Sistemas Lineales

Examen de Septiembre 2005. Soluciones

1. **(2.5 pt.)** La señal $y(t) = [\text{sinc}(\omega_0 t)]^4$ puede escribirse como

$$\begin{aligned}
y(t) &= [\text{sinc}(\omega_0 t)]^4 \\
&= \left[\frac{\sin(\omega_o \pi t)}{\omega_o \pi t}\right]^4 \\
&= \frac{1}{\omega_0^4}\left[\frac{\sin(\omega_o \pi t)}{\pi t}\right]^4 \\
&= \frac{1}{\omega_0^4}[y_1(t)]^4 = \frac{1}{\omega_0^4} y_1(t) \times y_1(t) \times y_1(t) \times y_1(t)
\end{aligned}$$

de donde se deduce que la transformada de Fourier de $y(t)$ (aplicando la propiedad de multiplicación) será

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \frac{1}{\omega_0^4}\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\left(Y_1(\omega) * Y_1(\omega)\right) * \frac{1}{2\pi}\left(Y_1(\omega) * Y_1(\omega)\right)\right] \\
&= \frac{1}{\omega_0^4}\frac{1}{(2\pi)^3}\left[\left(Y_1(\omega) * Y_1(\omega)\right) * \left(Y_1(\omega) * Y_1(\omega)\right)\right]
\end{aligned}$$

La trasnformada de Fourier de $y_1(t)$ será un pulso cuadrado entre $[-\omega_0\pi, \omega_0\pi]$ y de altura 1. (Si no sacamos fuera de la ecuación el término $1/\omega_0^4$ el pulso tendrá altura $1/\omega_0$).

Llamemos ahora $Y_2(\omega) = Y_1(\omega) * Y_1(\omega)$. Sabemos que la convolución de dos pulsos cuadrados es un triángulo de anchura doble. Su altura la podemos calcular como la convolución en el origen (también podría hacerse la convolución, que es sencilla):

$$Y_2(0) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_1(\eta) Y_1(-\eta) d\eta = \int_{-\omega_o\pi}^{\omega_o\pi} (Y_1(\eta))^2 d\eta = 2\pi\omega_0$$

Luego $Y_2(\omega)$ es un pulso triangular entre $[-2\omega_0\pi, 2\omega_0\pi]$ y con altura $2\pi\omega_0$.

La señal $Y(\omega)$ será

$$Y(\omega) = \frac{1}{\omega_0^4}\frac{1}{(2\pi)^3} Y_2(\omega) * Y_2(\omega)$$

Sólo se pide la frecuencia máxima y la altura en el origen. la frecuencia máxima será la suma de las frecuencias máximas de las señales a convolucionar. En este caso será por lo tanto el doble de la frecuencia máxima de $Y_2(\omega)$:

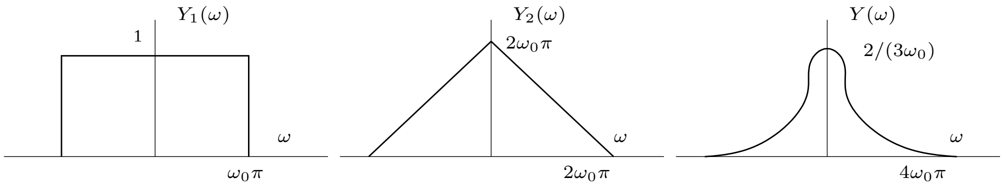
$$\omega_{max} = 4\pi\omega_0$$

El valor en el origen lo obtenemos a partir de la convolución:

$$\begin{aligned}
Y_3(\omega) &= Y2(\omega) * Y_2(\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} Y_2(\eta) Y_2(\omega-\eta) d\eta \\
Y_3(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y_2(\eta) Y_2(-\eta) d\eta \\
&= \int_{-2\pi\omega_0}^{2\pi\omega_0} (Y_2(\eta))^2 d\eta \\
&= \int_{-2\pi\omega_0}^{0} (\eta + 2\pi\omega_0)^2 \, d\eta + \int_{0}^{2\pi\omega_0} (-\eta + 2\pi\omega_0)^2 \, d\eta \\
&= \frac{2(2\pi\omega_0)^3}{3}
\end{aligned}$$

de donde

$$Y(0) = \frac{1}{\omega_0^4} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2(2\pi\omega_0)^3}{3} = \frac{2}{3\omega_0}$$



2. **(2.5 pt.)** Lo primero que hay que tener en cuenta es que la señal $x(t)$ definida en el enunciado es una señal periódica cuyo periodo corresponde con la señal $x_a(t)$. Por lo tanto la transformada de Fourier de $x(t)$ será un tren de deltas, como la de cualquier señal periódica.

   La mejor manera de trabajar es usar la Serie de Fourier. Sabemos que toda señal periódica puede escribirse como una suma de exponenciales de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

   donde C_k son los coeficientes de la serie que se calculan

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{<T>} x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt$$

   La transformada de Fourier de una señal periódica es

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

Para este caso el periodo es $T = 1$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
C_k &= \int_0^1 x_a(t)e^{-jk2\pi t}dt \\
&= \int_0^1 \cos(\pi t)e^{-jk2\pi t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{j\pi t(1-2k)} + e^{-j\pi t(1+2k)}+\right) e^{-jk2\pi t}dt \\
&= \vdots \\
&= \frac{4k}{j\pi(4k^2-1)}
\end{aligned}
$$

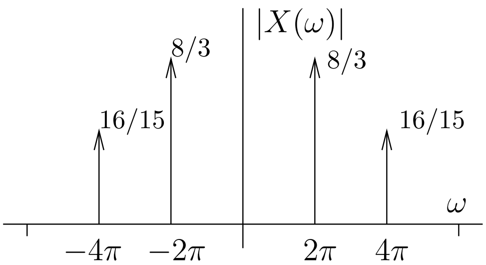
De donde deducimos $X(\omega)$

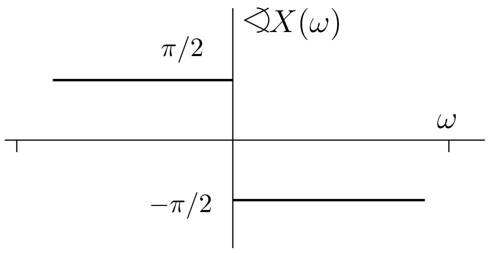
$$X(\omega) = \sum_k 2\pi C_k \delta(\omega - 2\pi k) = \sum_k \frac{8k}{j(4k^2-1)}\delta(\omega - 2\pi k)$$

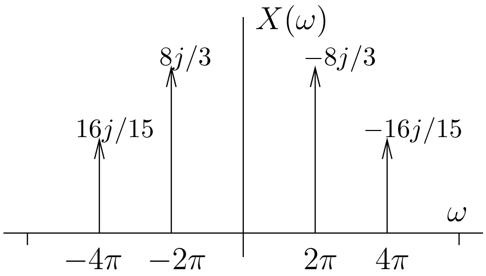
Las deltas que caen dentro del intervalo $[-5\pi, 5\pi]$ corresponden a $k = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$:

$$a_0 = 0,\ \ a_1 = \frac{-4j}{3\pi},\ \ a_{-1} = \frac{4j}{3\pi},\ \ a_2 = \frac{-8j}{15\pi}, a_{-2} = \frac{8j}{15\pi}$$

La transformada de Fourier queda como sigue







Es posible realizar el problema también a partir de la Transformada de Fourier de la señal aperiódica. En ese caso la señal aperiódica es $x_a(t)$. Nótese que no es un coseno, sino un coseno enventanado. Su transformada de Fourier por lo tanto será

$$
\begin{aligned}
X_a(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^1 \cos(\pi t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \frac{j\omega(1+e^{-j\omega})}{\pi^2 - \omega^2}
\end{aligned}
$$

Lógicamente la solución ha de ser la misma que con el método anterior.

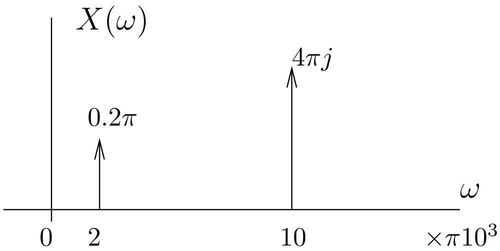
3. **(2.5 pt.)** La transformada de Fourier de la señal $x(t)$ será

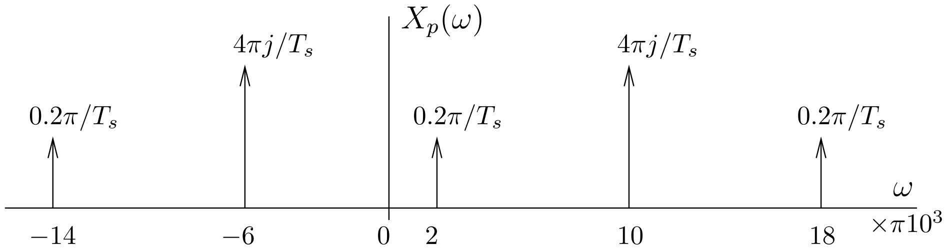
$$X(\omega) = 0.2\pi\delta(\omega - 2000\pi) + j4\pi\delta(\omega - 10000\pi)$$

La señal se muestrea con un tren de deltas con una frecuencia de muestreo de $\omega_s = 16000\pi$. En frecuencia es equivalente a multiplicar la señal por $1/T_s$ (siendo $T_s = 1/8000$ el periodo de muestreo) y a duplicarla en múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo:

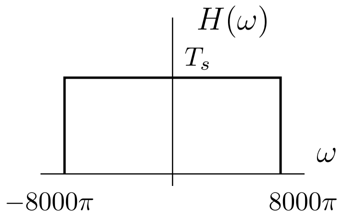
$$\begin{aligned}
X_p(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{T_s}k) \\
&= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * 2\pi \cdot 8000 \sum_k \delta(\omega - 2\pi \cdot 8000k) \\
&= 8000 \sum_k X(\omega) * \delta(\omega - 2\pi \cdot 8000k) \\
&= 8000 \sum_k X(\omega - 2\pi \cdot 8000k)
\end{aligned}$$

Gráficamente:





Para recuperar una señal muestreada a ω_s debemos usar un filtro pasobajo con frecuencia de corte $\omega_c = \omega_s/2$ y ganancia T_s



Con lo que a la salida la señal será

$$Y(\omega) = 0.2\pi\delta(\omega - 2000\pi) + 4\pi j\delta(\omega + 6000\pi)$$

y haciendo la transformada inversa obtenemos la señal temporal:

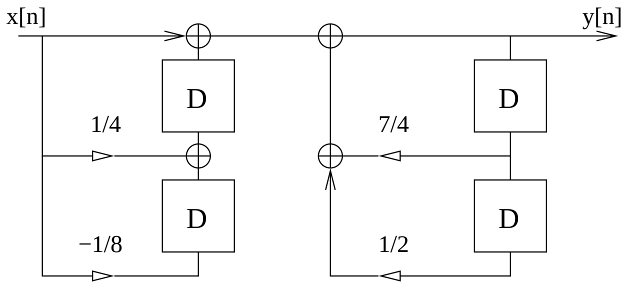
$$y(t) = 0.1e^{j2000\pi t} + 2e^{j\pi/2}e^{-j6000\pi t}$$

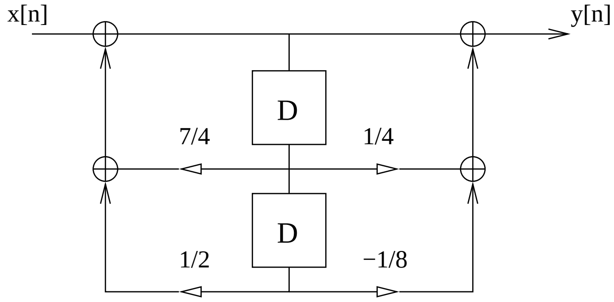
4. **(2.5 pt.)**

(a) **(0.5 pt.)**

$$y[n] - \frac{7}{4}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2] = x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-2]$$

(b) **(0.8 pt.)** Formas directas I y II:





(c) **(1.2 pt.)** Se piden dos sistemas cuya respuesta al impulso cumpla que

$$h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

Esto en el dominio Z es equivalente a

$$H(z)H_i(z) = 1$$

Es decir, que $H_i(z)$ es el sistema inverso de $H(z)$:

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$$

En función de las regiones de convergencia de $H(z)$ vamos a poder elegir entre distintos sistemas de salida.

$$\begin{aligned} H_i(z) &= \frac{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} \\ &= \frac{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \end{aligned}$$

El sistema inverso tiene dos polos, con lo que tienen tres posibles regiones de convergencia. Vamos a tomar (por ejemplo) aquellas que hacen que el sistema sea causal o anticausal:

$$
\begin{aligned}
|z| &> \frac{1}{2} \qquad \text{(Causal)} \\
|z| &< \frac{1}{4} \qquad \text{(Anticausal)}
\end{aligned}
$$

Para calcular la transformada inversa a partir de $H_i(z)$ hacemos una expansión en fracciones simples. Varios métodos:

i. División de polinomios (término de mayor grado)

$$
\begin{aligned}
H_i(z) &= 1 - z^{-1}\frac{2 + \frac{3}{8}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \\
H_i(z) &= 1 - \frac{\frac{7}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})} - \frac{\frac{5}{6}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}
\end{aligned}
$$

ii. División de polinomios (término de menor grado)

$$
\begin{aligned}
H_i(z) &= 4 - \frac{3 + \frac{11}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \\
H_i(z) &= 4 - \frac{\frac{14}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{\frac{5}{3}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}
\end{aligned}
$$

iii. Separación de términos

$$
\begin{aligned}
H_i(z) &= \frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} - z^{-1}\frac{\frac{7}{4} + \frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \\
&\vdots \\
H_i(z) &= \frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}
\end{aligned}
$$

La solución al hacer la transformada inversa es la siguiente:

$$
h_1[n] = 4\delta[n] - \frac{14}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]
$$

$$
h_2[n] = 4\delta[n] + \frac{14}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1] - \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]
$$

Dependiendo del método usado la solución puede aparecer escrita de otra forma y sin embargo ser la misma señal, como por ejemplo:

$$
h_1[n] = \delta[n] - \frac{7}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] - \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]
$$