Sistemas Lineales

Examen de Septiembre 2007. Soluciones

1. **Calcule la salida de un sistema descrito mediante la respuesta al impulso** $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n+1]$ **para la entrada** $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$.

   La señal $x[n]$ puede escribirse como

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & n < 0 \end{cases}$$

   o lo que es lo mismo $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]$. La salida del sistema será la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$. Una manera de plantearlo es

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k} u[k] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} u[-k-1] \right] \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} u[n-k+1] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} u[n-k+1] + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} u[n-k+1] \end{aligned}$$

   Para quitar la función $u[n-k+1]$ es necesario dividir el sumatorio en dos intervalos. En primer lugar, para $n < -1$.

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1-2k} \\ &= \frac{16}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1} \end{aligned}$$

   En segundo lugar para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} y_2[n] &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(n + \frac{7}{3}\right) \end{aligned}$$

   Luego

$$y[n] = \begin{cases} \frac{16}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1} & n < -1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(n + \frac{7}{3}\right) & n \geq -1 \end{cases}$$

2. **Cuando la entrada de un sistema es** $x(t)$ **la salida se define como**

$$y(t) = \int_{-1}^{1} \frac{m(3t+1+8\tau)}{(t+\tau/2+6)^{7/\pi}} f(8t^2 + \sqrt{\tau}) x(\tau) d\tau$$

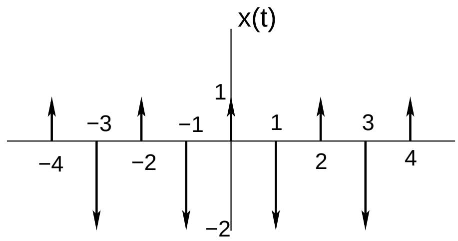
   siendo $m(t)$ **y** $f(t)$ **dos señales reales pares. Calcule la respuesta al impulso del sistema.**

La respuesta al impulso de un sistema se define como la salida de un sistema cuando la entrada es una $\delta(t)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_{-1}^{1} \frac{m(3t+1+8\tau)}{(t+\tau/2+6)^{7/\pi}} f(8t^2+\sqrt{\tau})\delta(\tau)d\tau \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{m(3t+1+0)}{(t+0+6)^{7/\pi}} f(8t^2+\sqrt{0})\delta(\tau)d\tau \\
&= \frac{m(3t+1+)}{(t+6)^{7/\pi}} f(8t^2) \int_{-1}^{1} \delta(\tau)d\tau \\
&= \frac{m(3t+1+)}{(t+6)^{7/\pi}} f(8t^2)
\end{aligned}$$

Nótese que hemos aplicado la propiedad $g(t)\delta(t) = g(0)\delta(t)$. Como en ningún momento se dice que el sistema sea LTI, el problema no se puede resolver tratando de ver la integral como una convolución.

3. **Determine la serie de Fourier de la siguiente señal periódica.**



Es una señal periódica de periodo 2. La serie de Fourier vendrá determinada por sus coeficientes c_k y será de la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\pi t}$$

Los coeficientes vienen dados por

$$c_k = \frac{1}{2}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\pi t}dt$$

Tomamos el periodo de integración alrededor de las deltas, por ejemplo entre $[-0.5,\ 1.5]$.

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2}\int_{-0.5}^{1.5} (\delta(t) - 2\delta(t-1))e^{-jk\pi t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-0.5}^{1.5} \delta(t)e^{-jk\pi t}dt - \int_{-0.5}^{1.5} \delta(t-1)e^{-jk\pi t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-0.5}^{1.5} \delta(t)e^{0}dt - \int_{-0.5}^{1.5} \delta(t-1)e^{-jk\pi}dt \\
&= \frac{1}{2} - e^{-jk\pi} \\
&= \frac{1}{2} - (-1)^k
\end{aligned}$$

4. **Resuelva los siguientes problemas sobre la transformada continua de Fourier:**

(a) **Suponga que** $g(t) = x(t)\cos t$ **y que la transformada de Fourier de** $g(t)$ **es**

$$G(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 2 \\ 0 & |\omega| > 2 \end{cases}$$

Determine $x(t)$**.**

El problema está pensado para hacerse utilizando la propiedad de multiplicación de la transformada de Fourier, aunque hay otras formas.

Definimos la T. Fourier de $g(t)$ como

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \pi(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)) = \frac{1}{2} X(\omega - 1) + X(\omega + 1)$$

A partir de la expresión de $G(\omega)$ es sencillo ver que

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & |\omega| \leq 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$$

con lo que

$$x(t) = \frac{2 \sin t}{\pi t}$$

El problema podría resolverse también usando relaciones trigonométricas. Dado que $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ tenemos que

$$x(t) = \frac{2 \sin t \cos t}{\pi t \cos t} = \frac{2 \sin t}{\pi t}$$

Por otro lado, nótese que la respuesta

$$x(t) = \frac{\sin 2t}{\pi t \cos t}$$

es incompleta, ya que la función $\cos t$ tiene una serie de ceros en $\pi/2 + k\pi$, que hace que la expresión no esté totalmente definida.

(b) **En un sistema LTI se sabe que cuando la entrada es** $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ **la salida es** $y(t) = j\omega_0 \cos(\omega_0 t)$ **para** $|\omega_0| \leq 2\pi 10^3$ **e** $y(t) = 0$ **para** $|\omega_0| > 2\pi 10^3$**. Calcule la respuesta al impulso del sistema.**

EL sistema tiene una errata en el enunciado. La salida debería de ser $y(t) = j\omega_0 \sin(\omega_0 t)$ (para que el sistema sea LTI). De todos modos, el desarrollo es muy similar, y en la corrección y puntuación se ha tenido en cuenta el razonamiento correcto, y no tanto el resultado. (Se ha puntuado al alza).

El problema está planteado para ser resuelto usando autofunciones. La entrada es de la forma

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

Por lo tanto, la salida será

$$y(t) = H(\omega_0) \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + H(-\omega_0) \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

La salida que nos dan es

$$y(t) = j\omega_0 \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + j\omega_0 \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

Por identificación $H(\omega_0) = H(-\omega_0) = j\omega_0$, para $|\omega_0| \leq 2\pi 10^3$. Dado que en el enunciado debería haber un seno, la solución correcta sería $H(\omega_0) = \omega_0$, $H(-\omega_0) = -\omega_0$. Sin embargo, se han dado por buenas todas las soluciones de la forma $H(\omega_0) = j\omega_0$ (o similares).
Al ser autofunciones, no se puede plantear que $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$. Por otro lado, no podemos plantear la división de deltas, al igual que no planteamos nunca la multiplicación de deltas. Por lo tanto, tenemos que

$$H(\omega_0) = \begin{cases} j\omega_0 & |\omega_0| \leq 2\pi 10^3 \\ 0 & |\omega_0| > 2\pi 10^3 \end{cases}$$

de donde es inmediato deducir que

$$H(\omega) = \begin{cases} j\omega & |\omega| \leq 2\pi 10^3 \\ 0 & |\omega| > 2\pi 10^3 \end{cases}$$

lo que es igual a

$$H(\omega) = j\omega \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 2\pi 10^3 \\ 0 & |\omega| > 2\pi 10^3 \end{cases} = j\omega H_1(\omega)$$

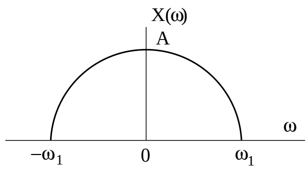
Según las propiedades de la transformada de Fourier $h(t) = \frac{d}{dt}h_1(t)$, siendo $h_1(t)$ la transformada inversa de un pulso cuadrado, con lo que

$$h(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin 2\pi 10^3 t}{\pi t}\right)$$

5. **Al transmitir una señal $x(t)$ por un cierto medio de transmisión, se producen interferencias con otra señal $w(t)$, de modo que la señal que se recibe es:**

$$y(t) = x(t) + w(t) + \frac{1}{2}x(t)w(t)$$

   (a) **Si $w(t) = \sin(\omega_0 t)$ y $x(t)$ es de banda limitada con $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_1$, dibuje la transformada de Fourier de la señal recibida. ¿Qué condiciones deben cumplir ω_0 y ω_1 para que $x(t)$ se pueda recuperar a partir de la señal recibida?**
   $X(\omega)$ es una señal de banda limitada. COmo no nos dicen nada, suponemos una forma arbitraria, y una altura A:



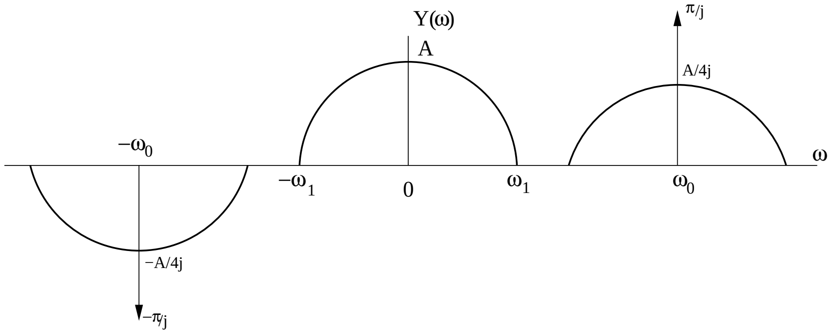
La transformada de $w(t)$ será

$$W(\omega) = \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right]$$

y la transformada de la salida

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega) + W(\omega) + \frac{1}{2\pi}X(\omega) * W(\omega) \\ &= X(\omega) + W(\omega) + \frac{1}{4j}\left(X(\omega - \omega_0) - X(\omega + \omega_0)\right) \\ &= X(\omega) + \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right] + \frac{1}{4j}\left(X(\omega - \omega_0) - X(\omega + \omega_0)\right) \end{aligned}$$

Dibujado queda de la siguiente forma (nótese que en un exceso de notación se ha representado el módulo y la fase en un mismo dibujo, y las "j" aparecen como constantes):



El criterio para que la señal pueda ser recuperada es que la señal original $X(\omega)$ no se solape con ninguna de las réplicas. Esto ocurre si $\omega_0 - \omega_1 > \omega_1$, es decir, si

$$\omega_0 > 2\omega_1$$

(b) **Suponiendo $\omega_0 = 30\pi$ y $\omega_1 = 10\pi$, diseñe un sistema para recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$. Represéntelo en el dominio temporal.**

Para los valores que nos dan, basta con un simple filtro pasobajo de altura 1 y frecuencia de corte entre ω_1 y $\omega_0 - \omega_1$, es decir $\omega_c \in [10\pi, 20\pi]$. En el dominio temporal

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$