Sistemas Lineales

Examen de Junio de 2008. Soluciones

1. **Sea la señal $x(t)$ con transformada de Fourier $X(\omega) = A^2 - \omega^2$, siendo A un número real positivo.**

   (a) Sin calcular la transformada inversa, indique si la señal $x(t)$ cumple alguna de las siguientes propiedades: par, impar, real pura, imaginaria pura, hermítica, antihermítica o periódica.

   (b) Calcule la salida $y(t)$ cuando la entrada $x(t)$ se pasa por un filtro pasobajo con frecuencia de corte $\omega_c = A$ y ganancia unitaria.

   (a) **(1 punto)** A partir de las relaciones de la señal $X(\omega)$ se pueden deducir de forma inmediata las de $x(t)$. De las tablas

$$\begin{aligned} X(\omega) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t) \\ X(-\omega) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(-t) \\ X^*(\omega) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x^*(-t) \end{aligned}$$

   Dado que la señal $X(\omega)$ es par y real, de aquí deducimos que

$$\begin{aligned} X(\omega) = X(-\omega) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t) = x(-t) \text{ (Par)} \\ X(\omega) = X^*(\omega) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t) = x^*(-t) \text{ (Hermítica)} \end{aligned}$$

   y de ambas se puede decucir que

$$x(t) = x^*(t) \text{ (Real)}$$

   Para que la señal $x(t)$ fuera periódica, su TF debería ser un tren de deltas. Dado que no es así, la señal no es periódica.

   (b) **(1 punto)** El segundo apartado se puede hacer de dos formas. Mi recomendación es hacerlo usando propiedades, aunque también se puede integrar (que es más laborioso y puede dar lugar a más errores).

   El filtro $H(\omega)$ se puede definir como

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq A \\ 0 & |\omega| > A \end{cases}$$

   Por lo que

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \begin{cases} A^2 - \omega^2 & |\omega| \leq A \\ 0 & |\omega| > A \end{cases}$$

   Es fácil ver que esto es simplemente

$$Y(\omega) = A^2 H(\omega) - \omega^2 H(\omega)$$

   Se puede resolver directamente por tablas y propiedades. Si usamos la propiedad de derivación:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(\omega) \\ \frac{d^2}{dt^2}x(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} -\omega^2 X(\omega) \end{aligned}$$

De aquí deducimos que

$$y(t) = A^2 h(t) + \frac{d^2}{dt^2} h(t)$$

siendo $h(t) = \frac{\sin At}{\pi t}$. Haciendo la derivada y simplificando

$$y(y) = \frac{2\sin At}{\pi t^3} - \frac{2A\cos At}{\pi t^2}.$$

Podemos llegar a la misma solución haciendo la integral de la transformada inversa:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} (A^2 - \omega^2) e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{A^2}{jt} e^{j\omega t} - \frac{e^{j\omega t}}{jt}\left(\omega^2 - \frac{2\omega}{jt} + \frac{2}{(jt)^2}\right)\right]_{-A}^{A} \\
&= \frac{2\sin At}{\pi t^3} - \frac{2A\cos At}{\pi t^2}.
\end{aligned}$$

2. Considere un sistema LTI cuya entrada está relacionada con la salida a través de la ecuación

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 4) d\tau$$

(a) ¿Cuál será la respuesta al impulso $h(t)$?

(b) Calcula la salida del sistema cuando la entrada es la señal periódica $x(t)$, de la que un periodo se define

$$x(t) = \begin{cases} \sin\frac{\pi}{3}t & 0 \leq t < 3 \\ 0 & 3 \leq t < 4 \end{cases}$$

(c) Dibuje la transformada de Fourier de $x(t)$ para $|\omega| \leq \pi$.

(a) **(0.75 puntos)** Para la primera parte hay que tener en cuenta la definición de respuesta al impulso. La respuesta al impulso es la salida de un sistema cuando la entrada es una $\delta(t)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} \delta(\tau - 4) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-4)} \delta(\tau - 4) d\tau \\
&= e^{-(t-4)} \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - 4) d\tau \\
&= e^{-(t-4)} u(t-4)
\end{aligned}$$

(b) **(1 punto)** Hay que tener en cuenta que $x(t)$ es una señal periódica, y que por lo tanto se va a poder expresar como serie de Fourier. A la entrada tendremos una serie de Fourier con $T = 4$ de la forma

$$x(t) = \sum_k c_k e^{jk\frac{2\pi}{4}t}$$

Dado que es una combinación lineal de exponenciales (autofunciones) a la salida tendré

$$y(t) = \sum_k c_k H\left(k\frac{2\pi}{4}t\right) e^{jk\frac{2\pi}{4}t}$$

Siendo $H(\omega)$ la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema. Nótese que esto viene de que la respuesta de un sistema LTI a una exponencial de la forma $e^{j\omega_k t}$ es $H(\omega_k)e^{j\omega_k t}$. En este caso

$$H(\omega) = \frac{e^{-j4\omega}}{1+j\omega}$$

Queda entonces calcular los coeficientes de la serie, los c_k.

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{4}\int_0^3 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) e^{-jk\frac{2\pi}{4}t}dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^3 \frac{e^{j\frac{\pi}{3}t} - e^{-j\frac{\pi}{3}t}}{2j} e^{-jk\frac{2\pi}{4}t}dt \\ &= \frac{1}{12\pi}\frac{1+e^{-jk\frac{3\pi}{2}}}{\frac{1}{9}-\frac{k^2}{4}} \\ &= \frac{1}{12\pi}\frac{1+j^k}{\frac{1}{9}-\frac{k^2}{4}} \end{aligned}$$

De aquí la salida será

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_k c_k H\left(k\frac{2\pi}{4}t\right) e^{jk\frac{2\pi}{4}t} \\ &= \sum_k c_k \frac{1}{1+jk\frac{\pi}{2}} e^{jk\frac{\pi}{2}t} \end{aligned}$$

(c) **(0.75 puntos)** En este caso hay que tener en cuenta que la transformada de Fourier de una señal periódica se construye a partir de su serie de Fourier. Para $x(t)$

$$X(\omega) = \sum_k 2\pi c_k \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{2}\right)$$

siendo c_k los coeficientes de la serie de Fourier obtenidos en el apartado anterior. Al representar la transformada de Fourier entre $-\pi$ y π aparecen 3 deltas, una en cero de área $2\pi c_0$, otra en $\omega = \pi/2$ de área $2\pi c_1$ y otra en $\omega = -\pi/2$ de área $2\pi c_{-1}$. Las deltas en π y $-\pi$ se anulan debido a que $c_2 = c_{-2} = 0$.

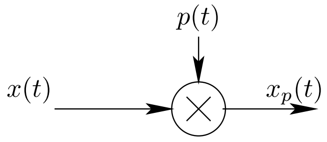
NOTA: en ningún caso la transformada de Fourier se reduce a la transformada de un seno tal y como viene en las tablas. Nótese que la función periódica no es una función seno sin más.

3. En la figura (a), se muestra el esquema de muestreo "de tiempo finito", en el que la señal de muestreo, $p(t)$, es la mostrada en la figura (b). A dicho sistema se le introduce una señal $x(t)$, como la mostrada en la figura (c), cuyo espectro (real) supongamos que es el de la figura (d).

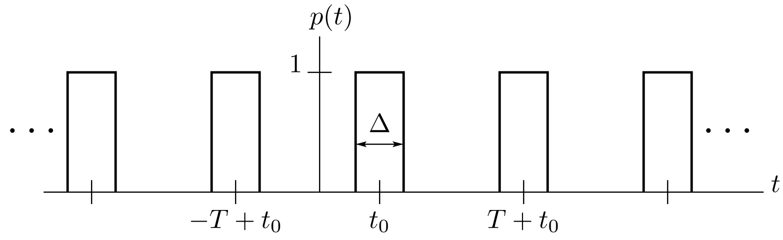
(a) Represente la señal $x_p(t)$.

(b) Obtenga la transformada de Fourier de la señal $p(t)$.

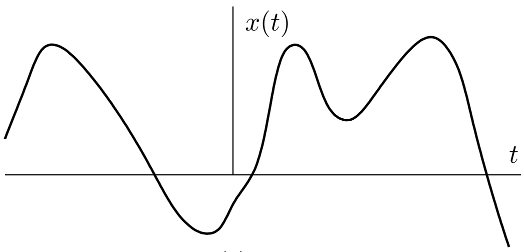
Para $\Delta = \frac{T}{8}$ y $t_0 = \frac{T}{4}$,



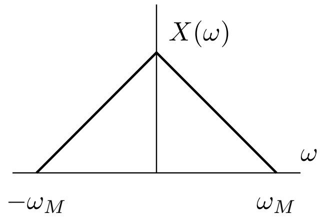
(a)



(b)



(c)



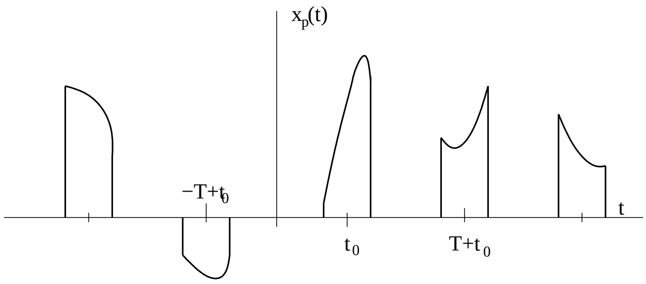
(d)

(c) Obtenga y represente $P(\omega)$ y $X_p(\omega)$.

(d) Indique el máximo periodo de muestreo, T, para que la señal $x(t)$ se pueda recuperar a partir de la señal muestreada $x_p(t)$.

(e) Diseñe un sistema que permita recuperar la señal a partir de la señal muestreada.

(a) **(0.5 puntos)** La señal $x_p(t)$ será simplemente el producto de las señales $x(t)$ y $p(t)$:



(b) **(0.75 puntos)** La señal $p(t)$ es un tren de pulsos cuadrados de anchura Δ y periodo T desplazado una cantidad t_0. Si llamamos $p_1(t)$ a un tren de pulsos centrado en el origen, tenemos que

$$p(t) = p_1(t - t_0)$$

Al ser $p_1(t)$ una señal periódica, su transformada de Fourier se tiene que calcular a partir de su serie de Fourier. De todos modos, la transformada viene en las tablas, así que directamente

$$P_1(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin k\frac{2\pi}{T}\frac{\Delta}{2}}{k}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

Y de aquí

$$\begin{aligned} P(\omega) &= P_1(\omega)e^{-j\omega t_0} \\ &= e^{-j\omega t_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin k\frac{2\pi}{T}\frac{\Delta}{2}}{k}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin k\frac{2\pi}{T}\frac{\Delta}{2}}{k} e^{-j\omega t_0}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin k\frac{2\pi}{T}\frac{\Delta}{2}}{k} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t_0}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) \\
&= \frac{2\pi\Delta}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(k\frac{\Delta}{T}\right) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t_0}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)
\end{aligned}
$$

(c) **(0.75 puntos)** Para los valores dados

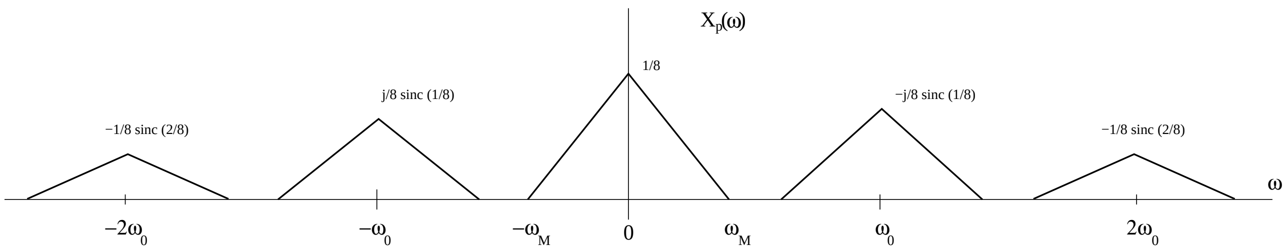
$$
\begin{aligned}
P(\omega) &= \frac{2\pi}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{k}{8}\right) e^{-jk\frac{\pi}{2}}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) \\
&= \frac{2\pi}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{k}{8}\right) (-j)^k\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)
\end{aligned}
$$

Que consiste en una serie de deltas cuya envolvente sigue una sinc, con ceros en $8\omega_0$, $16\omega_0$, etc. Puede verse su representación en

`http://www.lpi.tel.uva.es/lpi/dld/sl/correccion_feb2007.pdf`

La señal $X_p(\omega)$ será

$$
\begin{aligned}
X_p(\omega) &= \frac{1}{2\pi}X(\omega) * P(\omega) \\
&= \frac{1}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{k}{8}\right) (-j)^k X(\omega) * \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) \\
&= \frac{1}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{k}{8}\right) (-j)^k X\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)
\end{aligned}
$$



(d) **(0.5 puntos)** El problema se puede ver dede dos puntos de vista. El primero (el más sencillo), considerando que para que no haya aliasing la replica en el origen y la réplica en ω_0 no deben tocarse. Para ello

$$\omega_0 - \omega_M > \omega_M$$

de donde

$$T < \frac{\pi}{\omega_M}$$

Hay otra posible solución que nos lleva a un periodo mayor. SI consideramos que $X(\omega)$ es real (tal y como se muestra en la figura), en $X_p(\omega)$ la réplica en el origen va a ser siempre real, la réplica en ω_0 estará multiplicada por j (será imaginaria) y la de $2\omega_o$ será real de nuevo. Si para recuperar la señal eliminamos la parte imaginaria, podemos considerar que

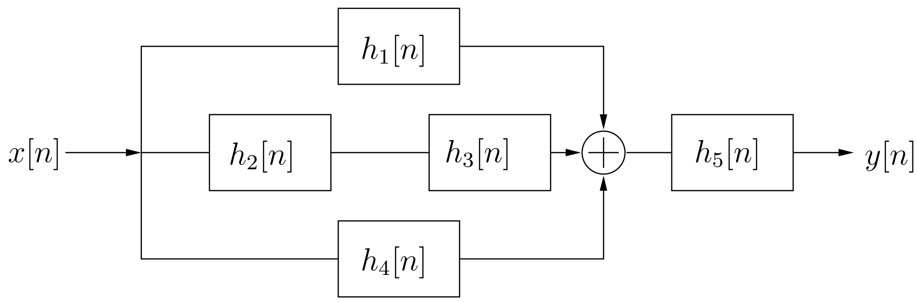
$$2\omega_0 - \omega_M > \omega_M$$

y de aquí

$$T < \frac{2\pi}{\omega_M}$$

(e) **(0.5 puntos)** Para recuperar la señal usando el primer método del apartado anterior basta con un filtro pasobajo de frecuencia de corte $\omega_0/2$ y ganancia 8. Para el segundo caso habría que tomar la parte real de $X_p(\omega)$ antes de filtrar.

4. Sea el sistema de la figura



con $h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$**,** $h_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$**,** $h_3[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$**,** $h_4[n] = \delta[n]$ **y** $h_5[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$**.**

(a) Determine si el sistema así descrito es causal y/o estable.

(b) Calcule su función de transferencia y su respuesta al impulso.

(a) **(1 punto)** La mejor manera de hacer este ejrcicio es emplear las propiedades de la Transformada Z. El sistema de la figura se define como

$$h[n] = (h_1[n] + h_2[n] * h_3[n] + h_4[n]) * h_5[n]$$

Su transformada Z será

$$H(z) = [H_1(z) + H_2(z)H_3(z) + H_4(z)]\, H_5(z)$$

con

$$\begin{array}{rcl} H_1(z) = & \frac{1}{1-1/2z^{-1}} & |z| > 1/2 \\ H_2(z) = & \frac{1}{1-1/2z^{-1}} & |z| > 1/2 \\ H_3(z) = & \frac{1}{1-1/3z^{-1}} & |z| > 1/3 \\ H_4(z) = & 1 & \forall |z| \\ H_5(z) = & \frac{1}{1-1/5z^{-1}} & |z| > 1/5 \end{array}$$

De acuerdo con las propiedades de las ROC, si sumamos o convolucionamos distintas señales, la ROC resultante será por lo menos la intersección de las refiones. Por lo tanto, podemos decir que la ROC de $H(z)$ es por lo menos $|z| > 1/2$. Dado que hay una convergencia hacia el exterior, está contenido el infinito y el círculo unidad, el sistema resultante será causal y estable.

(b) **(1.5 puntos)** La función de transferencia del sistema será

$$H(z) = \left(\frac{1}{1 - 1/2z^{-1}} + \frac{1}{1 - 1/2z^{-1}}\frac{1}{1 - 1/3z^{-1}} + 1\right)\frac{1}{1 - 1/5z^{-1}}$$

con ROC $|z| > 1/2$. Si operamos

$$H(z) = \frac{20/3}{1 - 1/2z^{-1}} + \frac{4/3}{1 - 1/5z^{-1}} - \frac{5}{1 - 1/3z^{-1}}$$

La respuesta al impulso será

$$h[n] = \frac{20}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] - 5\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$