Sistemas Lineales

Examen de Junio 2007. Soluciones

1. **(1 pt.)** (Similar al problema 5-(c) de la hoja de ejercicios del Tema 5). La transformada inversa viene dada por:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\Omega/3}e^{j\Omega n}d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega(n-1/3)}d\Omega \\ &= \frac{e^{j\pi(n-1/3)}-e^{-j\pi(n-1/3)}}{2\pi j(n-1/3)} \\ &= \frac{\sin(\pi(n-1/3))}{\pi(n-1/3)} = \mathrm{sinc}(n-1/3) \end{aligned}$$

Nótese que en este caso no se puede hacer por las tablas, ya que la expresión que allí aparece es

$$\delta[n-n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\Omega/n_0}$$

donde n_0 ha de ser un número entero para que tenga sentido (y 1/3 no es un número entero). No es correcto por lo tanto plantear que $x[n] = \delta[n-1/3]$, ya que esta función no está definida para el caso discreto.

En segundo lugar se pregunta si $X(\Omega)$ es periódica. Por definición, la transformada de Fourier de una señal de tiempo discreto es siempre periódica de periodo 2π.

Algunos comentarios:

- No es correcto razonar que $X(\Omega)$ es periódica por ser una exponencial compleja. Seguiría siendo periódica si fuese cualquier otra señal.
- Se pregunta si $X(\Omega)$ es periódica, no si $x[n]$ es periódica.

2. **(1 pt.)** (Similar al problema 3-(i) de la hoja de ejercicios del Tema 3, pero esta vez para el caso continuo). El problema es simplemente una convolución:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)*h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-2\tau}h(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{0} e^{4\tau}h(t-\tau)d\tau \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} e^{4\tau}d\tau - \int_{t}^{0} e^{4\tau}d\tau - \int_{0}^{\infty} e^{-2\tau}d\tau & t<0 \\ \int_{-\infty}^{0} e^{4\tau}d\tau + \int_{0}^{t} e^{-2\tau}d\tau - \int_{t}^{\infty} e^{-2\tau}d\tau & t\geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{4t}-\frac{3}{4} & t<0 \\ \frac{3}{4}-e^{-2t} & t\geq 0 \end{cases} \\ &= \left(\frac{1}{2}e^{4t}-\frac{3}{4}\right)u(-t) + \left(\frac{3}{4}-e^{-2t}\right)u(t) \end{aligned}$$

3. **(1 pt.)** Lo demostraremos utilizando las propiedades de la Transformada de Fourier. Una señal es par si cumple que

$$x[n] = x[-n]$$

y es real si cumple que

$$x[n] = x^*[n]$$

Si hacemos la TF de las dos expresiones

$$\begin{aligned} x[n] = x[-n] \quad &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(\Omega) = X(-\Omega) \\ x[n] = x^*[n] \quad &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X(\Omega) = X^*(-\Omega) \end{aligned}$$

Por la primera de las expresiones vemos que la señal es par (lo que queríamos demostrar). Además se cumple que

$$X(\Omega) = X(-\Omega) = X^*(-\Omega)$$

es decir que $X(-\Omega) = X^*(-\Omega)$. Como la señal es par y $X(\Omega) = X(-\Omega)$, puedo escribir

$$X(\Omega) = X^*(\Omega)$$

con lo que queda demostrado que la señal es real.

4. **(2.3 pt.)** (Similar al problema 3-(f) de la hoja de ejercicios del Tema 4). El problema estudia las series de Fourier.

   (a) La señal en un periodo puede definirse como

   $$x_a(t) = 1 - t \quad 0 < t \leq 2$$

   La transformada de Fourier de una señal real puede escribirse como

   $$x(t) = c_0 + 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\frac{2\pi}{T}t) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\frac{2\pi}{T}t)\right)$$

   donde a_k es la parte real de los coeficientes de la SF c_k, y b_k es la parte imaginaria. De aquí, se puede deducir que $A_0 = c_0$, $A_k = -2\mathcal{I}\{c_k\}$ y $B_k = 2\mathcal{R}\{c_k\}$. Los coeficientes de la serie de Fourier vienen dados por

   $$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}t}dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 (1-t)e^{-jk\pi t}dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-jk\pi t}}{-jk\pi}\right]_0^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-jk\pi t}}{-jk\pi}t - \frac{e^{-jk\pi t}}{(-jk\pi)^2}\right]_0^2 \\ &= \frac{e^{-jk2\pi}}{jk\pi} = \frac{1}{jk\pi} = \frac{-j}{k\pi} \quad k \neq 0 \end{aligned}$$

Dado que es una señal imaginaria pura, de aquí deducimos que

$$B_k = 0, \quad A_k = \frac{2}{k\pi}$$

Y por último calculamos c_0

$$A_0 = c_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 (1-t)dt = 0$$

Los coeficientes podrían haberse calculado usando la transformada de Fourier de la señal aperiódica, con lo que estaría resuelto también el apartado siguiente.

(b) La transformada de Fourier de la señal aperiódica puede hacerse de varias formas. la primera de ellas es usando la integral (que es muy similar a la del apartado anterior):

$$\begin{aligned} X_a(\omega) &= \int_0^2 (1-t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{e^{-j\omega 2}+1}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega 2}-1}{(j\omega)^2} \\ &= e^{-j\omega}\frac{2\cos(\omega)}{j\omega} - e^{-j\omega}\frac{2\sin(\omega)}{j\omega^2} \end{aligned}$$

La solución podría obtenerse también a partir de la derivada de $x(t)$ aplicando propiedades.

(c) La transformada de Fourier de una señal periódica se define a partir de los coeficientes de su serie de Fourier como

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 X_a(k\omega_0)\delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

siendo c_k los coeficientes obtenido en el apartado (a) y $X_a(\omega)$ la transformada de Fourier del apartado (b). Ha de sustituirse ω_0 por su valor, $\omega_0 = \pi$.

5. **(2.1 pt.)** Problema de transformada Z.

(a) Para calcular la respuesta al impulso, $h[n]$, debemos hacer la transformada inversa. Para ello primero hacemos una expansión en fracciones simples:

$$H(z) = \frac{1}{1-4z^{-1}} - \frac{1}{1-3z^{-1}}$$

Dado que nos indican que el sistema es **estable**, la ROC ha de contener el círculo unidad. $H(z)$ tiene un polo en 4 y uno en 3, por lo que la región de convergencia ha de ser $|z| < 3$. Tomando esta opción en la tablas, la transformada inversa será

$$h[n] = -4^n u[-n-1] + 3^n u[-n-1]$$

(b) Por ser estable, el sistema va a tener TF. La transformada de Fourier la podemos calcular a partir de la transformada z, sin más que hacer que $z = e^{j\Omega}$:

$$H(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega}}{1 - 7e^{-j\Omega} + 12e^{-2j\Omega}}$$

(c) La señal de entrada se puede escribir como

$$x[n] = \left(4^{1/2}e^{-j/(7\pi)}\right)^n = Z_0^n$$

con lo que es una autofunción de los sistemas LTI. EL valor a la salida será

$$y[n] = H(Z_0)Z_0^n = \frac{\left(4^{1/2}e^{-j/(7\pi)}\right)^{-1}}{1 - 7\left(4^{1/2}e^{-j/(7\pi)}\right)^{-1} + 12\left(4^{1/2}e^{-j/(7\pi)}\right)^{-2}}\left(4^{1/2}e^{-j/(7\pi)}\right)^n$$

Tenga en cuenta que $x[n]$ NO tiene transformada de Fourier, por lo que el problema no se puede resolver aplicando Fourier.

6. **(2.6 pt.)**

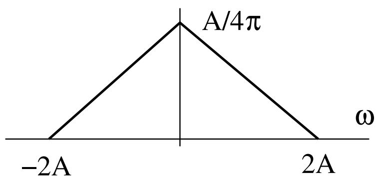
(a) Dado que la señal en tiempo es $x_M(t) = x^2(t)$, en frecuencia será

$$X_M(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * X(\omega)$$

La transformada de Fourier de $x(t)$ se puede calcular directamente con las tablas, y va a ser un pulso cuadrado:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1/2 & |\omega| \leq A \\ 0 & |\omega| > A \end{cases}$$

La convolución de dos pulsos cuadrados será un pulso triangular, con lo que $X_M(\omega)$ será



(b) Sin más que hacer la transformada inversa:

$$x_2(t) = x(t) + \frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$$

Y separando parte real e imaginaria (teniendo en cuenta que $x(t)$ es real)

$$x_{R_2}(t) = x(t) + \frac{1}{2\pi}\cos(\omega_0 t)$$

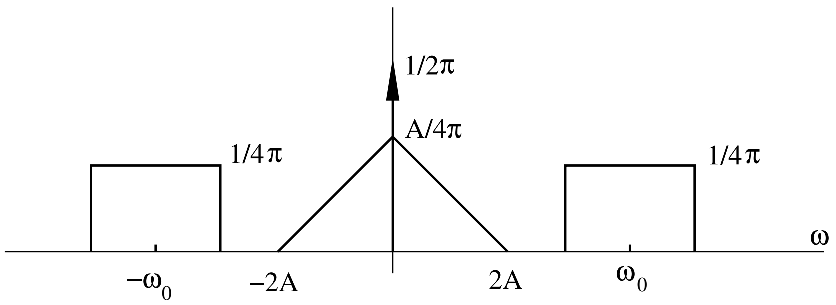
$$x_{I_2}(t) = \frac{1}{2\pi}\sin(\omega_0 t)$$

(c) Calculamos en primer lugar $x_{M_2}(t)$ (teniendo en cuenta que $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$)

$$\begin{aligned}
x_{M_2}(t) &= x_{R_2}(t)^2 + x_{I_2}(t)^2 \\
&= (x(t) + \frac{1}{2\pi}\cos(\omega_0 t))^2 + (\frac{1}{2\pi}\sin(\omega_0 t))^2 \\
&= x^2(t) + \left(\frac{\cos(\omega_0 t)}{2\pi}\right)^2 + \frac{2x(t)\cos(\omega_0 t)}{2\pi} + \left(\frac{\sin(\omega_0 t)}{2\pi}\right)^2 \\
&= x^2(t) + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 + \frac{x(t)\cos(\omega_0 t)}{\pi}
\end{aligned}$$

y su transformada de Fourier será

$$\begin{aligned}
X_{M_2}(\omega) &= X_M(\omega) + \frac{1}{2\pi}\delta(\omega) + \frac{1}{2\pi}X(\omega) * [\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] \\
&= X_M(\omega) + \frac{1}{2\pi}\delta(\omega) + \frac{1}{2\pi}X(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2\pi}X(\omega+\omega_0)
\end{aligned}$$



(d) Para poder recuperar la señal se tiene que cumplir que la parte correspondiente a $X_M(\omega)$ no se solape con la parte de $X(\omega - \omega_0)$, es decir

$$2A < \omega_0 - A \implies \omega_0 > 3A$$