Sistemas Lineales Junio 2017

Problema 1 ***(2,5 pts., convalidable con el primer parcial):***

1 a) Considere la señal $x(t) = e^{2t}[u(t+2) - u(t-2)]$ y el sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$. Calcule, utilizando la integral de convolución, $y(t)$, la salida del sistema cuando $x(t)$ es la entrada.

0'7 b) Calcule ahora $y_2(t)$, la salida del sistema cuando la entrada es $x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

0'8 c) Considere el sistema LTI descrito mediante la siguiente relación entre entrada y salida:

$$y(t) = x(t+5) + e^{-3t}\int_{-\infty}^{t} e^{-2\tau}x(\tau)d\tau \longrightarrow h(t) \quad 0'2.$$

Razone si dicho sistema cumple las propiedades de memoria, causalidad y estabilidad.

0'2 0'2 0'2

Problema 2 ***(2,5 pts., convalidable con el segundo parcial):***

0'8 a) Dibuje $x(t)$ y calcule su transformada de Fourier: → 0'5

↳ 0'3

$$x(t) = \begin{cases} e^{-2t}\sin(4\pi t), & t \geq 0 \\ e^{3t}\cos(4\pi t), & t < 0 \end{cases}$$

1 b) Considere ahora otra señal distinta, $f(t)$, real y par, cuya transformada de Fourier es $F(\omega)$. Sea también una señal periódica $p(t) = 1 + \cos(4\pi t) - \sin(8\pi t) + \cos(12\pi t)$. Se define la señal compuesta $m(t) = f(t) * p(t)$ que, a su vez, es la entrada de un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = \left(\frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}\right)^2$. Calcule la señal a la salida, $y(t) = m(t) * h(t)$, así como su transformada de Fourier.

↳ 0'3 ↳ 0'7

0'7 c) Calcule la siguiente cantidad: $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(3\pi t)}{t}\right)^2 dt$

Problema 3 ***(2,5 pts., convalidable con el tercer parcial):*** Considere una señal $x(t)$ periódica, con periodo $T = 2$, y cuyos coeficientes de la serie de Fourier son:

$$c_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k, & k \geq 0 \\ -2^k, & k < 0 \end{cases}$$

0'5 a) Estudie si es posible muestrear $x(t)$ sin cometer aliasing, utilizando para ello un tren de impulsos. En caso afirmativo, calcule el máximo periodo de muestreo. 0'25 ENTENDER / DIBUJAR $X(w)$.

0'25 b) $x(t)$ es la entrada de un sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h_1(t) = \frac{\sin(\frac{7\pi}{2}t)}{\pi t}$, obteniéndose como salida una nueva señal a la que llamamos $s(t)$. Dibuje su transformada de Fourier, $S(\omega)$.

0'25

0'75 c) La señal $s(t)$ se muestrea utilizando un tren de deltas equiespaciadas $p(t)$ con $T_s = 1/3$. Dibuje la transformada de Fourier de $p(t)$, de la señal muestreada continua $s_p(t)$ y de la señal discreta $s[n]$.

0'25 0'25 0'25

1 d) Una vez obtenida la señal discreta $s[n]$, esta se hace pasar por un filtro paso alto con frecuencia de corte $\Omega_c = \frac{\pi}{2}$, obteniendo de esta manera una nueva señal $y[n]$. Después se convierte la señal resultante a continua utilizando para ello el filtro de interpolación genérico para la frecuencia de muestreo utilizada. Dibuje las transformadas de Fourier de las señales que aparecen: $y[n]$, $y_p(t)$ e $y_c(t)$. Calcule $y_c(t)$.

0'25 0'25 0'25 0'25

Problema 4 ***(2,5 pts.):*** Sea un sistema LTI causal cuya función de transferencia es $H(z) = \frac{3z^{-2}}{1-\frac{7}{3}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}}$.

0'25 a) Calcule la respuesta al impulso del sistema, $h[n]$. ROC → 0'25

0'25 RAZONAMIENTO → 0'25

0'25 b) Justifique si existe o no la transformada de Fourier de $h[n]$ y, en caso de existir, calcúlela.

0'25 c) Calcule $h_i[n]$, la respuesta al impulso del sistema inverso y estudie su memoria, causalidad y estabilidad.

0'3 0'15 0'15 0'15

0'75 d) Calcule la salida del sistema con respuesta $h[n]$ cuando la entrada es $x[n] = \left(5e^{-j\frac{\pi}{6}}\right)^n$.

RAZONAMIENTO 0'5

RESULTADO 0'25

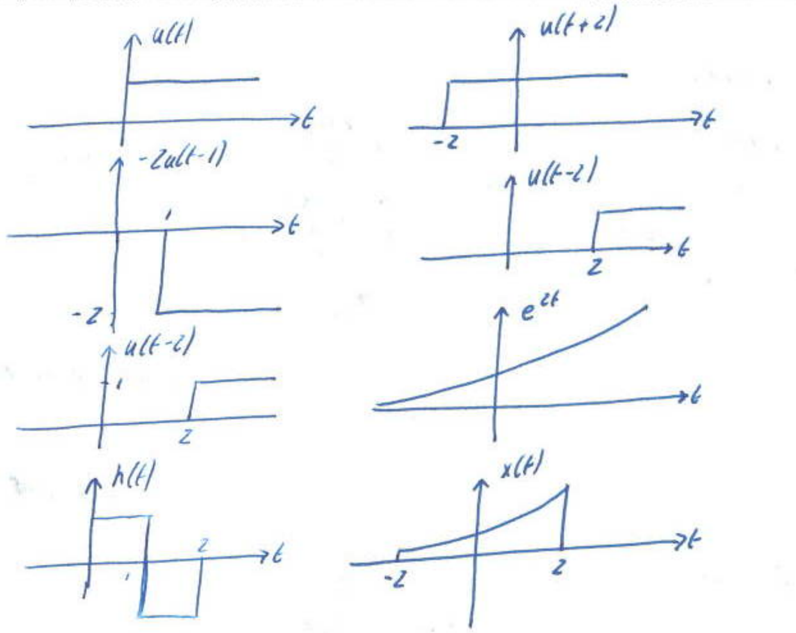
SISTEMAS LINEALES - JUNIO 2017

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
DPTO. TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES E INGENIERIA TELEMÁTICA

ASIGNATURA		FECHA		
APELLIDOS		CURSO		CALIFICACIÓN
NOMBRE		GRUPO		

1 a) $x(t) = e^{2t}\left[u(t+2) - u(t-2)\right]$

$h(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2).$



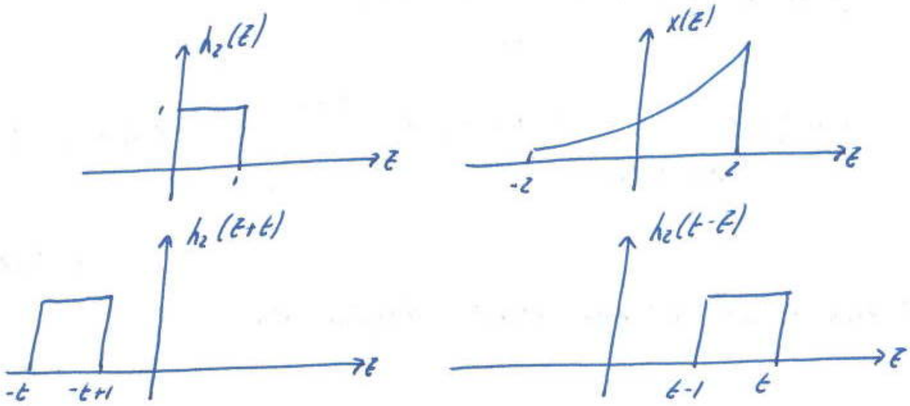
ES POSIBLEMENTE MÁS SENCILLO SEPARAR $h(t)$ EN DOS COMPONENTES

$h(t) = h_2(t) - h_2(t-1).$

$\Downarrow$

$y(t) = y_2(t) - y_2(t-1)$

DONDE $y_2(t) = x(t) * h_2(t)$



- $t < -2 \Rightarrow y_2(t) = 0$

- $-2 \leq t < -1 \Rightarrow y_2(t) = \int_{-2}^{t} e^{2\tau} d\tau = \left.\frac{e^{2\tau}}{2}\right|_{-2}^{t} = \frac{e^{2t} - e^{-4}}{2}$

- $-1 \leq t < 2 \Rightarrow y_2(t) = \int_{t-1}^{t} e^{2\tau} d\tau = \left.\frac{e^{2\tau}}{2}\right|_{t-1}^{t} = \frac{e^{2t} - e^{2(t-1)}}{2}$

- $2 \leq t < 3 \Rightarrow y_2(t) = \int_{t-1}^{2} e^{2\tau} d\tau = \left.\frac{e^{2\tau}}{2}\right|_{t-1}^{2} = \frac{e^{4} - e^{2(t-1)}}{2}$

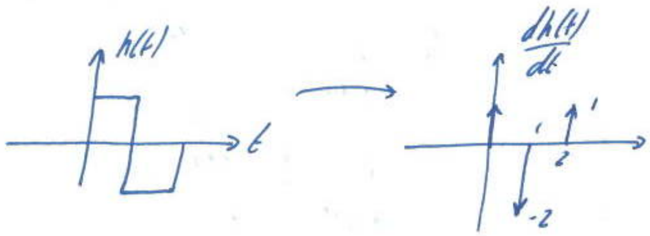
- $t \geq 3 \Rightarrow y_2(t) = 0.$

b) $x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow x_2(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y_2(t).$

COMO LA DERIVADA SE PUEDE VER COMO UN SISTEMA LTI, PODEMOS APLICARLO EN CUALQUIER MOMENTO DEL ESQUEMA DE PROCESADO. POR EJ:

$$y_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}.$$

LO MÁS SENCILLO, SIN EMBARGO, PODRÍA SER CALCULAR EXPLÍCITAMENTE $\frac{dh(t)}{dt}$, PUESTO QUE ESTARÁ FORMADA POR DELTAS.



$$\frac{dh(t)}{dt} = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2).$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = x(t) * \frac{dh(t)}{dt} = x(t) * \left[\delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)\right]$$

$$= x(t) - 2x(t-1) + x(t-2).$$

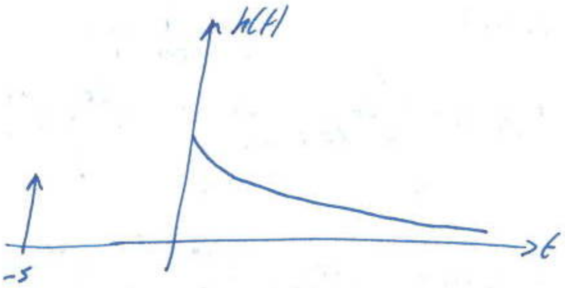
c) SIST. LTI

$$y(t) = x(t+5) + e^{-3t}\int_{-\infty}^{t} e^{-2\tau}x(\tau)d\tau$$

$$h(t) = y(t)\Big|_{x(t)=\delta(t)} = \delta(t+5) + e^{-3t}\int_{-\infty}^{t} e^{-2\tau}\delta(\tau)d\tau = \delta(t+5) + e^{-3t}\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$$

$$= \delta(t+5) + e^{-3t}u(t).$$

- MEMORIA: CON MEMORIA PORQUE $h(t) \neq k\delta(t)$.



- CAUSALIDAD: NO CAUSAL PORQUE NO ES CIERTO QUE $h(t)=0,\ t<0$.

- ESTABILIDAD: ESTABLE PORQUE $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt < \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt = 1 + \int_{0}^{\infty}e^{-3t}dt = 1 + \frac{e^{-3t}}{-3}\Big|_{0}^{\infty} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

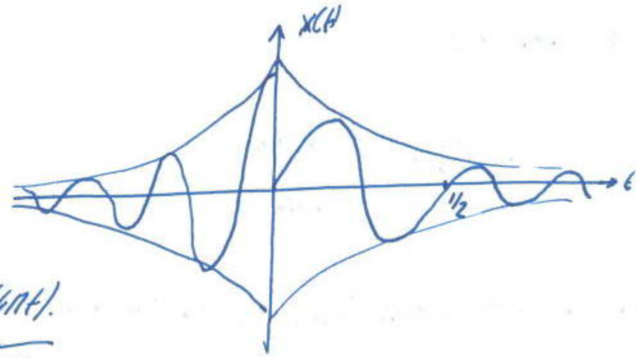
SISTEMAS LINEALES - JUNIO 2017

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
DPTO. TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES E INGENIERIA TELEMÁTICA

ASIGNATURA		FECHA		
APELLIDOS		CURSO		CALIFICACIÓN
NOMBRE		GRUPO		

2 a)

$$x(t)=\begin{cases} e^{-2t}\,\text{sen}(4\pi t) & t\geq 0 \\ e^{3t}\cos(4\pi t) & t<0 \end{cases}$$



$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=$$

$$=\underbrace{e^{-2t}u(t)}_{x_3(t)}\cdot\underbrace{\text{sen}(4\pi t)}_{x_4(t)}+\underbrace{e^{3t}u(-t)}_{x_5(t)}\underbrace{\cos(4\pi t)}_{x_6(t)}.$$

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}X_3(\omega)*X_4(\omega)+\frac{1}{2\pi}X_5(\omega)*X_6(\omega)$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{2+j(\omega-4\pi)}-\frac{1}{2+j(\omega+4\pi)}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-j(\omega-4\pi)}+\frac{1}{3-j(\omega+4\pi)}\right].$$

$$x_3(t)=e^{-2t}u(t)\xrightarrow{TF}X_3(\omega)=\frac{1}{2+j\omega}$$

$$x_4(t)=\text{sen}(4\pi t)\xrightarrow{TF}X_4(\omega)=\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-4\pi)-\delta(\omega+4\pi)\right]$$

$$x_7(t)=e^{-3t}u(t)\xrightarrow{TF}X_7(\omega)=\frac{1}{3+j\omega}$$

$$x_5(t)=x_7(-t)=e^{3t}u(-t)\xrightarrow{TF}X_5(\omega)=\frac{1}{3-j\omega}$$

$$x_6(t)=\cos(4\pi t)\xrightarrow{TF}X_6(\omega)=\pi\left[\delta(\omega+4\pi)+\delta(\omega-4\pi)\right].$$

b) $f(t)$ REAL Y PAR $\xrightarrow{TF}$ $F(\omega)$ REAL Y PAR

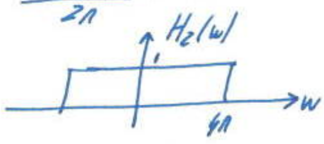
$$p(t)=1+\cos(4\pi t)-\text{sen}(8\pi t)+\cos(12\pi t)$$

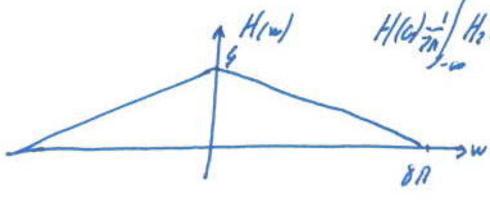
$$h(t)=\left(\frac{\text{sen}(4\pi t)}{\pi t}\right)^2=\left[h_2(t)\right]^2$$

$\downarrow TF$

$$H(\omega)=\frac{H_2(\omega)*H_2(\omega)}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_2(\theta)H_2(\omega-\theta)\,d\theta$$

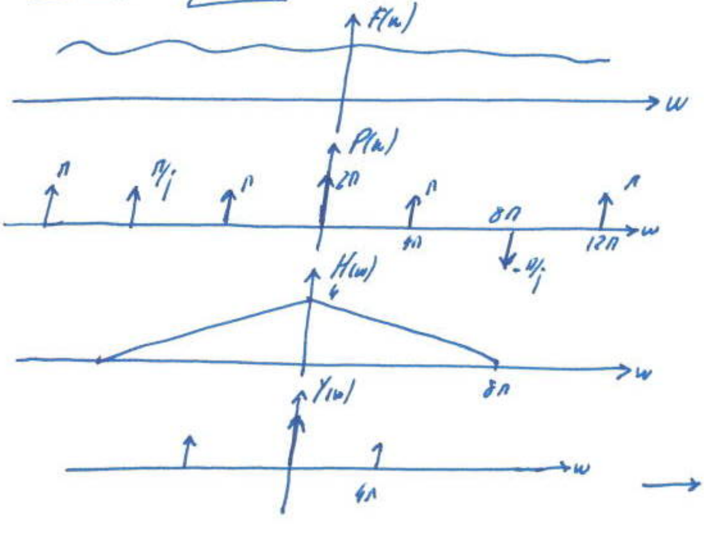
$$f(t)\longrightarrow\boxed{p(t)}\xrightarrow{m(t)}\boxed{h(t)}\longrightarrow y(t).$$





$$H(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_2(\theta)H_2(-\theta)\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[H_2(\theta)\right]^2d\theta=\frac{1}{2\pi}8\pi=4.$$



→

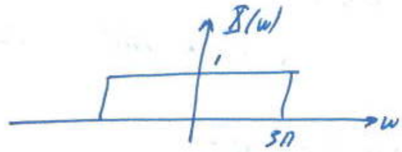
$$Y(w) = F(w)\cdot P(w)\cdot H(w) = F(0)\cdot 4\cdot 2\pi\,\delta(w) + F(4\pi)\cdot 2\cdot \pi\left[\delta(w-4\pi)+\delta(w+4\pi)\right]$$

$$\boxed{y(t) = 4F(0) + 2F(4\pi)\cos(4\pi t)}$$

c) $$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin(3\pi t)}{t}\right]^2 dt = \pi^2\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\underbrace{\frac{\sin(3\pi t)}{\pi t}}_{x(t)}\Big]^2 dt = \pi^2\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(w)|^2\,dw = \frac{\pi}{2}\cdot 6\pi = 3\pi^2.$$

OBSERVANDO LAS TABLAS:

$$x(t)=\frac{\sin(Wt)}{\pi t} \longrightarrow X(w)=\begin{cases}1 & |w|\le W\\ 0 & |w|>W\end{cases}$$



ES REAL, POR LO QUE $|x(t)|^2=(x(t))^2$. PODEMOS POR LO TANTO APLICAR LA RELACIÓN DE PARSEVAL

SISTEMAS LINEALES - JUNIO 2017

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
DPTO. TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES E INGENIERIA TELEMÁTICA

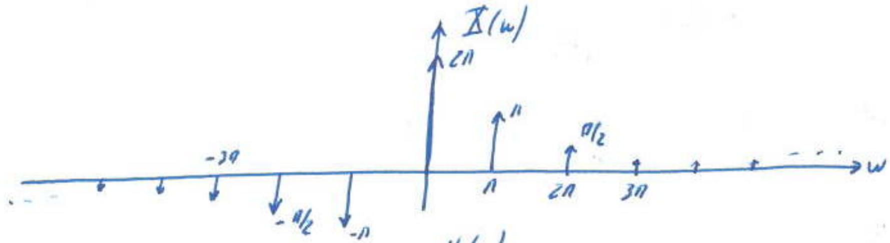
ASIGNATURA		FECHA		
APELLIDOS		CURSO		CALIFICACIÓN
NOMBRE		GRUPO		

③ $x(t)$ PERIÓDICA, $T=2 \rightarrow w_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi.$

$$C_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k & k \geq 0 \\ -2^k & k < 0 \end{cases}$$

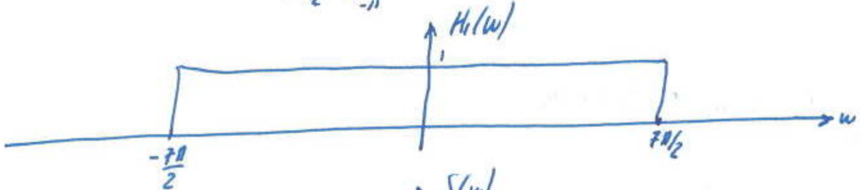
$$X(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi C_k \, \delta(w - kw_0)$$

a)

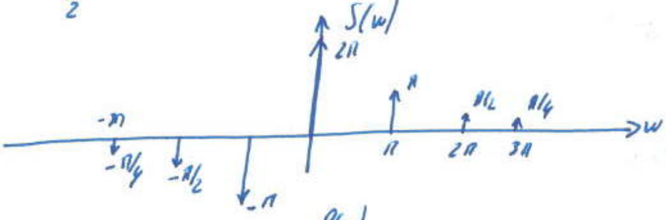


$X(w)$ NO ESTÁ LIMITADA EN BANDA
$\Downarrow$
IMPOSIBLE MUESTREAR SIN COMETER ALIASING

b)



$$h_1(t) = \frac{\text{sen}\left(\frac{7\pi}{2}t\right)}{\pi t}$$



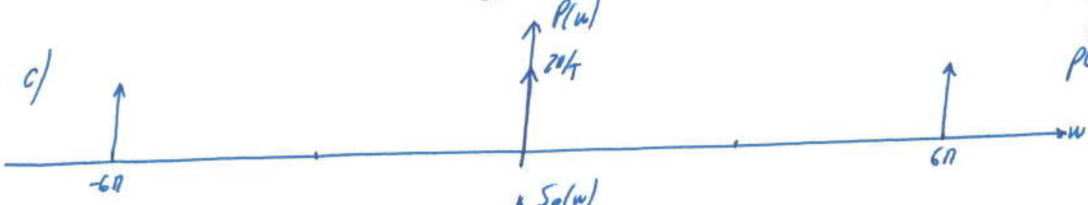
$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \longrightarrow s(t)$

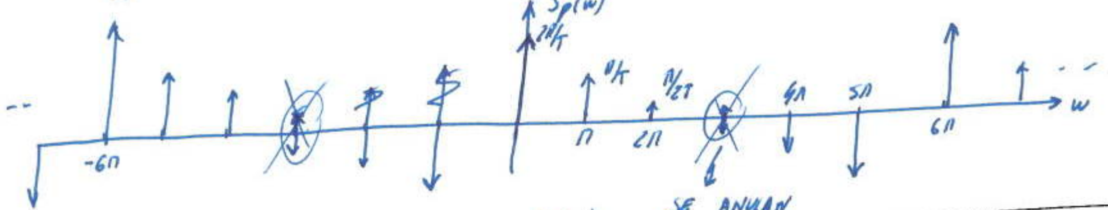
$s(t) \longrightarrow \otimes \xrightarrow{s_p(t)} \boxed{\text{CONVERSOR DELTA}} \longrightarrow s[n].$

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

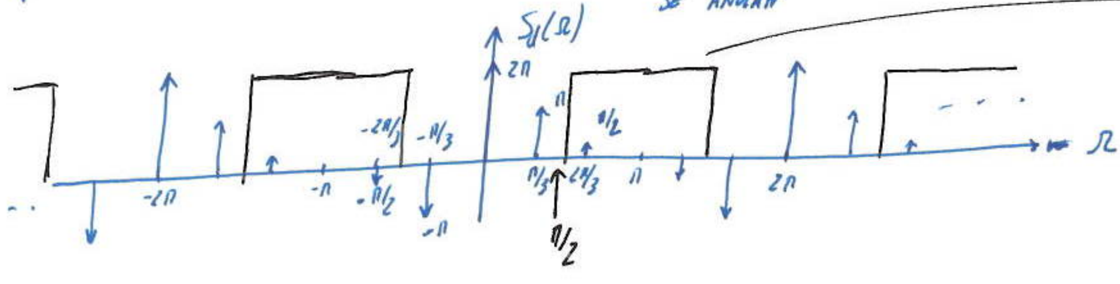
$T_s = \frac{1}{3} \rightarrow w_s = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi.$

c)



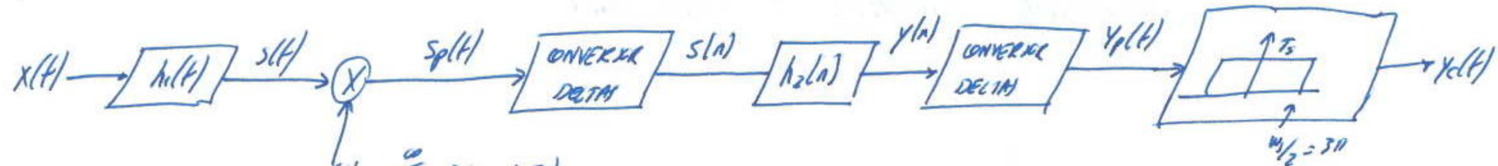


SE ANULAN



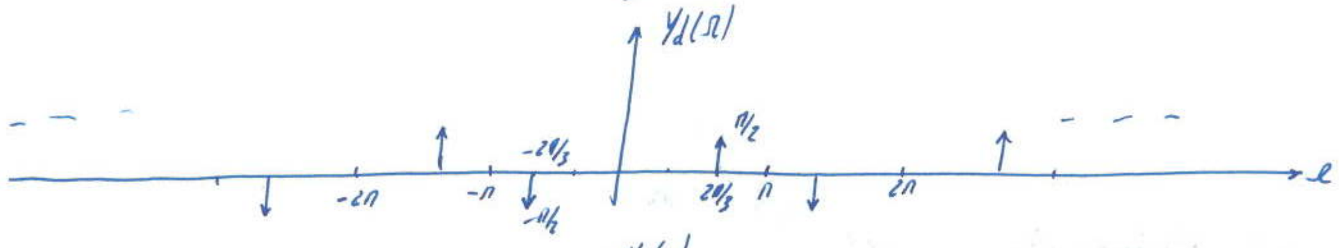
FILTRO PASO ALTO DE APARTADO d).

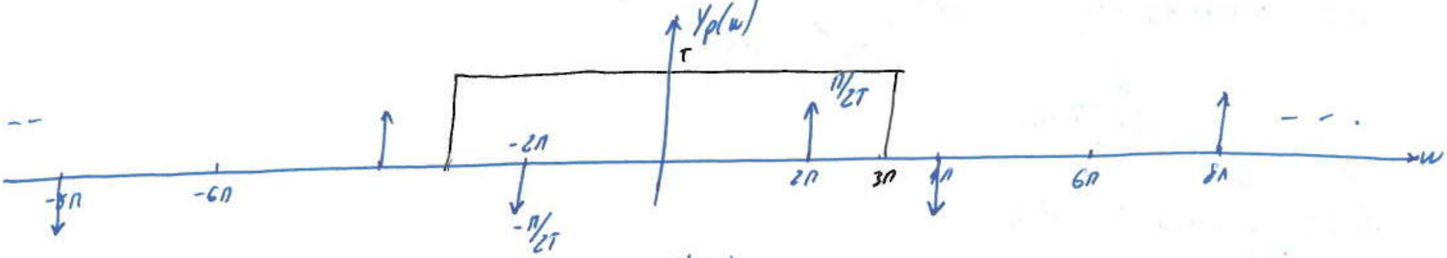
d) ESQUEMA COMPLETO DE PROCESADO:

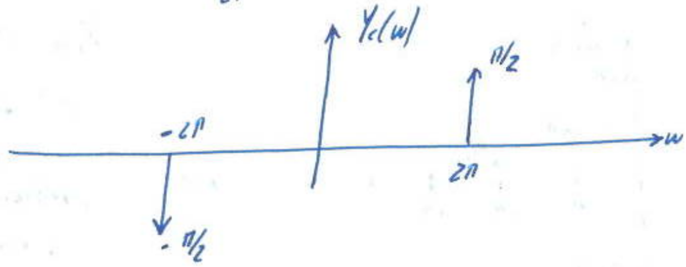


$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

$$T_s = 1/3 \longrightarrow w_s = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$$







$$Y_c(w) = \frac{\pi}{2}\left[\delta(w - 2\pi) - \delta(w + 2\pi)\right]$$

$$\Big\downarrow TF^{-1}$$

$$y_c(t) = \frac{j}{2}\,\mathrm{sen}(2\pi t).$$

SISTEMAS LINEALES - JUNIO 2017

UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
DPTO. TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES E INGENIERIA TELEMÁTICA

ASIGNATURA		FECHA		
APELLIDOS		CURSO		CALIFICACIÓN
NOMBRE		GRUPO		

(4) SISTEMAS LTI CAUSAL

$$H(z)=\frac{3z^{-2}}{1-\frac{7}{3}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}} = 3z^{-2}H_1(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} h[n]=3h_1[n-2].$$

a) $h[n]$?

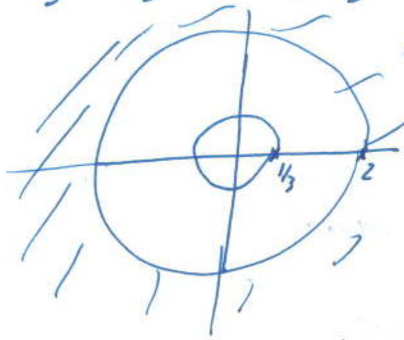
$$\frac{2}{3}x^2-\frac{7}{3}x+1=0 \Rightarrow x=\frac{\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}-4\frac{2}{3}}}{2\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49-24}{9}}}{\frac{4}{3}}=\frac{\frac{7}{3}\pm\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{7\pm5}{4}=\begin{cases}3\\ \frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\frac{2}{3}z^{-1}-\frac{7}{3}z^{-1}+1=\frac{2}{3}\left(z^{-1}-3\right)\left(z^{-1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(z^{-1}-3\right)2\left(z^{-1}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{3}z^{-1}-1\right)\left(2z^{-1}-1\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)$$

$$H_1(z)=\frac{1}{1-\frac{7}{3}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}=\frac{A}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{B}{1-2z^{-1}}$$

$|z|>\frac{1}{3}$ $\quad$ $|z|>2$



ROC: $|z|>2$

POR SER CAUSAL

$\downarrow TZ^{-1}$

$$h_1[n]=A\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]+B\,2^n u[n].$$

$$h[n]=3h_1[n-2]=3A\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-2}u[n-2]+B\,2^{n-2}u[n-2].$$

$$\frac{A}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{B}{1-2z^{-1}}=\frac{A(1-2z^{-1})+B(1-\frac{1}{3}z^{-1})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

$$A(1-2z^{-1})+B(1-\tfrac{1}{3}z^{-1})=1$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-\frac{1}{3}B=0 \end{cases} \qquad A=1-B, \quad -2(1-B)-\tfrac{1}{3}B=0 \longrightarrow 2-\tfrac{5}{3}B=0 \longrightarrow B=\tfrac{6}{5}$$

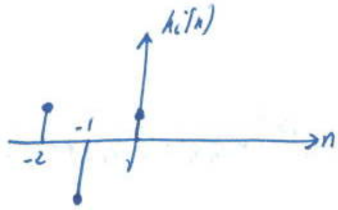
$$A=-\tfrac{1}{5}$$

b) LA ROC DE $H_i(z)$ Y DE $H(z)$ ES $|z|>2$. ESO NO INCLUYE A LA CIRCUNFERENCIA UNIDAD, Y POR LO TANTO NO EXISTE $H(\Omega)$.

c) $$H_i(z)=\frac{1}{H(z)}=\frac{1-\frac{7}{3}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}}{3z^{-2}}=\frac{1}{3}z^{2}-\frac{7}{9}z+\frac{2}{9}$$

$$\Big\downarrow TZ^{-1}$$

$$h_i[n]=\frac{1}{3}\delta[n+2]-\frac{7}{9}\delta[n+1]+\frac{2}{9}\delta[n]$$



- CON MEMORIA $(h_i[n]\neq k\delta[n])$.
- NO CAUSAL $(h_i[n]\neq 0,\ n<0)$.
- ESTABLE $\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h_i[n]|<\infty\right)$.

d) $$x[n]\longrightarrow\boxed{h[n]}\longrightarrow y[n]=\left(5e^{-j\frac{\pi}{6}}\right)^n H(z)\Big|_{z=5e^{-j\frac{\pi}{6}}}$$

$$x[n]=\left(5e^{-j\frac{\pi}{6}}\right)^n$$

ES UNA EXPONENCIAL COMPLEJA, Y POR LO TANTO UNA AUTOFUNCIÓN DE SISTEMAS LTI.

$$=\left(5e^{-j\frac{\pi}{6}}\right)^n\frac{3\left(5e^{-j\frac{\pi}{6}}\right)^{-2}}{1-\frac{7}{3}\left(5e^{-j\frac{\pi}{6}}\right)^{-1}+\frac{2}{3}\left(5e^{-j\frac{\pi}{6}}\right)^{-2}}$$

NO PODEMOS UTILIZAR TF O TZ PARA CALCULAR LA SALIDA PORQUE NO EXISTEN PARA NUESTRA $x[n]$ (NO CONVERGEN).