Sistemas Lineales

Examen de Julio 2011. Soluciones

1. **Sea la señal $x(t)$ con transformada de Fourier**

$$X(\omega) = \begin{cases} A^2 - \omega^2 & |\omega| \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0 & |\omega| > \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

siendo A un número real positivo, y sea un sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (j)^n \delta(t-n)$$

(a) Sin calcular la transformada inversa, indique si la señal $x(t)$ cumple alguna de las siguientes propiedades: par, impar, real pura, imaginaria pura, hermítica, antihermítica o periódica.

(b) Estudie las siguientes propiedades del sistema: Memoria, causalidad, estabilidad e invertibilidad.

(c) Calcule la salida $y(t)$ para la entrada $x(t)$.

(a) Planteamos las propiedades en tiempo y las pasamos a frecuencia:

Par:	$x(t) = x(-t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$	$X(\omega) = X(-\omega)$
Impar:	$x(t) = -x(-t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$	$X(\omega) = -X(-\omega)$
Real:	$x(t) = x^*(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$
Imaginaria:	$x(t) = -x^*(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$	$X(\omega) = -X^*(-\omega)$
Hermítica:	$x(t) = x^*(-t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$	$X(\omega) = X^*(\omega)$
Antihermítica:	$x(t) = -x^*(-t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$	$X(\omega) = -X^*(\omega)$

Dado que la TF de la señal es real, se cumple que $X(\omega) = X^*(\omega)$, con lo que la señal $x(t)$ será **real**, **par** y **hermítica**. Además, si $x(t)$ es periódica, $X(\omega)$ será un tren de deltas. Como ese no es el caso, no es periódica.

(b) Estudiamos las propiedades a partir de la respuesta al impulso $h(t)$:

Memoria: Para que un sistema LTI no tenga memoria, su respuesta al impulso ha de ser de la forma $h(t) = K \cdot \delta(t)$. Como no es el caso, el sistema tiene memoria.

Causalidad: La respuesta al impulso no cumple que $h(t) = 0$ si $t < 0$ (Causal) ni $h(t) = 0$ si $t > 0$ (Anticausal), con lo que el sistema será no causal.

Estabilidad: El sistema será estable si la respuesta al impulso es absolutamente integrable:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |\sum_{n=-\infty}^{\infty} (j)^n \delta(t-n)|dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(j)^n| \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-n)dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 = \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema no será estable.

Invertibilidad: El sistema inverso puede definirse en Fourier como

$$H_i(\omega) = \frac{1}{H(\omega)}$$

Sabemos que $H(\omega)$ es un tren de deltas, por lo que no podemos encontrar una inversa de este modo.
Podemos ver el problema de otra forma. Al ser $H(\omega)$ un tren de deltas, lo que hacemos en frecuencia es un muestreo de $X(\omega)$, que equivale a repetir la señal en tiempo. Sabemos que en este caso, la señal original sólo podrá recuperarse si no hay aliasing temporal (similar a lo que se propone en el problema 3).

(c) La manera más fácil es hacerlo utilizando autofunciones, aunque pude hacerse también de manera muy sencilla por Fourier.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= x(t) * \sum_k a_k e^{jk\frac{2\pi}{4}t} \\ &= \sum_k a_k X\left(k\frac{2\pi}{4}\right) e^{jk\frac{2\pi}{4}t} \end{aligned}$$

donde a_k son los coeficientes de la serie de Fourier de $h(t)$. Antes de calcularlos, dado que $X(\omega)$ es una señal limitada, podemos darnos cuenta de que

$$X\left(k\frac{2\pi}{4}\right) = \begin{cases} A^2 & k = 0 \\ A^2 - \frac{\pi^2}{4} & k = 1 \\ A^2 - \frac{\pi^2}{4} & k = -1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Forier son:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{4}\int_{<T>} [\delta(t) + j\delta(t-1) - \delta(t-2) - j\delta(t-3)]\, e^{-jk\frac{2\pi}{4}t} \\ &= \frac{1}{4}\left[1 + je^{-jk\frac{\pi}{2}} - je^{-jk\pi} - je^{-jk\frac{3\pi}{2}}\right] \end{aligned}$$

Como $a_0 = a_{-1} = 0$, finalmente nos queda

$$y(t) = \left(A^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) e^{j\frac{\pi}{2}t}$$

Si se decide hacer por Fourier, la solución será la inversa de

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega).$$

Con prácticamente la misma operativa, se llega a la misma solución.

2. **Sea un sistema LTI estable con la siguiente función de transferencia:**

$$H(z) = \frac{1}{4z^{-2} - 7z^{-3} - 2z^{-4}}.$$

(a) Calcule su respuesta al impulso $h[n]$.

(b) Calcule la salida del sistema $y[n]$ cuando la entrada es $x[n] = (-3)^n u[-n-1]$. Calcule también $Y(z)$ y su RoC.

(c) Calcule la respuesta al impulso del sistema inverso, y estudie la linealidad, invertibilidad, invarianza temporal, memoria, causalidad y estabilidad de dicho sistema.

(a) Se pide calcular $h[n]$ sabiendo que

$$H(z) = \frac{1}{4z^{-2} - 7z^{-3} - 2z^{-4}}$$

Nótese que no se dan regiones de convergencia, pero se indica que la solución corresponde al sistema estable, por lo tanto la RoC de $H(z)$ ha de contener al círculo unidad.

Realizamos una expansión en fracciones simples:

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{4z^{-2}\left(1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right)} \\
&= \frac{z^2}{4\left(1 - 2z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \\
&= \frac{z^2}{36}\left(\frac{8}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}\right) \\
&= \frac{z^2}{36} H_1(z)
\end{aligned}$$

La región de convergencia será $\frac{1}{4} < |z| < 2$, por lo que la transformada inversa de $H_1(z)$ será (según las tablas)

$$h_1[n] = -8 \cdot 2^n \; u[-n-1] + \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Por propiedades, el multiplicar $H_1(z)$ por z^{n_0} es equivalente a desplazar la señal en tiempo, $h[n + n_0]$. De este modo:

$$\begin{aligned}
h[n] &= \frac{1}{36} h_1[n+2] \\
&= \frac{1}{36}\left(-8 \cdot 2^{n+2} \; u[-n-3] + \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+2} \; u[n+2]\right)
\end{aligned}$$

(b) La TZ de la señal de entrada será

$$X(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1}} \quad |z| < 3$$

La salida será:

$$Y(z) = \frac{z^2}{4\left(1 - 2z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 + 3z^{-1}\right)}$$

con RoC $\frac{1}{4} < |z| < 2$. Mediante una expansión de la forma

$$Y(z) = \frac{z^2}{4}\left(\frac{A}{1 - 2z^{-1}} + \frac{B}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{C}{1 + 3z^{-1}}\right)$$

la transformada inversa será

$$y[n] = \frac{1}{4}\left(A \cdot 2^{n+2} \; u[-n-3] + B \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+2} \; u[n+2] + C \cdot (-3)^{n+2} \; u[-n-3]\right)$$

(c) La inversa será:

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = 4z^{-2} - 7z^{-3} - 2z^{-4}$$

con lo que

$$h_i[n] = 4\delta[n-2] - 7\delta[n-3] - 2\delta[n-4]$$

El sistema así descrito es LTI, tiene memoria, es causal, estable (la ROC de la TZ contiene el círculo unidad) e invertible.

3. **Sea $x(t)$ una señal real limitada en tiempo, de tal modo que $x(t) = 0$ si $t < 0$ ó $t \geq T_0$. Su transformada de Fourier se multiplica por un tren de deltas equiestapaciadas una distancia W_0.**

   (a) Estudie analíticamente el efecto que tiene esta operación en el dominio temporal. Ilustre el resultado con un ejemplo gráfico, asumiendo que $T_0 < \frac{2\pi}{W_0}$.

   (b) Repita el estudio para $x(t) = 1$ si $0 \geq t > T_0$ ($x(t) = 0$ fuera del intervalo) y $W_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. Dibuje la señal resultante en tiempo y frecuencia.

(a) La señal $x(t)$ tendrá transformada de Fourier $X(\omega)$. Se multiplica por un tren de deltas $P(\omega)$ definido:

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - kW_0\right)$$

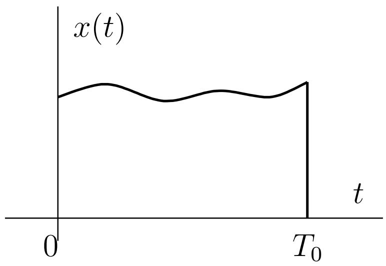
de tal forma que

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega) \cdot P(\omega) \\ &= X(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - kW_0\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kW_0)\delta\left(\omega - kW_0\right) \end{aligned}$$

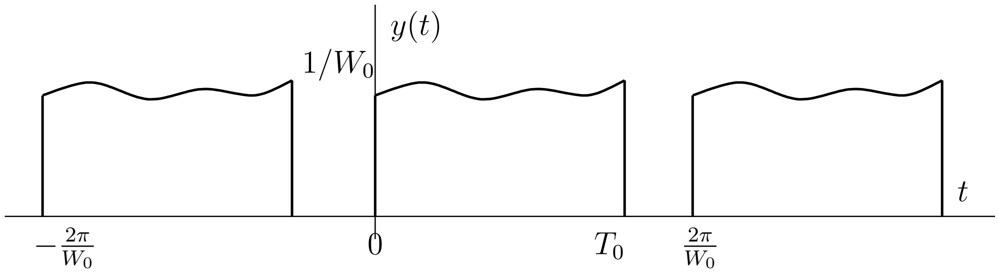
En tiempo esto equivale a

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * p(t) \\ &= x(t) * \frac{1}{W_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - k\frac{2\pi}{W_0}\right) \\ &= \frac{1}{W_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(t - k\frac{2\pi}{W_0}\right) \end{aligned}$$

Se pide un ejemplo gráfico. Para ello supongamos una señal del tipo



De acuerdo con el estudio, la señal se duplicará en los múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{W_0}$:



(b) Se pide que se *repita el estudio* (no que se apliquen los resultados anteriores). Para ello partimos de la señal indicada, cuya transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{2\sin(\omega T_0/2)}{\omega} e^{-j\omega T_0/2} \\ &= T_0 \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{T_0}{2\pi}\omega\right) e^{-j\omega T_0/2} \end{aligned}$$

Dado que $W_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ (para este apartado)

$$X(\omega) = T_0 \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{W_0}\right) e^{-j\omega T_0/2}$$

Al multiplicar por el tren de deltas

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega) \cdot P(\omega) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kW_0)\delta\left(\omega - kW_0\right) \\ &= T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{kW_0}{W_0}\right) e^{-jkW_0T_0/2}\delta\left(\omega - kW_0\right) \\ &= T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(k\right) e^{-jk\pi}\delta\left(\omega - kW_0\right) \end{aligned}$$

Nótese que

$$\operatorname{sinc}\left(k\right) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

por lo que

$$Y(\omega) = T_0 \cdot \delta\left(\omega\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{W_0}$$

La solución es coherente con lo obtenido en el apartado anterior.

4. **Sea una señal continua periódica $x(t)$, con periodo $T = 1/2$, y cuyos coeficientes de la serie de Fourier son $a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$.**

   (a) Calcule la potencia y la energía de $x(t)$.

   (b) Calcule la salida cuando la señal $x(t)$ es la entrada de un sistema LTI cuya respuesta al impulso es:

$$h(t) = \left(\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\right)^2 \cos(4\pi t)$$

(a) En primer lugar, y puesto que se trata de una señal periódica, es una señal de potencia, cuya energía sabemos será:

$$E_\infty = \infty.$$

En cuanto a la potencia media, dado que, como hemos dicho, la señal es periódica:

$$P_\infty = \frac{1}{T}\int_{< T >} |x(t)|^2 dt$$

Puesto que la señal está descrita en el enunciado mediante los coeficientes de su serie de Fourier, resulta en este caso mucho más sencillo calcular la potencia aplicando la igualdad de Parseval:

$$\begin{aligned}
P_\infty = \frac{1}{T}\int_{< T >} |x(t)|^2 dt &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\right]^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{|k|} = \sum_{k=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{4}\right)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} - 1 \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{p} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} - 1 = \frac{1}{1-1/4} + \frac{1}{1-1/4} - 1 \\
&= \frac{1}{3/4} + \frac{1}{3/4} - 1 = \frac{5}{3},
\end{aligned}$$

donde hemos aplicado el cambio de variable $p = -k$ en uno de los sumatorios.

Por tanto, la potencia media de la señal es:

$$P_\infty = \frac{5}{3}$$

(b) Para calcular la salida del sistema dada la entrada proporcionada y la respuesta al impulso, recordemos que, cuando tenemos una entrada que es una suma de exponenciales complejas, o más particularmente una serie de Fourier, la salida puede escribirse también como una combinación de exponenciales complejas. Concretamente:

$$x(t) = \sum a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{\;h(t)\;} \longrightarrow y(t) = \sum a_k \; H(\omega)\big]_{\omega = k\omega_0} e^{jk\omega_0 t}$$

Esto significa entonces que los coeficientes de Fourier de la salida, b_k, serán:

$$b_k = H(\omega)|_{\omega = k\omega_0}\, a_k$$

Así pues, todo lo que necesitamos hacer es calcular la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema proporcionado. Podemos distinguir dos partes en esa respuesta al impulso:

$$h(t) = h_1(t)h_2(t)$$

donde

$$h_1(t) = \left(\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\right)^2, \qquad h_2(t) = \cos(4\pi t).$$

Aplicando la propiedad de modulación de la transformada de Fourier de tiempo continuo, la transformada de Fourier que buscamos será:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} H_1(\omega) * H_2(\omega).$$

A su vez, $h_1(t) = h_3(t)h_3(t)$, donde $h_3(t)$ es una sinc. En frecuencia tendremos la convolución de $H_3(\omega)$ consigo misma. Como es conocido, $H_3(\omega)$ es un pulso rectangular, igual a 1 para valores de ω comprendidos entre -2π y 2π. Por lo tanto, sabemos que $H_1(\omega)$ tendrá forma triangular, y será no nula para frecuencias comprendidas entre -4π y 4π. Necesitamos calcular únicamente la altura, que es una particularización de la convolución:

$$H_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} H_3(\omega) * H_3(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_3(\lambda) H_3(\omega - \lambda) d\lambda.$$

$$H_1(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_3(\lambda) H_3(-\lambda) d\lambda = \frac{4\pi}{2\pi} = 2.$$

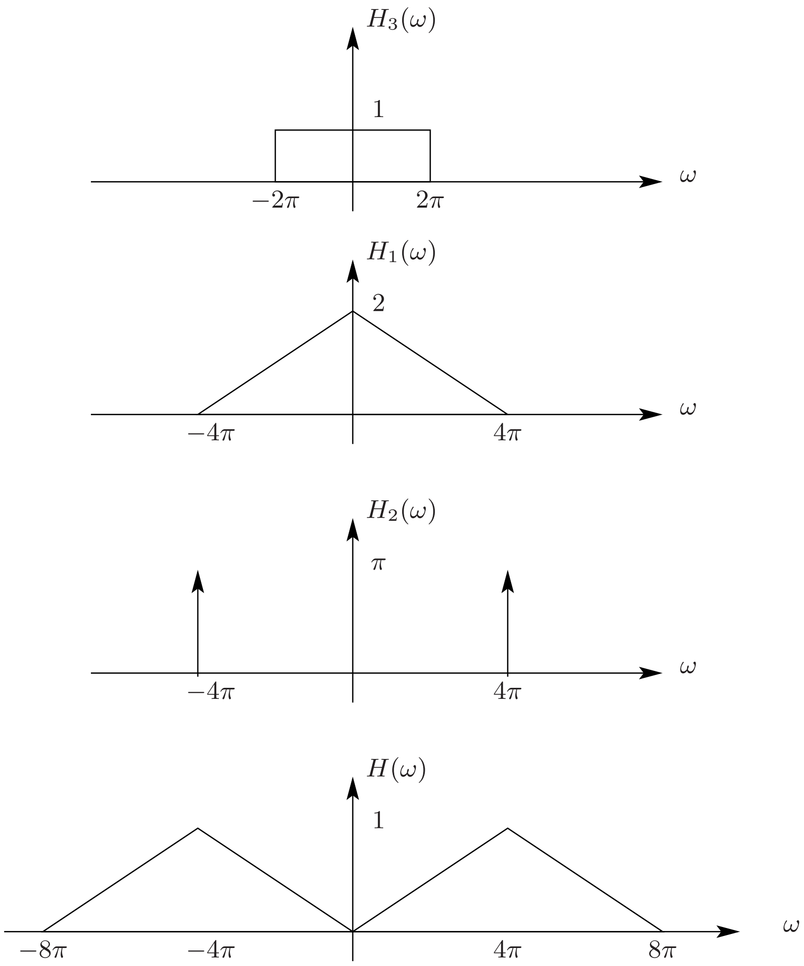
Por otra parte, $h_2(t)$ es un coseno, por lo que su transformada de Fourier estará formada por dos deltas en frecuencia:

$$H_2(\omega) = \pi \left[\delta(\omega - 4\pi) + \delta(\omega + 4\pi)\right].$$

Finalmente, tendremos entonces:

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[H_1(\omega) * H_2(\omega)\right] = \frac{1}{2} \left[H_1(\omega - 4\pi) + H_1(\omega + 4\pi)\right].$$

Como puede verse en la figura inferior, $H(\omega)$ está formada por dos triángulos, centrados en $\omega = 4\pi$ y $\omega = -4\pi$.



Ahora, calculemos el periodo fundamental de la señal de entrada, $x(t)$. Según se indica en el enunciado, $T = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$.

Solamente hay dos valores de k para los que $H(\omega) \neq 0$. Se trata de $k = 1$ y $k = -1$, para los que $H(\omega)$ es igual a 2. Así pues:

$$b_1 = a_1 H(\omega)|_{\omega=4\pi} = \frac{1}{4}2 = \frac{1}{2},$$

$$b_{-1} = a_{-1} H(\omega)|_{\omega=-4\pi} = \frac{1}{4}2 = \frac{1}{2}.$$

Una vez que tenemos los coeficientes de la serie de Fourier, es sencillo reconstruir la señal de salida:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2}e^{j4\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi t} = \cos(4\pi t).$$