Sistemas Lineales

Examen de Septiembre de 2008. Soluciones

1. **Calcule la convolución de la señal $x(t)$ con la respuesta al impulso $h(t)$:**

$$x(t) = e^{-2t}[u(t-1) - u(t-4)],$$

$$h(t) = e^{2t}[u(1-t) - u(-1-t)].$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{e^{2t-4} - e^{-2t-4}}{4} & 0 \le t < 2 \\ \frac{e^{-2t+4} - e^{-2t-4}}{4} & 2 \le t < 3 \\ \frac{e^{-2t+4} - e^{2t-16}}{4} & 3 \le t < 5 \\ 0 & t \ge 5 \end{cases}$$

2. **La propiedad de desplazamiento temporal de una señal discreta nos dice que**

$$X(\Omega)e^{-j\Omega n_0} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x[n-n_0]$$

siendo n_0 un número entero.

(a) Estudie qué ocurre con $x[n]$ si su transformada de Fourier $X(\Omega)$ se multiplica por $e^{-j\Omega r_0}$, siendo ahora r_0 un número real:

$$X(\Omega)e^{-j\Omega r_0} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \quad ?$$

(b) Demuestre que la solución para el caso de n_0 entero es un caso particular de r_0 real.

(a) **(1.5 puntos)**. Se parte de la señal $Y(\Omega) = X(\Omega)e^{-j\Omega r_0} = X(\Omega)H(\Omega)$. Dado que r_0 no es entero no puedo acudir a las tablas. Por lo tanto tengo que hacer la transformada de Fourier usando la integral. De acuerdo con las propiedades

$$X(\Omega)H(\Omega) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x[n] * h[n]$$

Siendo $h[n] = \mathcal{F}^{-1}\{H(\Omega)\}$. Calculamos $h[n]$:

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\Omega r_0} e^{j\Omega n} d\Omega \\ &= \frac{e^{j\pi(n-r_0)} - e^{-j\pi(n-r_0)}}{2\pi j(n-r_0)} \\ &= \mathrm{sinc}(n-r_0) \end{aligned}$$

Luego

$$X(\Omega)e^{-j\Omega r_0} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x[n] * \mathrm{sinc}(n-r_0)$$

Nótese que no son aceptables soluciones del tipo $x[n-r_0]$, ya que en señales discretas sólo está definido un desplazamiento entero.

(b) **(1.5 puntos)**. Si $r_0 = n_0$ es entero, la señal $h[n] = \text{sinc}(n - n_0)$ es una sinc desplazada. La señal $h_2[n] = \text{sinc}(n)$ tiene una muestra de valor uno en el origen y sus ceros coinciden con los enteros distintos de cero. Por lo tanto

$$\text{sinc}(n) = \delta[n]$$

La señal $h[n] = \text{sinc}(n - r_0)$ (sólo si r_0 es entero) será por lo tanto la delta desplazada al punto n_0, $h[n] = \delta[n - n_0]$ y por lo tanto

$$x[n] * \text{sinc}(n - n_0) = x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$$

3. **Estudie las propiedades de memoria, causalidad, invertibilidad, linealidad, estabilidad e invarianza en el tiempo del sistema dado por la relación:**

$$y[n] = \int_{\pi}^{3\pi} e^{j\Omega 11} \left(\frac{\sin(21\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\Omega m} \right) e^{j\Omega n} d\Omega.$$

Nótese que (por definición)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\Omega m} = X(\Omega)$$

De aquí:

$$\begin{aligned}
y[n] &= \int_{\pi}^{3\pi} e^{j\Omega 11} \left(\frac{\sin(21\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \right) X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} \left(2\pi e^{j\Omega 11} \left(\frac{\sin(21\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \right) \right) X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} H(\Omega) X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\
&= \mathcal{F}^{-1}\{H(\Omega) X(\Omega)\}
\end{aligned}$$

Luego $y[n]$ es la transformada de Fourier inversa de un producto. De acuerdo con las propiedades, esto es una convolución:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

siendo $h[n]$ la transformada inversa de

$$H(\Omega) = 2\pi e^{j\Omega 11} \left(\frac{\sin(21\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \right)$$

Si aplicamos las tablas de transformadas y propiedades de la T. de Fourier, vemos que es un pulso cuadrado desplazado:

$$h[n] = \begin{cases} 2\pi & -21 \leq n \leq -1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

A partir de aquí, podemos deducir de manera simple las propiedades, empleando para ellos las propiedades de los LTI:

- Por ser la salida una convolución entre la entrada y una respuesta al impulso, el sistema es LTI, y por lo tanto lineal e invariante.
- El sistema tiene memoria, ya que $h[n] \neq k\delta[n]$.
- Dado que $h[n] = h[n]u[-n - 1]$ el sistema es anticausal.

- El sistema es estable, ya que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 21 \times 2\pi < \infty$$

- El sistema no es invertible, ya que $H(\Omega)$ tiene ceros (los ceros de la sinc) que al hacer $H(\Omega)^{-1}$ darían lugar a polos.

4. **En el siguiente problema se estudiará el efecto de una falta de sincronización en la frecuencia de muestreo al reproducir una señal de audio digital. Para ello, se parte de una señal sonora $x_s(t)$. Para evitar un posible aliasing, la señal se pasa por un filtro pasobajo $h(t)$ con frecuencia de corte $w_c = 2\pi \times 2\ 10^4$ (es decir, 20kHz). La señal resultante $x_f(t)$ es muestreada con un tren de impulsos a la frecuencia de Nyquist $\omega_s = \omega_N$, obteniendo así la señal $x[n]$, que es almacenada en un dispositivo electrónico.**

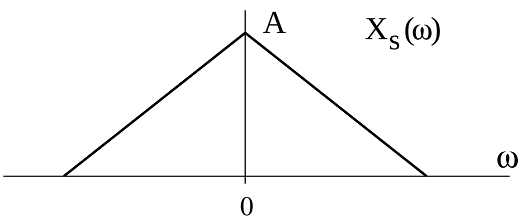
   (a) Dibuje la transformada de Fourier de las señales $x_s(t)$, $x_f(t)$ y $x[n]$. (Etiquete correctamente los ejes).

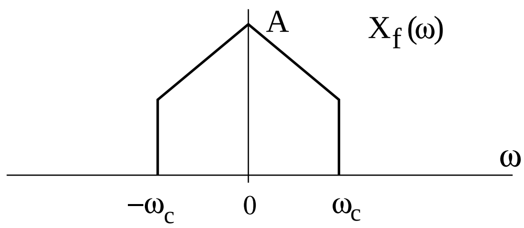
   A la hora de reproducir la señal $x[n]$ almacenada, por un error de sincronización se asume una frecuencia de muestreo $\omega_{s_2} = \omega_s/2$. Esta frecuencia se usará para todo el proceso de interpolación. La señal $x[n]$ se pasa por un conversor de deltas discretas a continuas (usando ω_{s_2}), dando lugar a la señal $x_{p_2}(t)$. A partir de esta señal, mediante un proceso de interpolación, se reconstruye la señal continua $x_{f_2}(t)$.

   (b) Dibuje la transformada de Fourier de la señal muestreada continua $x_{p_2}(t)$ y de la señal reconstruida $x_{f_2}(t)$.

   (c) ¿Qué relación existe entre $x_{f_2}(t)$ y $x_f(t)$?

   (a) **1 punto**. Supongamos que la señal $x_s(t)$ tiene una transformada de Fourier genérica, como la que aparece en la figura inferior. Al pasarla por un filtro pasobajo, la señal queda recortada en frecuencia, tal y como se muestra en la figura, siendo A una altura genérica y $\omega_c = 2\pi \times 2\ 10^4$.





   La señal se muestrea usando un tren de delta a la frecuencia de Nyquist, esto es, al doble de la frecuancia máxima:

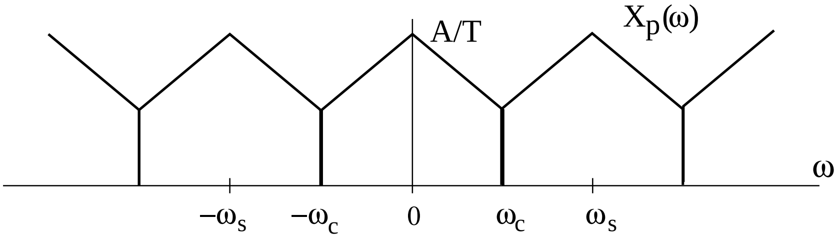
$$\omega_s = \omega_N = 2\omega_c = 8\pi\ 10^4$$

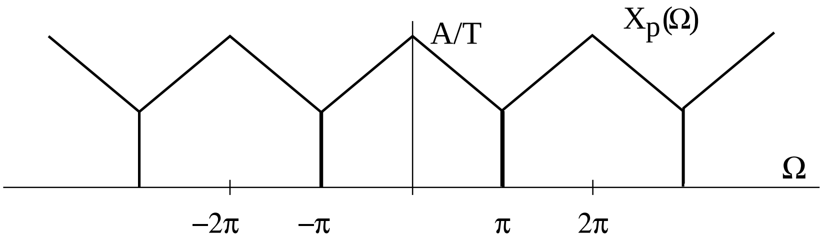
   Al muestrear con un tren de deltas, en frecuencia se duplica la señal en los múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo y se multiplica por $1/T$, siendo T el periodo de muestreo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{8\pi\ 10^4} = \frac{1}{4\pi\ 10^4}$$

   La transformada de Fourier de la señal continua muestreada será la siguiente:

   Se nos pide la TF de la señal discreta $x[n]$, es decir $X(\Omega)$ que será

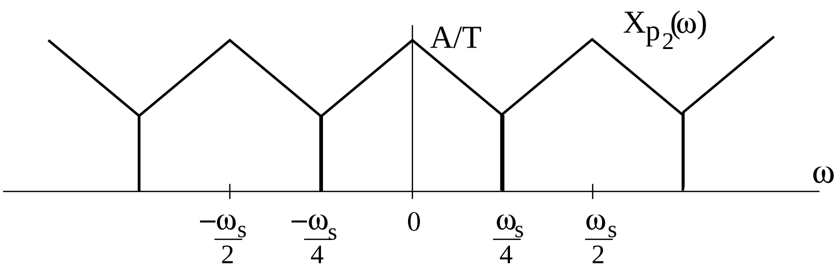




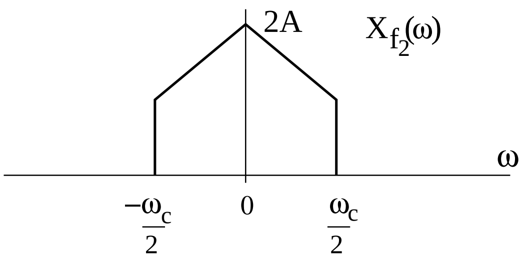
(b) A partir de $X(\Omega)$ el eje Ω se divide por el periodo de muestreo, siendo ahora el periodo

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_{s_2}} = 2T$$

La altura no varía.



Para recuperar la señal la pasamos por un filtro pasobajo con frecuencia de corte la mitad de la frecuencia de muestreo y de ganancia T_2, con lo que tenemos la señal



(c) A partir de los dibujos se puede ver que

$$X_{f_2}(\omega) = 2X_f(\omega)$$

y aplicando propiedades

$$x_{f_2}(t) = x_f(t/2)$$

Es decir, la señal recuperada es una versión expandida de la señal original.