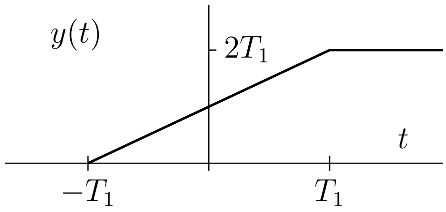
Sistemas Lineales

Examen de Junio 2011

1. **(2.5 pt.) Convalidable con parcial.** Se desea conocer la respuesta al impulso de un sistema LTI continuo. Para ello se realizan dos experimentos:

   (a) Cuando la entrada es un escalón continuo, $x(t) = u(t)$, la salida es de la forma

   (b) Cuando la entrada es una señal periódica de periodo $T = 1$ tal que la señal en un periodo se define como
   $$x_a(t) = e^{-2t}u(t) \quad 0 \leq t < 1$$
   la salida es un valor constante.

   Calcule la respuesta al impulso del sistema y explique si existe alguna restricción para el valor T_1.

2. **(2.5 pt.)** En el siguiente problema se analizará un esquema *real* de muestreo. En muchos esquemas comerciales, para muestrear una señal continua $x(t)$, en lugar de tomar su valor en un punto concreto, $x[n] = x(nT)$, lo que se hace es tomar el valor medio en un intervalo alrededor de ese punto:
   $$x[n] = \frac{1}{T_s}\int_{(n-1/2)T}^{(n+1/2)T} x(t)dt$$
   Esto puede modelarse usando un tren de deltas de la siguiente forma:
   $$\begin{aligned} x[n] &= x_2(nT) \\ x_p(t) &= x_2(t) \cdot p(t) \\ &= [x(t) * h_1(t)] \cdot p(t) \end{aligned}$$
   donde
   $$h_1(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$
   y $p(t)$ es un tren de deltas equiespaciadas de la forma
   $$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - kT\right)$$
   Las señales $x[n]$ y $x_p(t)$ son alternativamente la señal muestreada discreta y la señal muestreada continua. Considerando que la señal $x(t)$ es de banda limitada, tal que $X(\omega) = 0$ si $|\omega| > \frac{\omega_s}{2}$:

   (a) Dibuje la transformada de Fourier de $x_2(t)$, $x_p(t)$ y $x[n]$ en función de la de $x(t)$ (considere una $x(t)$ real y de banda limitada).

   (b) Explique el efecto del esquema de muestreo sobre la señal $x(t)$. Indique si habrá o no aliasing y si la señal podrá recuperarse.

(c) En caso de poderse recuperar alguna de las señales, proponga un esquema para recuperar la señal promediada $x_2(t)$ y/o un esquema para recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

3. **(2.5 pt.)** La transformada de Fourier de un cierto sistema LTI discreto tiene la expresión siguiente:

$$H(\Omega) = \frac{2 - e^{-j\Omega}}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}} \tag{1}$$

(a) Obtenga la ecuación en diferencias que relaciona la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ de este sistema.

(b) Si la entrada es $x[n] = \delta[n]$, obtenga la salida $y[n]$.

(c) Suponga ahora que la entrada al sistema es la convolución entre dos señales:

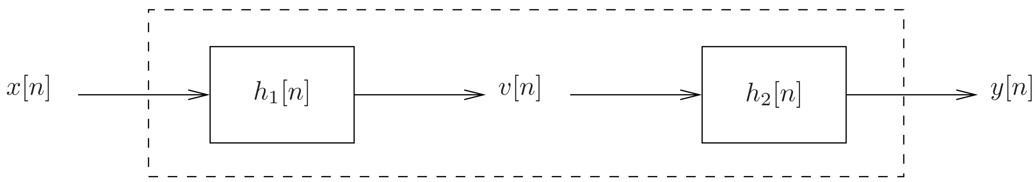
$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] \tag{2}$$

donde

$$\begin{aligned} x_1[n] &= (\frac{1}{2})^n u[n] \\ x_2[n] &= \cos(\pi n) \end{aligned} \tag{3}$$

Obtenga y[n].

4. **(2.5 pt.)** Se considera el siguiente esquema:



donde $h_1[n]$ es un sistema LTI causal descrito mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$v[n] = e^{-a \cdot T_s}\ v[n-1] + b\ x[n].$$

a y b son dos constantes complejas tales que $\mathcal{R}\{a\} > 0$ y $\mathcal{R}\{b\} > 0$, y T_s es el periodo de muestreo.

(a) Calcule la función de transferencia $H_1(z)$ y la respuesta al impulso del sistema $h_1[n]$.

(b) Calcule qué restricciones tiene que tener T_s para que el sistema $h_1[n]$ sea estable. (Indíquelas en función de a y b).

(c) Calcule $h_2[n]$ si se sabe que $y[n] = x[n]$ para cualquier entrada.