Sistemas Lineales
Soluciones al examen de Junio 2013

1. **Considere la señal**

$$x(t) = e^{-3t}\,(2\ u(t+1) - u(t-1))$$

y el sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = e^{j2\pi t}$.

a) **Calcule el valor de pico, la potencia instantánea, la energía y la potencia media de** $x(t)$**. Razone si se trata de una señal periódica (en caso afirmativo, determine su periodo).**

b) **Estudie las siguientes propiedades del sistema: causalidad, memoria, estabilidad e invertibilidad.**

c) **Calcula la salida del sistema cuando la entrada es** $x(t)$**.**

Resolución

a) Podemos escribir la señal del enunciado de la siguiente forma:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2e^{-3t} & -1 \leq t < 1 \\ e^{-3t} & t \geq 1 \end{cases}$$

A partir de aquí calculamos los valores indicados:

$$\begin{aligned}
x_p &= \text{máx}\{x(t)\} = x(-1) = 2e^{3t} \\
p_i(t) &= |x(t)|^2 = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 4e^{-6t} & -1 \leq t < 1 \\ e^{-6t} & t \geq 1 \end{cases} \\
E_\infty &= \int_{-\infty}^{\infty} p_i(t)dt = \int_{-1}^{1} 4e^{-6t}dt + \int_{1}^{\infty} e^{-6t}dt = \frac{2}{3}e^6 - \frac{1}{2}e^{-6} \\
P_{AV} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} p_i(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}E_\infty = 0
\end{aligned}$$

La señal $x(t)$ no es una señal periódica, ya que no existe ningún valor $T \neq 0$ tal que $x(t) = x(t+T)$.

b) Por ser un sistema LPI razonamos a partir de su respuesta al impulso $h(t)$:

Causalidad: El sistema es no causal, ya que no se cumple que $h(t) = 0$ para $t > 0$ (causal) o para $t \leq 0$ (anticausal).

Memoria: se trata de un sistema con memoria, ya que $h(t) \neq K\delta(t)$.

Estabilidad: Para que un sistema LTI sea estable, su repuesta al impulso ha de ser absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{j2\pi t}|dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1dt = \infty.$$

Por lo tanto, el sistema no es estable.

Invertibilidad: Para ver la invertibilidad lo mejor es estudiar las propiedades del sistema desde un punto de vista frecuencial. Podemos razonar, por ejemplo, a partir de su transformada de Fourier:

$$H(\omega) = 2\pi\ \delta(\omega - 2\pi).$$

Para cualquier entrada $X(\omega)$ la salida será de la forma

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = 2\pi\ X(2\pi)\delta(\omega - 2\pi).$$

Nótese que la salida sólo depende de un punto de su transformada de Fourier: $X(2\pi)$. No será posible recuperar nunca $X(\omega)$. Podríamos razonar también de la siguiente forma

$$H_i(\omega) = \frac{1}{H(\omega)} = \frac{1}{2\pi\ \delta(\omega - 2\pi)}.$$

No podemos invertir una delta, por lo que no estaría definido el sistema inverso.

c) La manera más sencilla es hacerlo por autofunciones, aunque también puede realizarse la convolución. Al convolucionar con una exponencial, tenemos la misma exponencial por la transformada de Fourier de la señal evaluada en la frecuencia de la exponencial:

$$y(t) = x(t) * e^{j2\pi t} = X(2\pi)e^{j2\pi t}.$$

Calculamos la transformada de Fourier de $x(y)$:

$$X(\omega) = \frac{1}{3 + j\omega}\left(2e^{j\omega+3} - e^{-(j\omega+3)}\right).$$

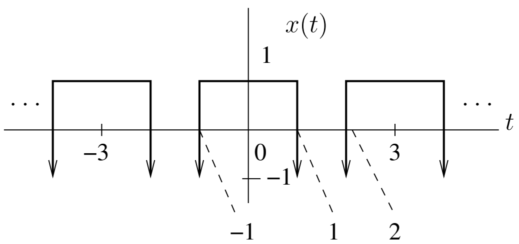
Y la convolución queda:

$$y(t) = \frac{1}{3 + j2\pi}\left(2e^{3} - e^{-3}\right)\ e^{j2\pi t}.$$

Se podría resolver también a partir de la integral de convolución:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-1}^{1} 2e^{-3\tau}e^{j2\pi(t-\tau)}d\tau + \int_{1}^{\infty} e^{-3\tau}e^{j2\pi(t-\tau)}d\tau. \end{aligned}$$

2. **Sea la señal periódica de la figura:**



***a*) Calcule la serie de Fourier de la señal periódica $x(t)$. Exprese los coeficientes como parte real más parte imaginaria.**

***b*) Calcule la transformada de Fourier de $x(t)$. Dibújela para el intervalo $[-\pi, \pi]$.**

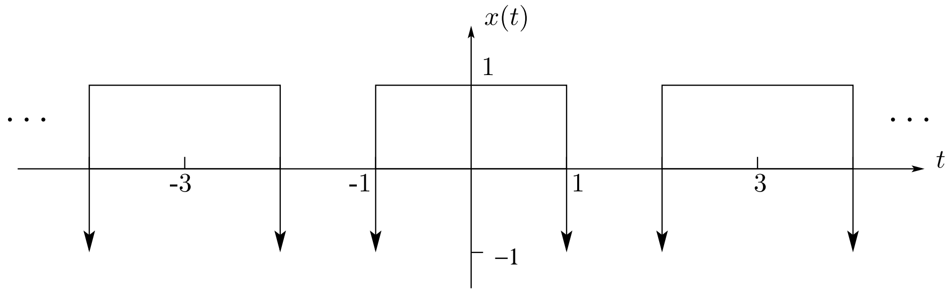
***c*) Calcule la transformada de Fourier de la señal $x_2(t) = \frac{6}{t-2j}$.**

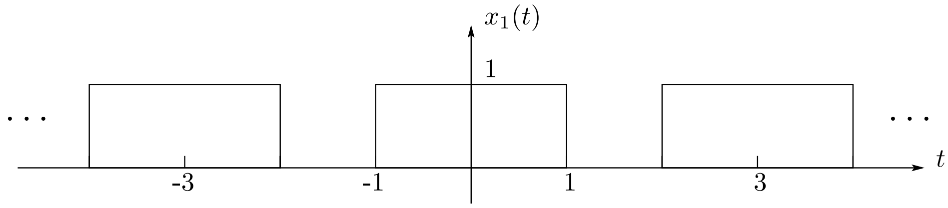
Resolución

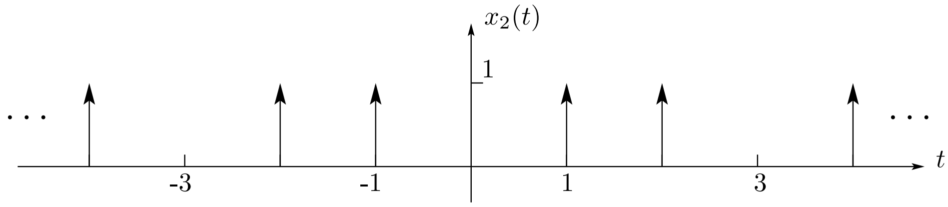
a) En primer lugar, nótese que se trata de una señal periódica, real y par. Por lo tanto, los coeficientes de su serie de Fourier serán reales y pares. El periodo de la señal es $T = 3$, de modo que su frecuencia fundamental es $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$. Para simplificar el cálculo de los coeficientes de Fourier, puede ser útil expresar la señal $x(t)$ como la resta de dos señales:

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

Donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se muestran a continuación.







Los coeficientes de la serie de Fourier cumplen la propiedad de linealidad si las señales involucradas comparten el mismo periodo. Esta condición se cumple para $x_1(t)$ y $x_2(t)$, puesto que ambas comparten el periodo de la señal global, $T = 3$. Siendo así, los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$ serán $c_k = d_k - e_k$, donde d_k y e_k son los coeficientes correspondientes a $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente.

Para la obtención de d_k no necesitamos más que recurrir a las tablas, puesto que $x_1(t)$ es una onda cuadrada periódica. Así:

$$d_k = \frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right)}{k\pi} = \frac{2}{3}\text{sinc}\left(k\frac{2\pi}{3}\right)$$

Puede observarse que cuando $k = 0$ existe una indeterminación en el valor de d_k. Sin embargo, teniendo en cuenta que $\text{sinc}(0) = 1$ o bien calculando $d_0 = \frac{1}{T}\int_{<T>} x_1(t)dt$ es sencillo comprobar que $d_0 = \frac{2}{3}$.

En cuanto a e_k, una posible manera, bastante sencilla, es recurrir a la expresión general para los coeficientes de la serie de Fourier de una señal continua periódica:

$$\begin{aligned} e_k &= \frac{1}{T}\int_{<T>} x_2(t)e^{-jk\omega_o t}dt = \frac{1}{3}\int_{-3/2}^{3/2}\left[\delta(t-1)+\delta(t+1)\right]e^{-jk2\pi/3t}dt \\ &= \frac{1}{3}\int_{-3/2}^{3/2}\left[\delta(t-1)e^{-jk2\pi/3}+\delta(t+1)e^{jk2\pi/3}\right]dt = \frac{1}{3}\left(e^{-jk2\pi/3}+e^{jk2\pi/3}\right) \\ &= \frac{2}{3}\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Combinando d_k y e_k obtenemos la expresión general para los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$:

$$c_k = d_k - e_k = \frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right)}{k\pi} - \frac{2}{3}\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right)$$

Puede comprobarse que los coeficientes resultantes son reales y pares, como habíamos avanzado al comienzo. Además, para $k = 0$;

$$c_0 = d_0 - e_0 = \frac{2}{3}\text{sinc}(0) - \frac{2}{3}\cos(0) = 0$$

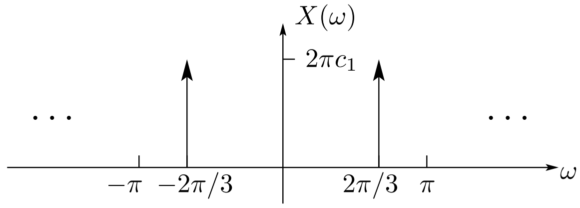
como era de esperar, puesto que el valor medio de la señal a lo largo de un periodo es cero.

b) Debido a que $x(t)$ es una señal periódica su transformada de Fourier está relacionada con su expresión en serie de Fourier. Así pues, solo necesitamos particularizar para nuestro caso:

$$X(\omega) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0) = X(\omega) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} 2\pi \left[\frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right)}{k\pi} - \frac{2}{3}\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) \right] \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{3}\right)$$

Para dibujar $X(\omega)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, solamente necesitamos calcular el valor de los coeficientes c_0, c_1 y c_{-1}. El primero es cero, y los otros dos son iguales como se vio anteriormente, por ser $x(t)$ real y par:

$$c_1 = c_{-1} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\pi} - \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\pi} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{1}{3} > 0$$



c) Se pretende calcular la transformada de Fourier de la siguiente señal:

$$x_2(t) = \frac{6}{t - 2j}$$

La transformada de una señal de ese tipo no se encuentra en las tablas, y el cálculo de la transformada siguiendo la expresión general resulta complicado porque se trata de integrar una exponencial dividida entre un polinomio. Sin embargo, es sencillo darse cuenta de que la señal tiene una expresión similar, en función del tiempo, a la expresión en frecuencia de la transformada de Fourier de una exponencial decreciente multiplicada por la función escalón:

$$e^{-at}u(t), \mathcal{R}e\{a\} > 0 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a + j\omega}$$

Dada esta correspondencia, podemos utilizar la propiedad de dualidad de la transformada de Fourier para obtener la transformada deseada. Enunciamos a continuación dicha propiedad:

$$\begin{aligned} f(t) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} g(\omega) \\ g(t) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi f(-\omega) \end{aligned}$$

Modificamos ligeramente $x_2(t)$ para utilizar la propiedad de dualidad:

$$x_3(t) = \frac{-j}{6}x_2(t) = \frac{1}{6j}x_2(t) = \frac{1}{6j}\frac{6}{t - 2j} = \frac{1}{2 + jt}$$

Ahora ya estamos en disposición de calcular la transformada de Fourier de $x_3(t)$, identificando esta señal con $g(t)$ en el enunciado de la propiedad de dualidad:

$$\begin{aligned} f(t) = e^{-2t}u(t) \quad &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} g(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega} \\ g(t) = \tfrac{1}{2+jt} = x_3(t) \quad &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi f(-\omega) = 2\pi e^{2\omega}u(-\omega) = X_3(\omega) \end{aligned}$$

Por último, tengamos en cuenta simplemente que $x_2(t) = 6jx_3(t)$. Por lo tanto:

$$X_2(\omega) = 6jX_3(\omega) = 12j\pi e^{2\omega}u(-\omega)$$

3. **La señal $x_1(t) = e^{-|t|}$ se pasa por un filtro pasobajo continuo de ganancia unitaria y frecuencia de corte $\omega_c = 2\pi$, dando como salida la señal $x_2(t)$.**

   ***a*) Estudie si es posible muestrear las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ con un tren de impulsos equiespaciados sin cometer *aliasing*. En caso afirmativo, calcule el máximo periodo de muestreo de cada una.**

   ***b*) Se muestrea la señal $x_2(t)$ con un tren de impulsos equiespaciados a la frecuencia de Nyquist, dando lugar a la señal $x_p(t)$. Tras pasar por un conversor C/D, obtenemos la señal discreta $x[n]$. Calcule analíticamente y dibuje las transformadas de Fourier de $x_p(t)$ y de $x[n]$.**

   ***c*) La señal $x[n]$ se procesa con un sistema LTI con función de transferencia $H_d(\Omega) = j\frac{\Omega}{T}$, siendo T el periodo de muestreo, dando lugar a la señal $y_d[n]$. La señal $y_d[n]$ se pasa por un conversor D/C y luego por el filtro de reconstrucción estándar para la frecuencia de muestreo considerada, dando lugar a la señal $y_2(t)$. Calcule las transformadas de Fourier de $y_d[n]$ y de $y_2(t)$.**

   ***d*) Calcule $y_2(t)$ en función de $x_2(t)$.**

Resolución

Calculamos, en primer lugar, las transformadas de Fourier de $x_1(t)$ y de $x_2(t)$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t}u(t) + e^{t}u(-t) \\ X_1(\omega) &= = \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{1-j\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}. \end{aligned}$$

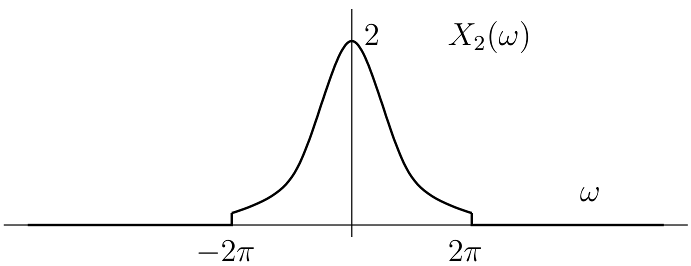
La señal $x_2(t)$ es una versión pasobajo de $x_1(t)$:

$$X_2(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{1+\omega^2} & |\omega| \le 2\pi \\ 0 & |\omega| > 2\pi. \end{cases}$$

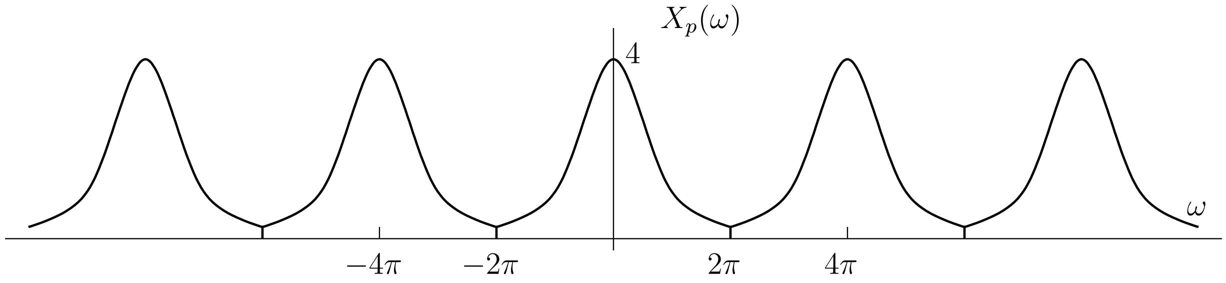
a) La señal $x_1(t)$ no es una señal de banda limitada en frecuencia. Por lo tanto, no va a ser nunca posible muestrearla sin cometer aliasing. La señal $x_2(t)$, cumple que $X_2(\omega) = 0$ $|\omega| > 2\pi$, por lo que es de banda limitada, con frecuencia máxima $\omega_M = 2\pi$. Será posible muestrearla con un tren de impulsos sin cometer aliasing siempre y cuando se haga por encima de la frecuencia de Nyquist. En este caso particular, la mínima frecuencia de muestreo será la frecuencia de Nyquist:

$$\omega_s = 2\omega_M = 4\pi, \quad T_{\text{máx}} = \frac{1}{2}.$$

b) Para este apartado, al trabajar a la frecuencia de Nyquist, asumimos la frecuencia y el periodo de muestreo del apartado anterior: $\omega_s = 4\pi$ y $T = \frac{1}{2}$. Partimos de la señal $X_2(\omega)$:



Al muestrear con un tren de deltas, la señal se replica en los múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo y su altura se divide por T:



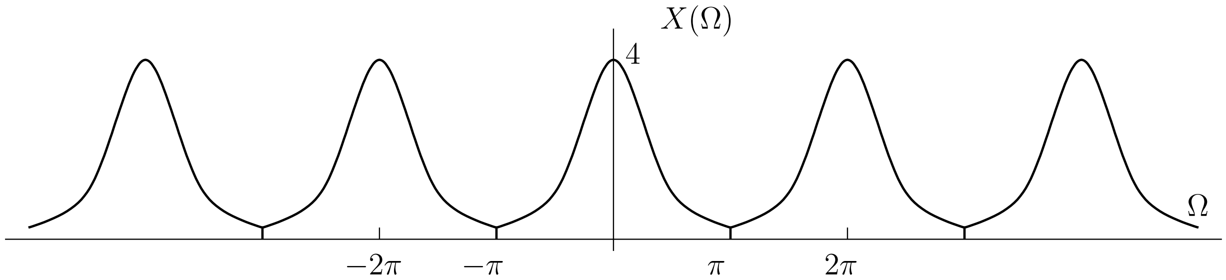
De forma analítica, la señal quedaría:

$$X_p(\omega) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_2(\omega - 4\pi k)$$

con $X_2(\omega)$ como hemos definido antes. La señal $X(\Omega)$ será un escalado de $X_p(\omega)$. Al no haber aliasing:

$$X(\Omega) = X_p\left(\frac{\Omega}{T}\right) = \frac{2}{1+(2\Omega)^2}, \quad |\Omega| < \pi.$$

De forma gráfica



c) Al pasar por el sistema discreto, la señal a la salida será:

$$Y_d(\Omega) = X(\Omega)H_d(\Omega) = \frac{2j2\Omega}{1+(2\Omega)^2}, \quad |\Omega| < \pi.$$

Al pasar por el conversor D/C tenemos la señal muestreada continua $Y_p(\omega)$:

$$Y_p(\omega) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_b(\omega - 4\pi k)$$

con

$$Y_b(\omega) = \begin{cases} \frac{2j\omega}{1+\omega^2} & |\omega| \leq 2\pi \\ 0 & |\omega| > 2\pi. \end{cases}$$

Al pasar por el filtro de reconstrucción (frecuencia de corte la mitad de la frecuencia de muestreo y ganancia T), a la salida tenemos

$$Y_2(\omega) = \begin{cases} \frac{2j\omega}{1+\omega^2} & |\omega| \leq 2\pi \\ 0 & |\omega| > 2\pi. \end{cases}$$

d) Es sencillo ver que

$$Y_2(\omega) = j\omega\ X_2(\omega).$$

Aplicando las propiedades de la transformada de Fourier podemos ver que

$$y_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}.$$

4. **Considere la señal $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{|n-1|}$ y el sistema LTI estable con la función de transferencia $H(z) = \frac{2z^2}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$.**

   a) **Halle la transformada Z de $x[n]$, dibujando su diagrama de polos y ceros y especificando su región de convergencia.**

   b) **Obtenga la respuesta al impulso del sistema, $h[n]$. Estudie su memoria y su causalidad.**

   c) **Calcule la salida del sistema, $y[n]$, cuando la entrada es la descrita al principio del enunciado.**

   d) **Calcule la respuesta al impulso del sistema inverso, y la salida para ese sistema inverso con una entrada $z[n] = u[n] - u[n-10]$.**

Resolución

a) La señal $x[n]$ es una señal bilateral, y puede verse como una señal par desplazada en el tiempo, $x[n] = x_1[n-1]$, donde

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{|n|}$$

Ahora, $x_1[n]$ se puede dividir en dos señales sencillas cuya transformada Z aparece en las tablas:

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u[-n-1] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 4^n u[-n-1]$$

$$X_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{1}{1-4z^{-1}}$$

La convergencia del primer sumando requiere que $|z| > \frac{1}{4}$, mientras que la del segundo sumando requiere que $|z| < 4$. Así pues, la región de convergencia de $X_1(z)$ es $\frac{1}{4} < |z| < 4$.

Finalmente, para obtener $X(z)$, tenemos en cuenta que un desplazamiento en el tiempo es equivalente a la multiplicación en el dominio de la transformada Z por un factor z^{-n_0}. En nuestro caso, entonces:

$$X(z) = X_1(z)z^{-1} = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1-4z^{-1}}$$

La región de convergencia sigue siendo $\frac{1}{4} < |z| < 4$.

b) Por tratarse de un sistema LTI estable (así se indica en el enunciado), sabemos que la región de convergencia de $H(z)$ ha de incluir la circunferencia unidad. Recordemos que

$$H(z) = \frac{2z^2}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Esa expresión tiene un polo en infinito y otro en $z = 1/4$. Para incluir la circunferencia unidad, es necesario que la región de convergencia sea $\frac{1}{4} < |z| < \infty$. Teniendo en cuenta esto se puede calcular la transformada inversa observando además que $H(z) = 2z^2 H_1(z)$, con

$$H_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \; , |z| > 1/4$$

Recurriendo a las tablas, vemos que $h_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$, de modo que finalmente:

$$h[n] = 2h_1[n-2] = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{(n-2)} u[n-2].$$

El sistema así descrito no es causal y tiene memoria.

c) La salida del sistema que estamos buscando será $y[n] = x[n] * h[n]$. Obviamente, será más sencillo operar en el dominio de la transformada Z:

$$\begin{aligned}
Y(z) &= X(z)H(z) = \left(\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1-4z^{-1}}\right)\frac{2z^2}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \\
&= \frac{2z}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} - \frac{2z}{\left(1-4z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} \\
&= 8z^2\frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} - z\left(\frac{A}{1-4z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)
\end{aligned}$$

En cuanto a la región de convergencia de $Y(z)$, sabemos que ha de ser la intersección entre las regiones de convergencia de $X(z)$ y $H(z)$, por lo que será $\frac{1}{4} < |z| < 4$. Además, al estar $Y(z)$ formada por tres sumandos, sabemos que la región de convergencia de cada uno debe ser tal que su intersección sea la región de convergencia total. De este modo, y recurriendo las tablas:

$$Y_1(z) = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}, |z| > \frac{1}{4} \overset{\mathbf{Z}^{-1}}{\longleftrightarrow} y_1[n] = n\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$Y_2(z) = \frac{1}{1-4z^{-1}}, |z| < 4 \overset{\mathbf{Z}^{-1}}{\longleftrightarrow} y_2[n] = -4^n u[-n-1]$$

$$Y_3(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{4} \overset{\mathbf{Z}^{-1}}{\longleftrightarrow} y_3[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Por fin, recomponiendo $Y(z)$ obtenemos:

$$Y(z) = 8z^2Y_1(z) - AzY_2(z) - BzY_3(z)$$

$$\updownarrow TZ^{-1}$$

$$\begin{aligned}
y[n] &= 8y_1[n+2] - Ay_2[n+1] - By_3[n+1] \\
&= 8(n+2)\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} u[n+2] + A4^{n+1}u[-n-2] - B\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} u[n+1]
\end{aligned}$$

d) En el dominio de la transformada Z, calcular la respuesta al impulso del sistema inverso es inmediato:

$$H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{2z^2} = \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}$$

La transformada inversa para obtener la respuesta al impulso es también inmediata:

$$h^{-1}[n] = \frac{1}{2}\delta[n-2] - \frac{1}{8}\delta[n-3]$$

Para calcular la salida de este sistema inverso cuando la entrada es la señal $z[n]$, lo más sencillo es operar en el dominio temporal, porque convolucionar con deltas consiste simplemente en desplazar la señal:

$$\begin{aligned}
v[n] &= z[n] * h^{-1}[n] = z[n] * \left(\frac{1}{2}\delta[n-2] - \frac{1}{8}\delta[n-3]\right) = \frac{1}{2}z[n-2] - \frac{1}{8}z[n-3] \\
&= \frac{1}{2}u[n-2] - \frac{1}{2}u[n-12] - \frac{1}{8}u[n-3] + \frac{1}{8}u[n-13]
\end{aligned}$$