a(t) - K_e \cdot c(t)$$

donde $c_a(t)$ es la señal de entrada (concentración de Gadolíneo en la sangre), $c(t)$ es la señal de salida (concentración de Gadolíneo en un tejido) y K_T y K_e son dos constantes (tasas de transferencia sangre-tejido, y tejido-sangre). A partir de la ecuación diferencial se pide:

(a) Calcule la respuesta al impulso del sistema $h(t)$.

(b) Se define la siguiente señal discreta $x[n] = h(nT)$, donde $h(t)$ es la respuesta al impulso del apartado (a). Calcule la transformada de Fourier de $x[n]$. (Nota: por simplicidad considere que $u[n] = u(nT)$).

(c) Suponga un sistema lineal discreto tal que $h[n] = h(nT)$. Estudie la estabilidad, causalidad e invertibilidad de $h(t)$ y de $h[n]$ en función del valor de T.

(d) Un parámetro de interés en la perfusión es la ratio $v_e = \frac{K_T}{K_e}$. Suponiendo que se conoce $c(t)$ y $c_a(t)$, proponga un método para calcular v_e.