Sistemas Lineales

Examen de Junio 2012. SOluciones

1. **Considere la señal $x(t) = |\sin(\pi t)|$**

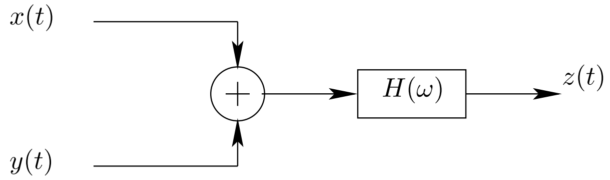
   (a) Obtenga su transformada de Fourier, $X(\omega)$, y represéntela para $|\omega| \leq 7\pi$.

   (b) Calcule la potencia y la energía de $x(t)$.

   (c) Considere el sistema de la figura inferior, donde la transformada de Fourier de la respuesta al impulso $h(t)$ es:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 5\pi \\ 0, & |\omega| > 5\pi \end{cases}$$

   Determine la salida del sistema, $z(t)$, siendo $y(t) = \frac{4}{3\pi}\cos(2\pi t)$.



(a) La señal $x(t) = |\sin(\pi t)|$, por ser un seno rectificado, será una señal periódica de periodo $T = 1$ (Nótese que $\sin(\pi t)$ sería de periodo 2). De este modo, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$. Así pues, para hallar su transformada de Fourier necesitamos previamente encontrar su expresión en serie de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk2\pi t}$$

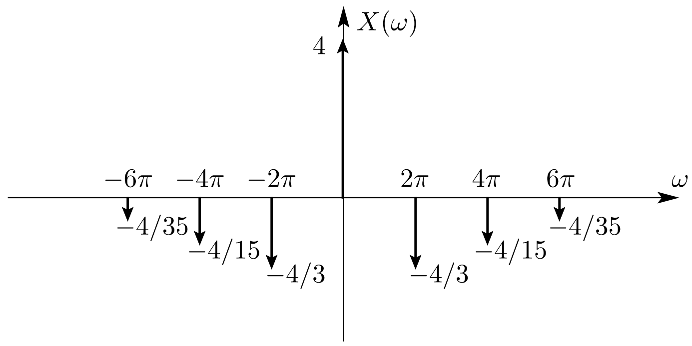
Los coeficientes de la serie de Fourier serán:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt = \int_0^1 \sin(\pi t)e^{-j2\pi t}dt = \int_0^1 \frac{e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}}{2j}e^{-j2\pi t}dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{jt(\pi - k2\pi)} - e^{-jt(\pi+k2\pi}}{2j}dt = \frac{2}{\pi - k^2 4\pi} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Una vez que tenemos una expresión general para los coeficientes de Fourier, podemos obtener la transformada de Fourier que, para una señal periódica, está relacionada con sus coeficientes:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4}{1 - k^2 4}\delta(\omega - k2\pi)$$

La transformada de Fourier resultante para $|\omega| \leq 7\pi$ quedará:



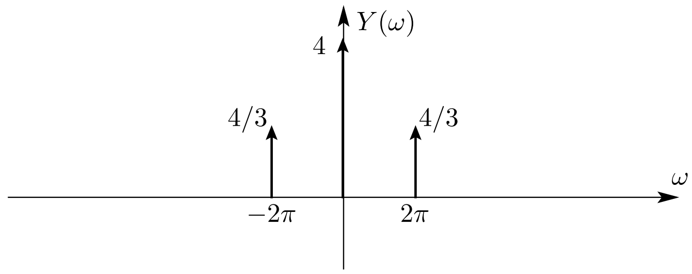
(b) Por ser una señal periódica, va a tratarse de una señal de potencia, por lo que tiene energía infinita. La potencia la calculamos:

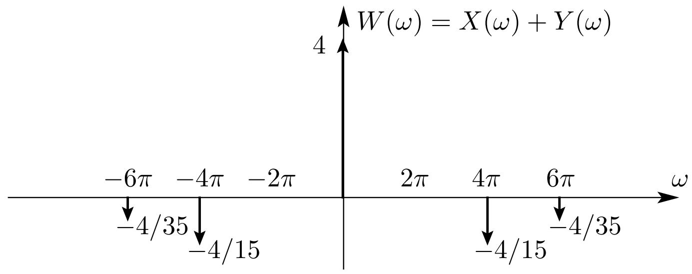
$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T}\int_{<T>} |x(t)|^2 dt = \int_0^1 |\sin(\pi t)|^2 dt \\
&= \int_0^1 (\sin(\pi t))^2 dt = \int_0^1 \left(\frac{e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}}{2j}\right)^2 dt \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(c) Según el sistema propuesto en el enunciado, hemos de sumar una nueva señal a la señal anterior, y a continuación aplicar al resultado un sistema cuya respuesta al impulso conocemos, en frecuencia. Podemos operar entonces en frecuencia, y comenzamos por calcular la transformada de Fourier de la nueva señal, $y(t)$:

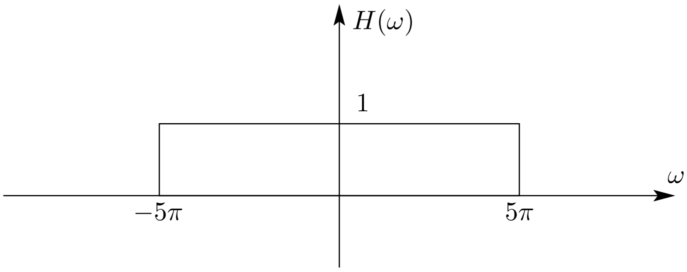
$$
y(t) = \frac{4}{3\pi}\cos(2\pi t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(\omega) = \frac{4}{3\pi}\pi\left[\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)\right]
$$

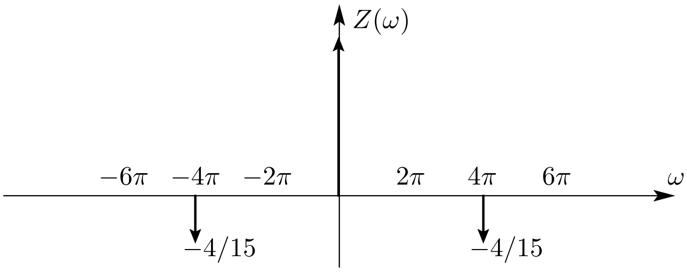
Si llamamos $w(t) = x(t) + y(t)$, dibujamos a continuación los espectros de las señales $y(t)$ y $w(t)$.





Finalmente, al pasar por el filtro paso bajo con respuesta al impulso, en frecuencia, $H(\omega)$, sólo permanecen en la señal resultante, $Z(\omega)$, las componentes con frecuencia $|\omega| \leq 5\pi$, como se ve en la Figura 4.





Para calcular $z(t)$, sólo necesitamos calcular la transformada de Fourier inversa de la señal $Z(\omega)$:

$$Z(\omega) = 4\delta(\omega) - \frac{4}{15}\left[\delta(\omega - 4\pi) + \delta(\omega + 4\pi)\right] \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} z(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{15\pi}\cos(4\pi t)$$

2. **Responda a las siguientes cuestiones:**

   (a) **Sea un sistema en tiempo continuo cuya salida $y(t)$ se obtiene a partir de la entrada $x(t)$ mediante la siguiente fórmula integral:**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{6\exp(-\tau^2 + \pi\tau + \pi t)\sqrt{\frac{1/4}{1+(t-\tau)^2}}}{\exp(\pi(t-\tau)) + \exp(\pi t - \tau) + \exp(\pi(t - \pi\tau))} x(\tau)d\tau.$$

   Calcule la respuesta al impulso, $h(t)$, de dicho sistema.
   Por definición, la respuesta al impulso de un sistema es la salida de éste cuando su entrada es el impulso unitario (delta de Dirac). Por tanto:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{t} \frac{6\exp(-\tau^2 + \pi\tau + \pi t)\sqrt{\frac{1/4}{1+(t-\tau)^2}}}{\exp(\pi(t-\tau)) + \exp(\pi t - \tau) + \exp(\pi(t - \pi\tau))} \delta(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} \frac{6\exp(-0 + \pi\cdot 0 + \pi t)\sqrt{\frac{1/4}{1+(t-0)^2}}}{\exp(\pi(t-0)) + \exp(\pi t - 0) + \exp(\pi(t - \pi\cdot 0))} \delta(\tau)d\tau \\ &= \sqrt{\frac{1}{1+t^2}} \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \sqrt{\frac{1}{1+t^2}} u(t). \end{aligned}$$

   (b) **Calcule la transformada inversa de Fourier de tiempo discreto de la señal**

$$X(\Omega) = e^{-j\frac{\Omega}{3}} \qquad -\pi \le \Omega < \pi$$

   ¿Es $X(\Omega)$ una señal periódica? Justifique la respuesta. La transformada inversa viene dada por:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\Omega/3} e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega(n-1/3)} d\Omega \\
&= \frac{e^{j\pi(n-1/3)} - e^{-j\pi(n-1/3)}}{2\pi j(n-1/3)} \\
&= \frac{\sin(\pi(n-1/3))}{\pi(n-1/3)} = \mathrm{sinc}(n-1/3)
\end{aligned}
$$

Nótese que en este caso no se puede hacer por las tablas, ya que la expresión que allí aparece es

$$\delta[n-n_0] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega/n_0}$$

donde n_0 ha de ser un número entero para que tenga sentido (y 1/3 no es un número entero). No es correcto por lo tanto plantear que $x[n] = \delta[n-1/3]$, ya que esta función no está definida para el caso discreto.

En segundo lugar se pregunta si $X(\Omega)$ es periódica. Por definición, la transformada de Fourier de una señal de tiempo discreto es siempre periódica de periodo 2π.

(c) **Calcule la transformada inversa de Fourier de tiempo continuo de la señal**

$$X(\omega) = \left[\mathrm{sinc}\left(\omega\frac{A}{\pi}\right)\right]^2$$

Si definimos

$$X_1(\omega) = \mathrm{sinc}\left(\omega\frac{A}{\pi}\right)$$

la transformada inversa de $X(\omega)$ será $x(t) = x_1(t) * x_1(t)$. Dado que

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

podemos escribir

$$X_1(\omega) = \frac{1}{2A}\frac{2\sin(A\omega)}{\omega} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2A} & |t| \le A \\ 0 & |t| > A \end{cases}$$

La convolución de dos pulsos rectangulares será un pulso triangular de anchura doble y altura el valor de la convolución en el origen:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < -2A; \\ \frac{2A+t}{4A^2}, & -2A \le t < 0; \\ \frac{2A-t}{4A^2}, & 0 \le t < 2A; \\ 0, & t \ge 2A. \end{cases}$$

Nótese que el valor en el origen es $\frac{1}{2A}$.

3. **Sea un sistema estable cuya función de transferencia es**

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}}$$

(a) **Calcule la respuesta al impulso del sistema**

(b) **Justifique si existe o no la transformada de Fourier de la respuesta al impulso, y en caso de existir calcúlela.**

(c) Calcule la salida del sistema cuando la entrada es

$$x[n] = 4^{n/2} e^{-j\frac{1}{7\pi}n}$$

(a) Para calcular la respuesta al impulso, $h[n]$, debemos hacer la transformada inversa. Para ello primero hacemos una expansión en fracciones simples:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 4z^{-1}} - \frac{1}{1 - 3z^{-1}}$$

Dado que nos indican que el sistema es **estable**, la ROC ha de contener el círculo unidad. $H(z)$ tiene un polo en 4 y uno en 3, por lo que la región de convergencia ha de ser $|z| < 3$. Tomando esta opción en la tablas, la transformada inversa será

$$h[n] = -4^n u[-n-1] + 3^n u[-n-1]$$

(b) Por ser estable, el sistema va a tener TF. La transformada de Fourier la podemos calcular a partir de la transformada Z, sin más que hacer que $z = e^{j\Omega}$:

$$H(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega}}{1 - 7e^{-j\Omega} + 12e^{-2j\Omega}}$$

(c) La señal de entrada se puede escribir como

$$x[n] = \left(4^{1/2} e^{-j/(7\pi)}\right)^n = Z_0^n$$

con lo que es una autofunción de los sistemas LTI. EL valor a la salida será

$$y[n] = H(Z_0) Z_0^n = \frac{\left(4^{1/2} e^{-j/(7\pi)}\right)^{-1}}{1 - 7\left(4^{1/2} e^{-j/(7\pi)}\right)^{-1} + 12\left(4^{1/2} e^{-j/(7\pi)}\right)^{-2}} \left(4^{1/2} e^{-j/(7\pi)}\right)^n$$

Tenga en cuenta que $x[n]$ no tiene transformada de Fourier, por lo que el problema no se puede resolver aplicando Fourier.

4. **El proceso físico de la perfusión del Gadolíneo en los tejidos puede verse como un sistema LTI causal caracterizado por la siguiente ecuación difencial:**

$$\frac{dc(t)}{dt} = K_T \cdot c_a(t) - K_e \cdot c(t)$$

donde $c_a(t)$ es la señal de entrada (concentración de Gadolíneo en la sangre), $c(t)$ es la señal de salida (concentración de Gadolíneo en un tejido) y K_T y K_e son dos constantes reales positivas (tasas de transferencia sangre-tejido, y tejido-sangre). A partir de la ecuación diferencial se pide:

(a) Calcule la respuesta al impulso del sistema $h(t)$. El sistema así definido ¿Es estable?

(b) Calcule un sistema $h_1(t)$ tal que

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

(c) Argumente si es posible muestrear sin *aliasing* $h(t)$ y $h_1(t)$ de acuerdo con el teorema de Nyquist y, si así fuera, dé el máximo periodo de muestreo para cada una de las respuestas al impulso.

(d) **Se define una versión discreta de la ecuación diferencial:**

$$c[n] - c[n-1] = K_T \cdot c_a[n] - K_e \cdot c[n]$$

Asumiendo que el sistema así definido sigue siendo causal, calcule $h_d[n]$ e indique si existe alguna restricción en los parámetros K_T y K_e para garantizar su estabilidad.

(e) **Calcule el ratio**

$$E_R = \frac{E\{h(t)\}}{E\{h_d[n]\}}$$

donde $E\{h(t)\}$ es la energía de $h(t)$ y $E\{h_d[n]\}$ es la energía de $h_d[n]$. (Asuma estabilidad en los dos sistemas).

(a) Este apartado es recomendable resolverlo aplicando la transformada de Laplace, ya que en el enunciado se nos indica que se trata de un sistema causal, pero no sabemos sí es estable. Dado que la solución va a terminar siendo estable, la salida de Laplace será la misma que la de un análisis de Fourier. (Aunque *a priori* no sabemos si podemos utilizar Fourier.) De todos modos, se ha considerado correcto cualquiera de los dos métodos.

La ecuación diferencial en el dominio de Laplace queda

$$sC(s) = K_T C_a(s) - K_e C(s) \Rightarrow (s + K_e)C(s) = K_T C_a(s) \Rightarrow C(s) = \frac{K_T}{K_e + s} C_a(s).$$

Con lo que la respuesta al impulso del sistema quedará:

$$H(s) = \frac{K_T}{K_e + s}$$

Y converge para $\Re\{s\} > -K_e$. Dado que $K_e > 0$, ele eje $j\omega$ está incluido en la RoC, y por lo tanto el sistema es estable. La transformada inversa es directa a partir de las tablas:

$$h(t) = K_T e^{-K_e t} u(t).$$

El sistema es estable puesto que su respuesta al impulso es absolutamente integrable:

(b) La señal $h_1(t)$ es la respuesta al impulso del sistema inverso de $h(t)$. El sistema inverso en el dominio de Laplace será:

$$H_1(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{K_T}(K_e + s)$$

Y usando las tablas calculamos su transformada inversa:

$$h_1(t) = \frac{K_e}{K_T}\delta(t) + \frac{1}{K_T}\frac{d\delta(t)}{dt}.$$

(c) Ninguna de las dos señales $h(t)$ y $h_1(t)$ son limitadas en banda: ni $H(\omega)$ ni $H_1(\omega)$ se anulan fuera de un rango determinado de valores de ω. Por lo tanto, en ambos casos su frecuencia máxima es infinita, y no es posible muestrear ninguna de ellas sin que se produzca aliasing.

(d) Utilizando transformada Z, la ecuación en diferencias se transforma en:

$$(1 - z^{-1})C(z) = K_T C_a(z) - K_e C(z)$$

y la respuesta al impulso será

$$H_d(z) = \frac{K_T}{1 + K_e - z^{-1}} = \frac{\frac{K_T}{1+K_e}}{1 - \frac{1}{1+K_e} z^{-1}},$$

y de nuevo la función de transferencia es un cociente de polinomios en z con un único polo en $z = \frac{1}{1+K_e}$. Puesto que el sistema es causal, la ROC de $H_d(z)$ será el exterior de la circunferencia $|z| = \frac{1}{1+K_e}$, y la respuesta al impulso será una exponencial a derechas:

$$h_d[n] = \frac{K_T}{1+K_e}\left(\frac{1}{1+K_e}\right)^n u[n].$$

La estabilidad requiere que la ROC de $H_d(z)$ contenga la circunferencia unidad $|z| = 1$. Puesto que la ROC es hacia afuera, necesitamos que $1/(1+Ke) < 1$, lo que implica que $K_e > 0$. Puesto que el enunciado nos dice ya que $K_e > 0$ (**nota:** positivo significa $K_e > 0$, mientras que no-negativo significa $K_e \geq 0$), la estabilidad no requiere ninguna condición adicional.

(e) Ya hemos comprobado que de hecho ambos sistemas son estables para cualquier valor $K_T, K_e > 0$. Calculamos la energía de $h(t)$:

$$E\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} K_T^2 \exp(-2K_e t)dt = \frac{K_T^2}{2K_e},$$

(la integral converge porque $2K_e > 0$). Calculamos la energía de $h_d[n]$:

$$\begin{aligned} E\{h_d[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_d[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_T^2}{(1+K_e)^2}\left(\frac{1}{(1+K_e)^2}\right)^n \\ &= \frac{K_T^2}{(1+K_e)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{(1+K_e)^2}} = \frac{K_T^2}{(1+K_e)^2-1} = \frac{K_T^2}{K_e^2+2K_e}, \end{aligned}$$

(la serie converge porque $K_e > 0 \Rightarrow 1/(1+K_e)^2 < 1$). Y finalmente:

$$E_R = \frac{E\{h(t)\}}{E\{h_d[n]\}} = \frac{\cancel{K_T^2}\ /\ 2K_e}{\cancel{K_T^2}\ /\ (K_e^2+2K_e)} = \frac{K_e^2+2K_e}{2K_e} = 1 + \frac{K_e}{2}.$$