Sistemas Lineales
Examen de Junio 2007

1. **(1 pt.)** Calcule la transformada inversa de Fourier de la señal

$$X(\Omega) = e^{-j\frac{\Omega}{3}} \qquad -\pi \leq \omega < \pi$$

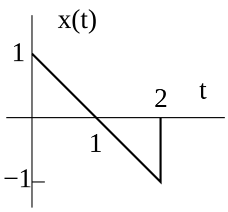
¿Es $X(\Omega)$ una señal periódica? Justifique la respuesta.

2. **(1 pt.)** Sea un sistema con respuesta al impulso $h(t) = u(t) - u(-t)$. Calcula la salida cuando la entrada es

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t \geq 0 \\ e^{4t} & t < 0 \end{cases}$$

3. **(1 pt.)** Demuestre que la transformada de Fourier de una señal discreta real y par es una señal real y par.

4. **(2.3 pt.)** Un periodo de la señal periódica $x(t)$ tiene la siguiente forma



   (a) **(1 pt.)**Calcule los valores de A_k y B_k tales que $x(t)$ pueda escribirse de la siguiente forma:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(k\pi t)$$

   (b) **(0.65 pt.)** Calcule la transformada de Fourier de un periodo de la señal.

   (c) **(0.65 pt.)** Calcule ta transformada de Fourier de toda la señal $x(t)$.

5. **(2.1 pt.)** Sea un sistema estable cuya función de transferencia es

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}}$$

   (a) **(0.75 pt.)** Calcule la respuesta al impulso del sistema

   (b) **(0.6 pt.)** Justifique si existe o no la transformada de Fourier de la respuesta al impulso, y en caso de existir calcúlela.

   (c) **(0.75 pt.)** Calcule la salida del sistema cuando la entrada es

$$x[n] = 4^{n/2} e^{-j\frac{1}{7\pi}n}$$

6. **(2.6 pt.)** Un determinado proceso de adquisición de datos basado en técnicas de Resonancia Magnética proporciona la señal de salida $X(\omega)$ en el dominio de Fourier. En lugar de trabajar con la señal en frecuencia se suele trabajar con la señal temporal $x(t)$, obtenida mediante su transformada inversa de Fourier. Dado que esta señal puede ser compleja, realmente se trabaja con su módulo $|x(t)|$.

   Se define la señal
$$x_M(t) = |x(t)|^2 = x_R(t)^2 + x_I(t)^2$$
   donde $x_R(t)$ es la parte real de $x(t)$ y $x_I(t)$ es la parte imaginaria de $x(t)$. El proceso aparece resumido en la siguiente figura:

$$X(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t) \longrightarrow \boxed{|.|^2} \longrightarrow x_M(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_M(\omega)$$

   (a) **(0.65 pt.)** Suponiendo que $x(t) = \frac{\sin At}{2\pi t}$ calcule la transformada de Fourier de $x_M(t)$ (Tenga en cuenta que $x(t)$ es ahora una señal real, es decir, $x(t) = x_R(t)$, $x_I(t) = 0$).

   (b) **(0.65 pt.)** Un problema en el sensor hace que se introduzcan errores en la captación de los datos que se pueden modelar como deltas. El sistema da ahora como salida la señal
$$X_2(\omega) = X(\omega) + \delta(\omega - \omega_0).$$
   Calcule $x_2(t)$, su parte real $x_{R_2}(t)$ y su parte imaginaria $x_{I_2}(t)$.

   (c) **(0.65 pt.)** Sea ahora
$$x_{M_2}(t) = |x_2(t)|^2 = x_{R_2}(t)^2 + x_{I_2}(t)^2$$
   Calcule la transformada de Fourier de $x_{M_2}(t)$.

$$X(\omega) + \delta(\omega - \omega_0) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x_2(t) \longrightarrow \boxed{|.|^2} \longrightarrow x_{M_2}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_{M_2}(\omega)$$

   (d) **(0.65 pt.)** Encuentre para qué valores de ω_0 va a ser posible obtener $x_M(t)$ a partir de $x_{M_2}(t)$ utilizando para ello un filtro pasobajo. (Nota: Considere que en el proceso vamos a poder ser capaces de eliminar cualquier delta aislada que aparezca en el dominio de Fourier).