Sistemas Lineales
Exámenes Parciales - Curso 2012/13

1. Considere la señal

$$x(t) = u(t-1) + u(-1-t)$$

y el sistema LTI con respuesta al impulso

$$h(t) = u(t+2) - u(t-1).$$

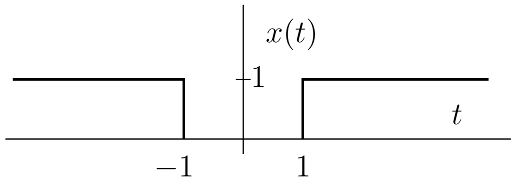
(a) Calcule el valor de pico, la potencia instantánea, la energía y la potencia media de $x(t)$. Razone si se trata de una señal periódica (en caso afirmativo, determine su periodo).

(b) Estudie las siguientes propiedades del sistema: causalidad, memoria y estabilidad.

(c) Calcula la salida del sistema cuando la entrada es $x(t)$. Dibuje la salida.

Resolución

(a) La señal que nos dan en el enunciado tiene la siguiente forma:



A partir de aquí calculamos los valores indicados:

$$\begin{aligned}
x_p &= \max\{x(t)\} = 1 \\
p_i(t) &= |x(t)|^2 = u(t-1) + u(-1-t) = x(t) \\
E &= \int_{-\infty}^{\infty} p_i(t)dt = \infty \\
P_{AV} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} p_i(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T}^{-1} dt + \int_{1}^{T} dt \right) \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} (-1 - T + T - 1) = 1
\end{aligned}$$

La señal $x(t)$ no es una señal periódica, ya que no existe ningún valor $T \neq 0$ tal que $x(t) = x(t+T)$.

(b) Por ser un sistema LPI razonamos a partir de su respuesta al impulso $h(t)$:

Causalidad: El sistema es no causal, ya que no se cumple que $h(t) = 0$ para $t > 0$ (causal) o para $t \leq 0$ (anticausal).

Memoria: se trata de un sistema con memoria, ya que $h(t) \neq K\delta(t)$.

Estabilidad: Para que un sistema LTI sea estable, su repuesta al impulso ha de ser absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{-2}^{1} dt = 3 < \infty.$$

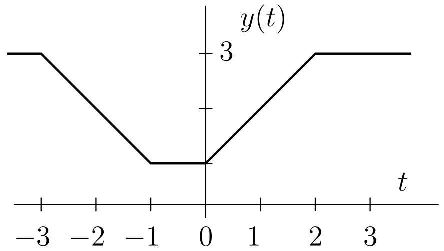
Por lo tanto, el sistema es estable.

La salida será la convolución $y(t) = x(t) * h(t)$ que en este caso puede escribirse como

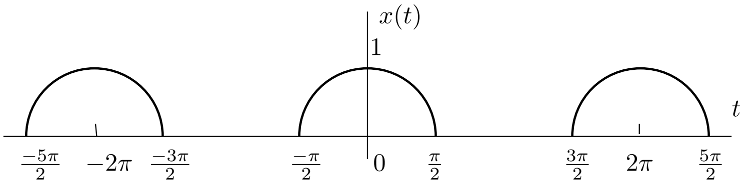
$$y(t) = \int_{-\infty}^{-1} h(t-\tau)d\tau + \int_{1}^{\infty} h(t-\tau)d\tau$$

lo que da lugar a una señal definida en 5 tramos:

$$y(t) = \begin{cases} 3 & t < -3 \\ -t & -3 \le t < -1 \\ 1 & -1 \le t < 0 \\ t+1 & 0 \le t < 2 \\ 3 & t \ge 2 \end{cases}$$



2. La señal periódica que se muestra a continuación se genera cuando una señal de tensión con forma de coseno es rectificada por un diodo, proceso que se conoce como *rectificación de media onda*. En el siguiente proceso se realizará un análisis de Fourier de esta señal.



(a) Calcule la serie de Fourier de la señal periódica $x(t)$. Exprese los coeficientes como parte real más parte imaginaria.

(b) Calcule la transformada de Fourier de $x(t)$. Dibújela para el intervalo $[-\pi, \pi]$.

(c) Un coseno enventanado como el de la figura, puede verse como un coseno multiplicado por un pulso rectangular. Sea la señal aperiódica $y(t) = c(t)\ \cos(\omega_0 t)$, siendo

$$c(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le \frac{\pi}{2\omega_0} \\ 0 & |t| > \frac{\pi}{2\omega_0} \end{cases} .$$

Calcule y dibuje la transformada de Fourier de $y(t)$ utilizando propiedades (sin utilizar la ecuación de análisis).

Resolución

(a) Calculamos los coeficientes de la serie de Fourier a partir de su ecuación de análisis:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)e^{-jk\frac{2\pi}{2\pi}t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(e^{jt}+e^{-jt}\right)e^{-jkt}dt \\ &= [...] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\cos(k\pi/2}{(1-k^2)} \quad k \in \mathbb{Z}, k \neq \pm 1. \end{aligned}$$

Una simplificación alternativa lleva a una solución de la forma

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((k-1)\pi/2}{k-1)} + \frac{\sin((k+1)\pi/2}{k+1)}\right] \quad k \in \mathbb{Z}, k \neq \pm 1.$$

En ambos casos, los c_k nos son válidos para $k = \pm 1$. Calculamos aparte estos coeficientes:

$$c_1 = c_{-1} = \frac{1}{4}.$$

Al ser reales, los coeficientes ya están expresados como parte real más parte imaginaria.

(b) Se define la transformada de Fourier de una señal periódica a partir de los coeficientes de su serie de Fourier:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \; 2\pi \; \delta(\omega - k).$$

En nuestro caso, dado que piden la señal en en intervalo $[-\pi, \pi]$, necesitaremos los siguientes coeficientes:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\pi} \\ c_1 = c_{-1} &= \frac{1}{4} \\ c_2 = c_{-2} &= \frac{1}{3\pi} \\ c_3 = c_{-3} &= 0. \end{aligned}$$

(c) La transformada de Fourier será:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} C(\omega) * \pi \left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[C(\omega - \omega_0) + C(\omega + \omega_0)\right] \end{aligned}$$

La transformada de $c(t)$ se calcula de manera sencilla a través de las tablas:

$$C(\omega) = \frac{2\sin\left(\omega \frac{\pi}{2\omega_0}\right)}{w} = \frac{\pi}{\omega_0} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

Y, finalmente:

$$Y(\omega) = \frac{\pi}{2\omega_0}\left[\text{sinc}\left(\frac{\omega - \omega_0}{2\omega_0}\right) + \text{sinc}\left(\frac{\omega + \omega_0}{2\omega_0}\right)\right]$$

3. La señal

$$x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \cdot \cos(\pi t)$$

se muestrea con un tren de deltas equiespaciadas $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ a la frecuencia de Nyquist, de tal forma que $x_p(t) = x(t) \cdot p(t)$. Posteriormente, la señal se reconstruye utilizando para ello el filtro de reconstrucción genérico para esa frecuencia de muestreo, dando lugar a $x_a(t)$.

(a) Dibuje las transformadas de Fourier de las señales $x(t)$, $p(t)$ y $x_p(t)$.

(b) La señal $x_p(t)$ pasa por un conversor C/D dando lugar a la señal discreta $x_d[n]$, de tal modo que $x_d[n] = x(nT)$. Dibuje la transformada de Fourier de $x_d[n]$.

(c) Calcule la señal reconstruida $x_a(t)$ y dibuje su transformada de Fourier.

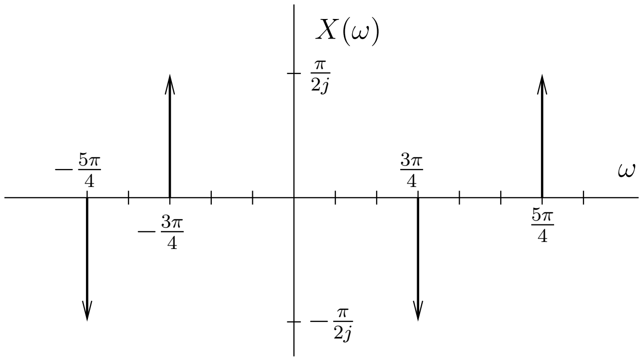
(d) Se quiere realizar un procesado continuo de la señal $x(t)$ empleando para ello un sistema LTI discreto. Diseñe el sistema completo que permita realizar este procesado, si el sistema continuo tiene una respuesta al impulso $h_c(t) = e^{-2|t|}$. Indique el periodo de muestreo elegido y la respuesta al impulso del sistema discreto equivalente $h_d[n]$ (puede darse en el dominio de la frecuencia). Dibuje $H_d(\Omega)$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

Resolución

(a) La transformada de Fourier de la señal $x(t)$ será de la forma

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega - \pi/4) - \delta(\omega + \pi/4)\right] * \pi\left[\delta(\omega - \pi) + \delta(\omega + \pi)\right].$$

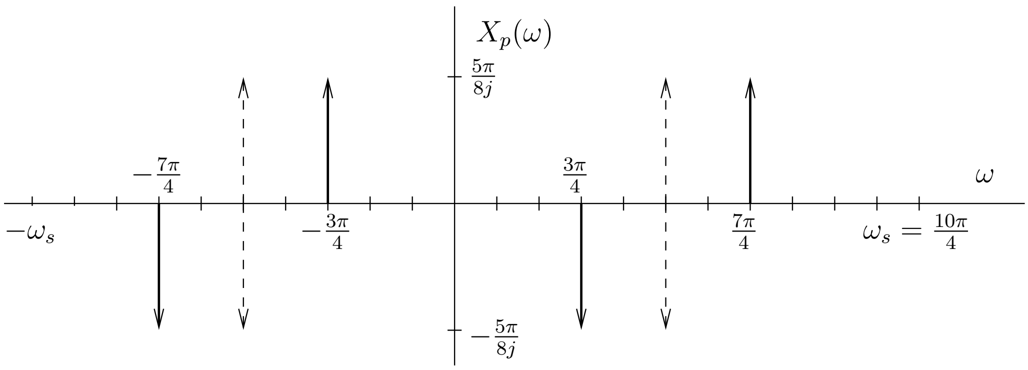
Podemos representarla (con un exceso de notación, sin separar módulo y fase) en la siguiente figura:



La frecuencia máxima de la señal va a ser $\omega_m = \frac{5\pi}{4}$, con lo que la frecuencia de Nyquist será el doble de la frecuencia máxima:

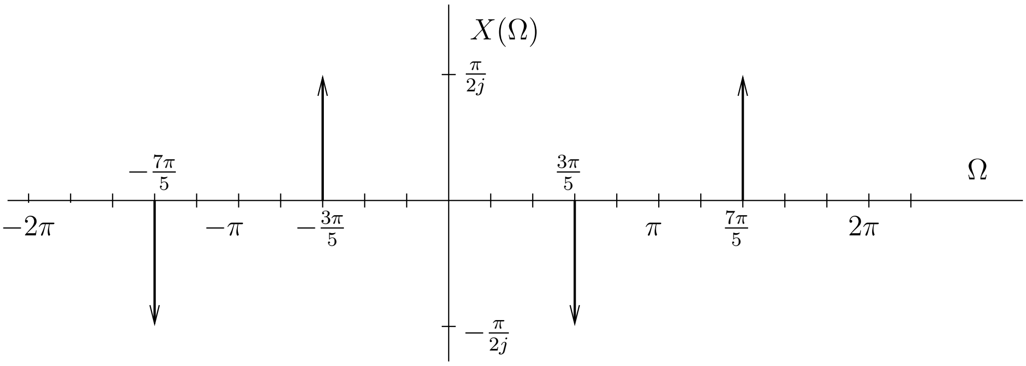
$$\omega_s = \omega_N = 2\frac{5\pi}{4}, \quad T = \frac{4}{5}.$$

Al muestrear, debido a que hay deltas en los extremos, se va a producir aliasing:



y se cancelan las deltas en $\omega = \frac{5\pi}{4}$.

(b) Al escalarse el eje de frecuencias, obtenemos:



Nótese que, al escalarse las deltas, se han multiplicado por el periodo de muestreo.

(c) El filtro de reconstrucción será un filtro pasobajo, con frecuencia de corte la mitad de la frecuencia de muestreo y ganancia el periodo de muestreo. La señal a la salida será:

$$X_a(\omega) = \frac{\pi}{2j}\left[-\delta(\omega - 3\pi/4) + \delta(\omega + 3\pi/4)\right]$$

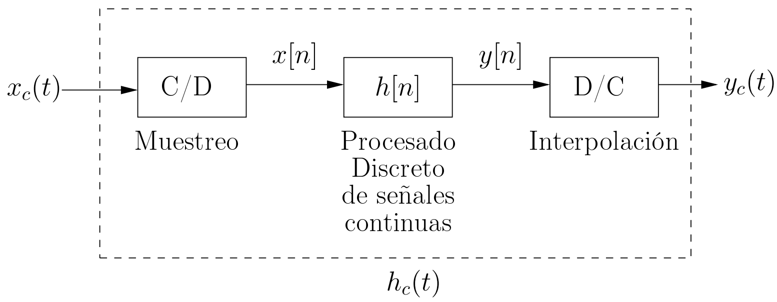
y su transformada inversa quedará:

$$x_a(t) = -\frac{1}{2}\sin(3\pi/4\ t).$$

(d) La trasformada de Fourier del sistema continuo será

$$H_c(\omega) = \frac{4}{4+\omega^2}.$$

Para procesar señales continuas utilizando sistemas discretos, se necesita un esquema como el de la figura:



con una etapa de muestreo sin aliasing y una etapa de interpolación. Para muestrear la señal sin aliasing, en este caso, necesitamos muestrear por encima de la frecuencia de Nyquist:

$$\omega_s > 2\frac{5\pi}{4}$$

Escogemos, por ejemplo, $\omega_s = 3\pi$. Para este caso, $T = 2/3$.
Lo primero que tenemos que hacer para diseñar el filtro discreto, es limira en banda el sistema continuo continuo:

$$H_c(\omega) = \begin{cases} \frac{4}{4+\omega^2} & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & |\omega| \geq \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

y a continuación hacer el escalado $H_d(\omega) = H_c\left(\frac{\Omega}{T}\right) = H_c\left(\frac{\Omega}{2/3}\right)$.

$$H_d(\Omega) = \frac{4}{4+\left(\frac{\Omega}{2/3}\right)^2} \quad |\Omega| < \pi.$$