Sistemas Lineales

Examen de Febrero 2005. Soluciones

1. **(2 pt.)**

   (a) **(1 pt.)** Para estudiar el sistema hay que usar las propiedades de los sistemas LTI vistas en el tema 3:

   - El sistema es sin memoria si $h(t) = k\delta(t)$. Por lo tanto es sistema tiene memoria.
   - El sistema es causal si $h(t) = 0 \ \forall t < 0$, luego es causal.
   - El sistema es estable si $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$. Como

   $$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{1}^{\infty} e^t dt = \infty$$

   el sistema no es estable.

   (b) **(1 pt.)** La convolución $y(t) = x(t) * h(t)$ está en los problemas de clase (tema 3, problema 4-d). La mejor forma es hacer la convolución en tiempo usando las integrales. También se puede hacer por Laplace, pero nunca por Fourier (el sistema no es estable, por lo que $h(t)$ no tiene transformada de Fourier). La solución en forma de intervalos es:

   $$y(t) \begin{cases} \frac{1}{2}e^{(3t-2)}, & t \leq -1 \\ \frac{1}{2}e^{(3t-2)} - \frac{1}{3}e^{(-2t+3)} + \frac{1}{3}e^{(t+6)}, & -1 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{2}e^{(t+4)} - \frac{1}{3}e^{(-2t+3)} + \frac{1}{3}e^{(t+6)}, & t \geq 3 \end{cases}$$

   Y expresado en con funciones escalón (tras simplificar):
   $y(t) = \frac{1}{2}e^{(3t-2)}u(-t+3) + \frac{1}{3}\left[e^{(t+6)} + e^{(-2t+3)}\right]u(t+1) + \frac{1}{2}e^{(t+4)}u(t-3)$

2. **(3 pt.)**

   (a) **(1 pt.)** Por tratarse de una señal periódica, la TF de $x[n]$ se calcula a partir de los coeficientes de la serie de Fourier:

   $$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=<N>} a_k \delta_p\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

   Por tratarse de una señal discreta con $N = 7$, habrá 7 coeficientes de Fourier:

   $$a_k = \frac{1}{7}\sum_{-1}^{1} 1 \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{7}n} = \frac{1}{7}(1 + 2\cos(k\frac{2\pi}{7}))$$

   con $k = 0, \cdots, 6$, o si tomamos un periodo centrado en el origen, $k = -3, \cdots, 3$. (Ver $X(\Omega)$ en fig. 2-(a)). Al pasar la señal por un bloque D/C las deltas discretas ($\delta[n]$) de $x[n]$ pasan a deltas continuas ($\delta(t)$). En el dominio discreto están equiespaciadas 1. En el dominio continuo estarán equiespacidas una distancia

T. (Se sabe ya que el filtro de reconstrucción debe tener su frecuencia de corte a la mitad de la frecuencia de muestreo. Si $\omega_c = \pi/T$ el periodo de muestreo es T.) La señal $x_p(t)$ aparece en la figura 1-(a). La señal $X_p(\omega)$ será igual que $X(\Omega)$ pero con un escalado en el eje ω (los valores se dividen por T).

$$X_p(\omega) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-3}^{3} a_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{7T} - l\frac{2\pi}{T})$$

(Ver $X_p(\omega)$ en fig. 2-(b)). Al aplicar el filtro de reconstrucción multiplicamos la señal por T y nos quedamos solo con un periodo (que se corresponde con $X(\Omega)$ entre $-\pi$ y π). Por lo tanto aparecerán 7 muestras, que se corresponden con los 7 coeficientes de la SF.

$$X_c(\omega) = 2\pi T \sum_{k=-3}^{3} a_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{7T}) = \frac{2\pi T}{7} \sum_{k=-3}^{3} (1 + 2\cos(k\frac{2\pi}{7}))\delta(\omega - k\frac{2\pi}{7T})$$

(Ver $X_c(\omega)$ en fig. 3).

(b) **(1 pt.)** Al pasar la señal $X_c(\omega)$ por el filtro $H_2(\omega)$ me quedo únicamente con la delta del origen

$$Y_c(\omega) = 2\pi T a_0 \delta(\omega) = 2\pi a_0 \delta(\omega)$$

(Ver $Y_c(\omega)$ en fig. 4-(a)). Al muestrear esta señal en tiempo, en frecuencia queda

$$Y_p(\omega) = 2\pi a_0 \sum_k \delta(\omega - 2\pi k)$$

que al pasar a TF de tiempo discreto resulta

$$Y(\Omega) = 2\pi a_0 \delta_p(\Omega)$$

siendo su transformada inversa $y[n] = a_0 = \frac{3}{7}$. (Ver $Y(\Omega)$ en fig. 4-(b)).

(c) **(1 pt.)** Calculamos la Potencia media de una señal periódica

$$P_{av} = \frac{1}{N} \sum_{<N>} |x[n]|^2$$

Para la señal de entrada:

$$P_{av_1} = \frac{1}{7} \sum_{-1}^{1} 1^2 = \frac{3}{7}$$

Para la señal de salida:

$$P_{av_2} = \left(\frac{3}{7}\right)^2$$

El tanto por ciento de potencia de la entrada que llega a la salida será $\frac{(3/7)^2}{3/7} =$ 43%. Por lo tanto se pierde el 57% de la potencia.

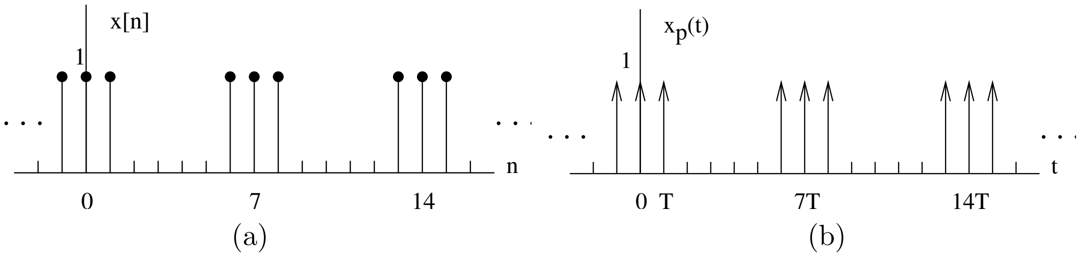

Figure 1: (a) Señal $x[n]$ (b) Señal $x_p(t)$

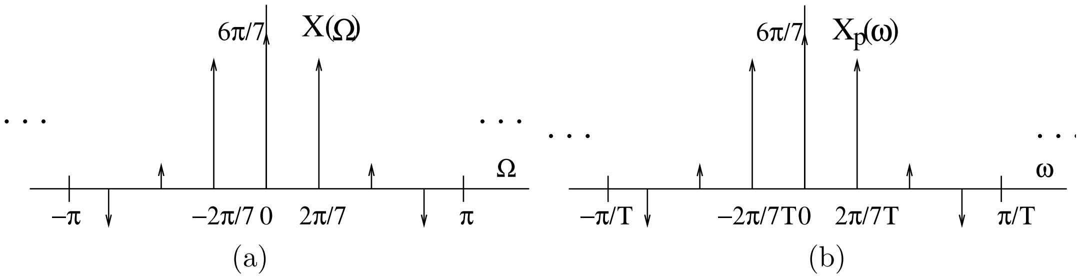

Figure 2: (a)Señal $X(\Omega)$ (1 periodo). (b) Señal $X_p(\omega)$ (1 periodo).

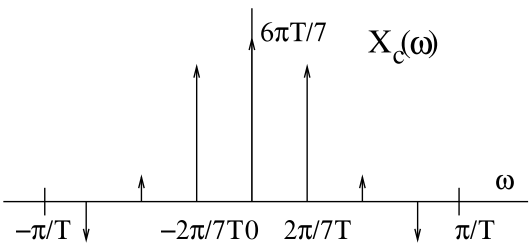

Figure 3: Señal $X_c(\omega)$

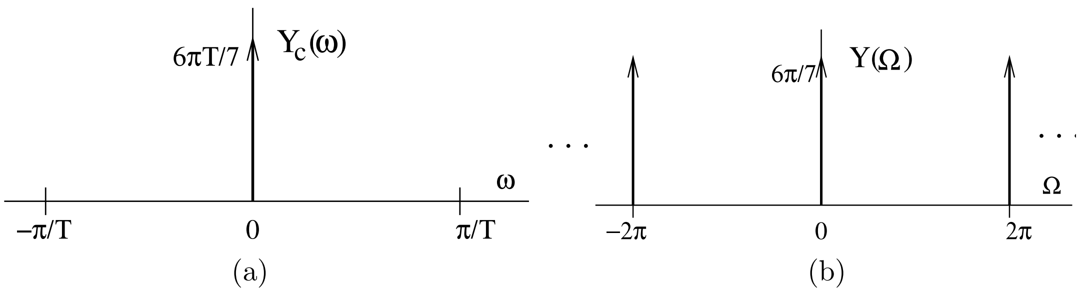

Figure 4: (a) Señal $Y_c(\omega)$. (b) Señal $Y(\Omega)$

3. **(2 pt.)**

   (a) **(0,75 pt.)** La mejor forma de hacerlo es mediante la transformada Z:

$$\begin{cases} W(z)\left(1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right) = X(z) \\ Y(z) = W(z)\left(1 - 2z^{-1}\right) \end{cases}$$

Despejando $W(z)$ y sustituyendo llegamos a

$$Y(z)\left(1-2z^{-1}+z^{-2}\right)=X(z)\left(1-2z^{-1}\right)$$

y haciendo la transformada inversa

$$y[n]-2y[n-1]+y[n-2]=x[n]-2x[n-1]$$

(b) **(0,5 pt.)** Del apartado anterior podemos calcular $H(z)$:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\left(1-2z^{-1}\right)}{\left(1-2z^{-1}+z^{-2}\right)}=\frac{\left(1-2z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

El sistema será estable si el círculo unidad cae dentro de la región de convergencia de $H(z)$. Dado que $H(z)$ tiene un polo doble en el círculo unidad, éste no estará en la ROC, por lo que el sistema nunca será estable.

(Nótese que si el sistema no es estable, no existe la TF de $h[n]$, es decir $H(\Omega)$. Cualquier razonamiento hecho con $H(\Omega)$ carece entonces de sentido).

(c) **(0,75 pt.)** La entrada $x[n]=2^n$ es una autosolución del sistema, ya que cuando la entrada de un LTI es de la forma $x[n]=z_0^n$ la salida es $y[n]=z_0^nH(z_0)$. En este caso la salida será

$$y[n]=2^nH(2)=2^n\cdot 0=0$$

4. **(1 pt.)**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{T}k\right)=K\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega kT}=K\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\omega kT}$$

Nótese que el signo de la exponencial puede ser positivo o negativo, ya que pasamos de uno a otro con un simple cambio de variable en k.

Para demostrar esta igualdad lo más correcto es acudir a las series de Fourier. La primera parte de la expresión es un tren de deltas equiespaciadas, lo que quiere decir que es una señal periódica. Dado que está definida en frecuencia, su periodo será una frecuencia ω y no T. Nótese que es equivalente a trabajar en tiempo, pero con un cambio en el nombre de las variables. Por lo tanto si $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{T}k\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\omega_0k\right)$$

Si calculamos los coeficientes de la serie de Fourier de esta señal serán $a_k=\frac{1}{\omega_0}$. (Se pueden calcular sin más mirando las tablas de transformada de Fourier. Allí aparecen los a_k de un tren de deltas).

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{T}k\right)=\frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j2\pi\frac{\omega k}{\omega_0}}=\frac{T}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{j\omega kT}$$

con lo que queda demostrado. De aquí deducimos que

$$K=\frac{T}{2\pi}$$

Otra posibilidad más sencilla es hacer las transformadas inversas de Fourier de los dos términos:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right) \overset{\mathfrak{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - nT\right)$$

$$K \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT} \overset{\mathfrak{F}^{-1}}{=\!\!\longleftrightarrow} K \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - nT\right)$$

Si $K = \frac{T}{2\pi}$ entonces ambas señales tienen la misma transformada inversa de Fourier, y por lo tanto son la misma señal.

5. **(2 pt.)**

   (a) **(1 pt.)** Puede hacerse de dos formas:

      i. Directamente con la integral:

      $$X(s) = \int_{-1}^{2} te^{-st}dt$$

      ii. Suponiendo un pulso cuadrado de altura 1 entre -1 y 2 multiplicado por t: $x(t) = t \cdot x_1(t)$. Aplicando propiedades la TL será $X(s) = -\frac{d}{ds}X_1(s)$

   En ambos casos

   $$X(s) = \frac{e^s - e^{-2s} - s(2e^{-2s} + e^s)}{s^2}$$

   Por ser una señal limitada va a converger en todo el plano s. NOTA: Podría pensarse a primera vista que la señal presenta un polo en $s = 0$. Sin embargo $X(0) = \frac{0}{0}$, con lo que para calcularlo habría que acudir a la integral:

   $$X(0) = \int_{-1}^{2} te^{-0t}dt = \frac{3}{2}$$

   Esta comprobación no haría falta si se tiene en cuenta la propiedad que dice que “Si $x(t)$ es de duración finita y absolutamente integrable, entonces la ROC es el plano s completo” (Oppenheim, pag. 663).

   (b) **(1 pt.)** A partir de la ecuación se deduce la función de transferencia del sistema (o la TL de la respuesta al impulso):

   $$H(s) = \frac{4\pi^2 s^2}{s(s + 4\pi)} = \frac{4\pi^2 s}{s + 4\pi}$$

   Como se indica que se tome el sistema estable, tomaremos aquella ROC que contenga el eje $j\omega$, esto es $\Re\{s\} > -4\pi$. La salida en el dominio de Laplace será

   $$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{4\pi^2(e^s - e^{-2s})}{s(s + 4\pi)} - \frac{4\pi^2(e^s + 2e^{-2s})}{s + 4\pi}$$

A partir de aquí se puede calcular directamente la transformada inversa, tomando como ROC la intersección de las ROC de $X(s)$ y $H(s)$: $\Re\{s\} > -4\pi$.

$$y(t) = \pi\left[1 - (1 + 4\pi)e^{-4\pi(t+1)}\right] - \pi\left[1 - (1 - 8\pi)e^{-4\pi(t-2)}\right]u(t-2)$$