

La Serie Continua de Fourier

(Sistemas Lineales)

Santiago Aja-Fernández

Universidad de Valladolid

- 1 Introducción
 - ¿Qué queremos hacer?
- 2 Representación de señales periódicas
 - Señales periódicas armónicamente relacionadas
 - Determinación de la Serie de Fourier
 - Series de Fourier de señales reales
- 3 Convergencia de las series de Fourier

- 1 **Introducción**
 - ¿Qué queremos hacer?
- 2 Representación de señales periódicas
 - Señales periódicas armónicamente relacionadas
 - Determinación de la Serie de Fourier
 - Series de Fourier de señales reales
- 3 Convergencia de las series de Fourier

Idea Previa

- Representación de señales en función de señales básicas
- Propiedades:
 - 1 Señales básicas
 - 2 Respuesta de LTI sencilla
- Ejemplo: exponenciales complejas (autofunciones)

Idea Previa

- Representación de señales en función de señales básicas
- Propiedades:
 - 1 Señales básicas
 - 2 Respuesta de LTI sencilla
- Ejemplo: exponenciales complejas (autofunciones)

Idea Previa

- Representación de señales en función de señales básicas
- Propiedades:
 - 1 Señales básicas
 - 2 Respuesta de LTI sencilla

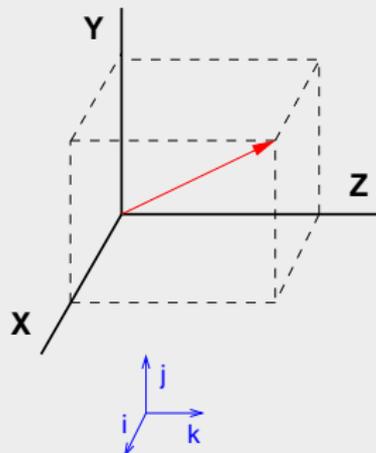
• Ejemplo: exponenciales complejas (autofunciones)

Idea Previa

- Representación de señales en función de señales básicas
- Propiedades:
 - 1 Señales básicas
 - 2 Respuesta de LTI sencilla

- Ejemplo: exponenciales complejas (autofunciones)





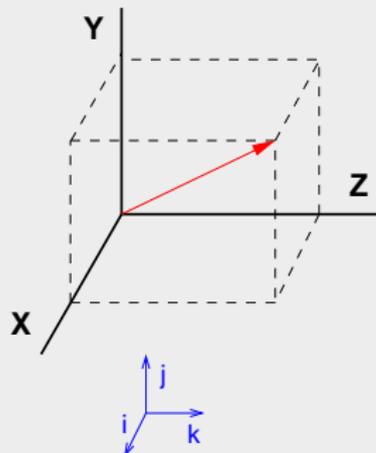
Ejemplo

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t}$$

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t}$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$$

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$



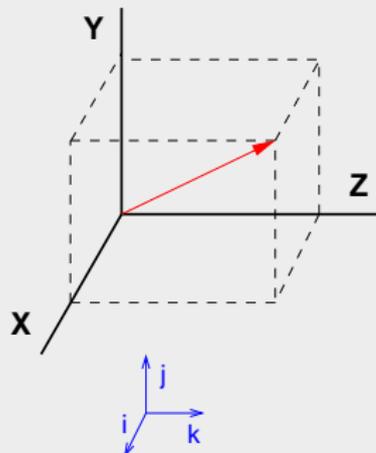
Ejemplo

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t}$$

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t}$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$$

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$



Ejemplo

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t}$$

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t}$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$$

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

- 1 Introducción
 - ¿Qué queremos hacer?
- 2 Representación de señales periódicas
 - Señales periódicas armónicamente relacionadas
 - Determinación de la Serie de Fourier
 - Series de Fourier de señales reales
- 3 Convergencia de las series de Fourier

- Periódica: $x(t) = x(t + T) \forall t$
- Señales periódicas armónicamente relacionadas

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}, \frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$$

- Exponenciales:

$$\left. \begin{array}{l} e^{j\omega_1 t} \\ e^{j\omega_2 t} \end{array} \right\} \rightarrow e^{j(k\frac{2\pi}{T})t} \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T = kT_1 = k\frac{2\pi}{\omega_1} \\ T = mT_2 = m\frac{2\pi}{\omega_2} \end{array} \right. \rightarrow \frac{k}{m} \in \mathbb{Q}$$

- Periódica: $x(t) = x(t + T) \forall t$
- Señales periódicas armónicamente relacionadas

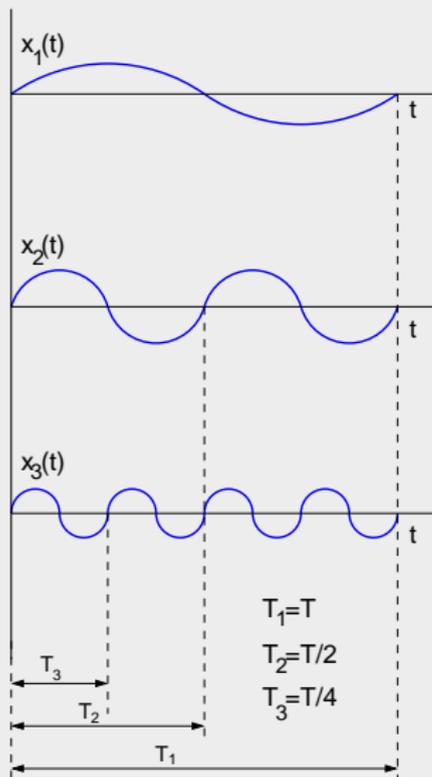
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}, \frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$$

- Exponenciales:

$$\left. \begin{array}{l} e^{j\omega_1 t} \\ e^{j\omega_2 t} \end{array} \right\} \rightarrow e^{j(k\frac{2\pi}{T})t} \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T = kT_1 = k\frac{2\pi}{\omega_1} \\ T = mT_2 = m\frac{2\pi}{\omega_2} \end{array} \right. \rightarrow \frac{k}{m} \in \mathbb{Q}$$

Señales periódicas



- Periódica: $x(t) = x(t + T) \forall t$
- Señales periódicas armónicamente relacionadas

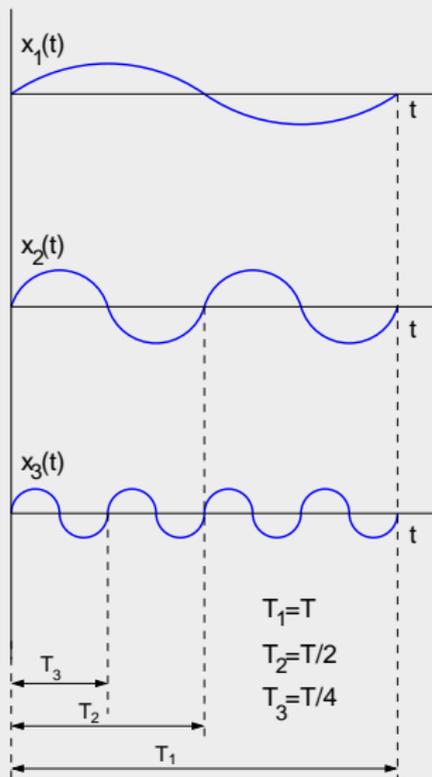
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}, \frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$$

- Exponenciales:

$$\left. \begin{array}{l} e^{j\omega_1 t} \\ e^{j\omega_2 t} \end{array} \right\} \rightarrow e^{j(k\frac{2\pi}{T})t} \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T = kT_1 = k\frac{2\pi}{\omega_1} \\ T = mT_2 = m\frac{2\pi}{\omega_2} \end{array} \right. \rightarrow \frac{k}{m} \in \mathbb{Q}$$

Señales periódicas



- Periódica: $x(t) = x(t + T) \forall t$
- Señales periódicas armónicamente relacionadas

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}, \frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$$

- Exponenciales:

$$\left. \begin{array}{l} e^{j\omega_1 t} \\ e^{j\omega_2 t} \end{array} \right\} \rightarrow e^{j(k\frac{2\pi}{T})t} \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T = kT_1 = k\frac{2\pi}{\omega_1} \\ T = mT_2 = m\frac{2\pi}{\omega_2} \end{array} \right. \rightarrow \frac{k}{m} \in \mathbb{Q}$$

- Familia de señales exponenciales armónicamente relacionadas:

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Combinación lineal también periódico de periodo T

$$\sum_k c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \rightarrow \text{Periódico}$$

- Serie de Fourier: Representación de señal periódica usando exponenciales armónicamente relacionadas.

- Familia de señales exponenciales armónicamente relacionadas:

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Combinación lineal también periódico de periodo T

$$\sum_k c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \rightarrow \text{Periódico}$$

- Serie de Fourier: Representación de señal periódica usando exponenciales armónicamente relacionadas.

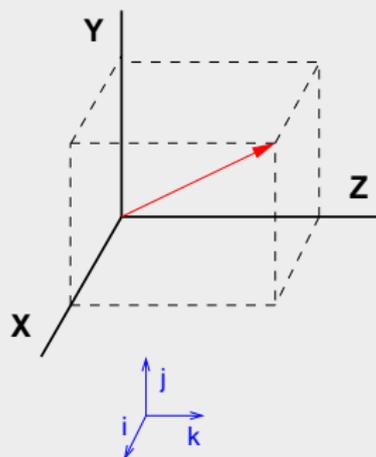
- Familia de señales exponenciales armónicamente relacionadas:

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Combinación lineal también periódico de periodo T

$$\sum_k c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \rightarrow \text{Periódico}$$

- Serie de Fourier: Representación de señal periódica usando exponenciales armónicamente relacionadas.



Espacio de señales

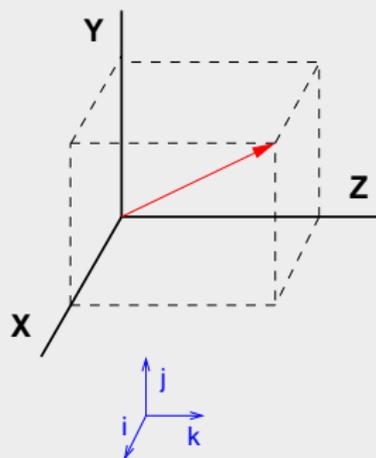
- Definimos un espacio.
- Familia de señales:

$$\phi_k(t) = e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Distancia:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t)y^*(t)dt$$

- $\phi_k(t)$... ¿base?



Espacio de señales

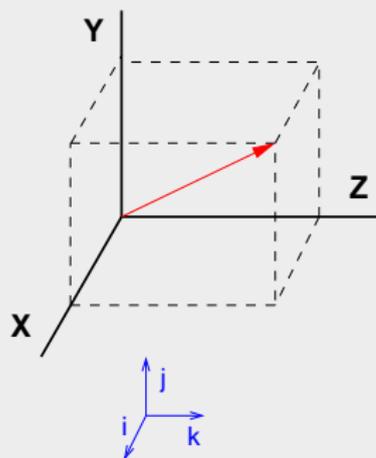
- Definimos un espacio.
- Familia de señales:

$$\phi_k(t) = e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Distancia:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t)y^*(t)dt$$

- $\phi_k(t)$... ¿base?



Espacio de señales

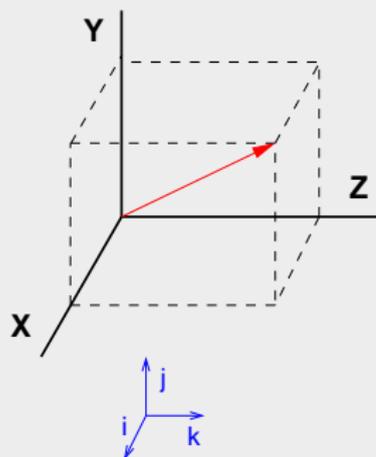
- Definimos un espacio.
- Familia de señales:

$$\phi_k(t) = e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Distancia:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t)y^*(t)dt$$

- $\phi_k(t)$... ¿base?



Espacio de señales

- Definimos un espacio.
- Familia de señales:

$$\phi_k(t) = e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Distancia:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t)y^*(t)dt$$

- $\phi_k(t)$... ¿base?

- Estudio de las señales

$$\begin{aligned}\langle \phi_k(t), \phi_m(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} e^{-jm\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \frac{e^{j(k-m)\frac{2\pi}{T}t}}{jT(k-m)\frac{2\pi}{T}} \Bigg|_0^T = 0\end{aligned}$$

$$\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle = \left\| e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \right\|^2 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle \phi_k(t), \phi_m(t) \rangle = 0 \\ \|\phi_k(t)\| = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ortogonalidad} \\ \text{Norma 1} \end{array} \rightarrow \text{Ortonormales}$$

- Forman una base

- Estudio de las señales

$$\begin{aligned}\langle \phi_k(t), \phi_m(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} e^{-jm\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \frac{e^{j(k-m)\frac{2\pi}{T}t} \Big|_0^T}{jT(k-m)\frac{2\pi}{T}} = 0\end{aligned}$$

$$\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle = \left\| e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \right\|^2 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle \phi_k(t), \phi_m(t) \rangle = 0 \\ \|\phi_k(t)\| = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ortogonalidad} \\ \text{Norma 1} \end{array} \rightarrow \text{Ortonormales}$$

- Forman una base

- Estudio de las señales

$$\begin{aligned}\langle \phi_k(t), \phi_m(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} e^{-jm\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \frac{e^{j(k-m)\frac{2\pi}{T}t}}{jT(k-m)\frac{2\pi}{T}} \Bigg|_0^T = 0\end{aligned}$$

$$\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle = \left\| e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \right\|^2 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle \phi_k(t), \phi_m(t) \rangle = 0 \\ \|\phi_k(t)\| = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ortogonalidad} \\ \text{Norma 1} \end{array} \rightarrow \text{Ortonormales}$$

- Forman una base

- Estudio de las señales

$$\begin{aligned}\langle \phi_k(t), \phi_m(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} e^{-jm\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \frac{e^{j(k-m)\frac{2\pi}{T}t}}{jT(k-m)\frac{2\pi}{T}} \Bigg|_0^T = 0\end{aligned}$$

$$\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle = \left\| e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \right\|^2 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle \phi_k(t), \phi_m(t) \rangle = 0 \\ \|\phi_k(t)\| = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ortogonalidad} \\ \text{Norma 1} \end{array} \rightarrow \text{Ortonormales}$$

- Forman una base

- Estudio de las señales

$$\begin{aligned}\langle \phi_k(t), \phi_m(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} e^{-jm\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \frac{e^{j(k-m)\frac{2\pi}{T}t}}{jT(k-m)\frac{2\pi}{T}} \Bigg|_0^T = 0\end{aligned}$$

$$\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle = \left\| e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \right\|^2 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle \phi_k(t), \phi_m(t) \rangle = 0 \\ \|\phi_k(t)\| = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ortogonalidad} \\ \text{Norma 1} \end{array} \rightarrow \text{Ortonormales}$$

- Forman una base

- Estudio de las señales

$$\begin{aligned}\langle \phi_k(t), \phi_m(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} e^{-jm\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \frac{e^{j(k-m)\frac{2\pi}{T}t}}{jT(k-m)\frac{2\pi}{T}} \Bigg|_0^T = 0\end{aligned}$$

$$\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle = \left\| e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \right\|^2 = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle \phi_k(t), \phi_m(t) \rangle = 0 \\ \|\phi_k(t)\| = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ortogonalidad} \\ \text{Norma 1} \end{array} \rightarrow \text{Ortonormales}$$

- Forman una base

Representación de señales

- Proyectamos señal periódica $x(t)$ sobre la base

$$\begin{aligned}\langle x(t), \phi_k(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt \\ &= C_k\end{aligned}$$

- Construimos la serie:

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \phi_k(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}\end{aligned}$$

Representación de señales

- Proyectamos señal periódica $x(t)$ sobre la base

$$\begin{aligned}\langle x(t), \phi_k(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt \\ &= C_k\end{aligned}$$

- Construimos la serie:

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \phi_k(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}\end{aligned}$$

Representación de señales

- Proyectamos señal periódica $x(t)$ sobre la base

$$\begin{aligned}\langle x(t), \phi_k(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt \\ &= C_k\end{aligned}$$

- Construimos la serie:

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \phi_k(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}\end{aligned}$$

Representación de señales

- Proyectamos señal periódica $x(t)$ sobre la base

$$\begin{aligned}\langle x(t), \phi_k(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt \\ &= C_k\end{aligned}$$

- Construimos la serie:

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \phi_k(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}\end{aligned}$$

Representación de señales

- Proyectamos señal periódica $x(t)$ sobre la base

$$\begin{aligned}\langle x(t), \phi_k(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt \\ &= C_k\end{aligned}$$

- Construimos la serie:

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \phi_k(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}\end{aligned}$$

Representación de señales

- Proyectamos señal periódica $x(t)$ sobre la base

$$\begin{aligned}\langle x(t), \phi_k(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt \\ &= C_k\end{aligned}$$

- Construimos la serie:

$$\begin{aligned}x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \phi_k(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}\end{aligned}$$

Serie de Fourier

- Ecuación de Análisis:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt$$

- Ecuación de Síntesis:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}$$

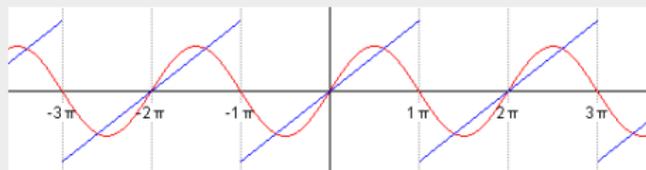
Serie de Fourier

- Ecuación de Análisis:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt$$

- Ecuación de Síntesis:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}$$



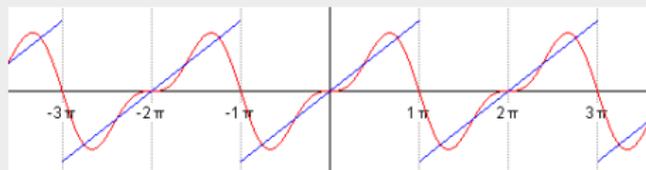
Serie de Fourier

- Ecuación de Análisis:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt$$

- Ecuación de Síntesis:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}$$



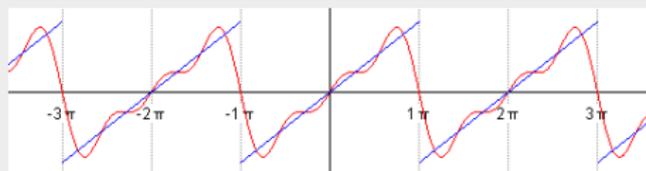
Serie de Fourier

- Ecuación de Análisis:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt$$

- Ecuación de Síntesis:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}$$



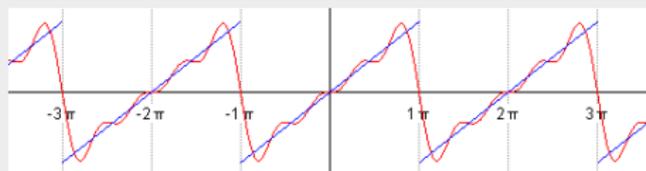
Serie de Fourier

- Ecuación de Análisis:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt$$

- Ecuación de Síntesis:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}$$



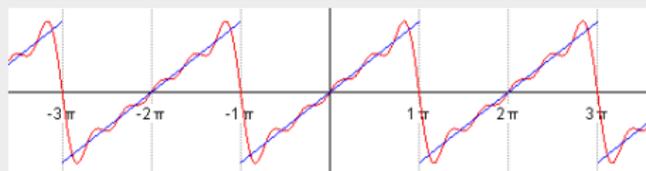
Serie de Fourier

- Ecuación de Análisis:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt$$

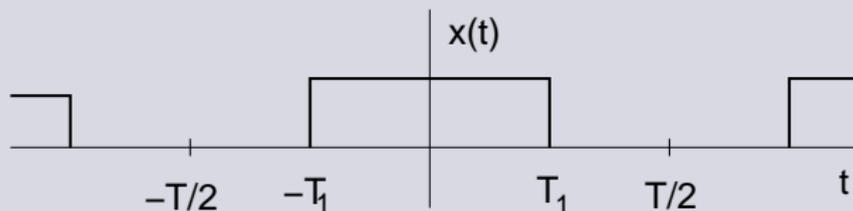
- Ecuación de Síntesis:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}$$



Ejemplo 1

Serie de Fourier de un tren de pulsos rectangulares



Serie de Fourier. Señal Real (1)

Señal real: $x(t) = x^*(t)$

$$C_k^* = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x^*(t) e^{jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j(-k) \frac{2\pi}{T} t} dt = C_{-k}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + C_{-k} e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} \right] = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R} \left\{ C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \right\} \end{aligned}$$

$$C_k = \begin{cases} a_k + jb_k \\ r_k e^{j\theta_k} \end{cases}$$

Serie de Fourier. Señal Real (1)

Señal real: $x(t) = x^*(t)$

$$C_k^* = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x^*(t) e^{jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j(-k) \frac{2\pi}{T} t} dt = C_{-k}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + C_{-k} e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} \right] = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R} \left\{ C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \right\} \end{aligned}$$

$$C_k = \begin{cases} a_k + jb_k \\ r_k e^{j\theta_k} \end{cases}$$

Serie de Fourier. Señal Real (1)

Señal real: $x(t) = x^*(t)$

$$C_k^* = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x^*(t) e^{jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j(-k) \frac{2\pi}{T} t} dt = C_{-k}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + C_{-k} e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} \right] = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R} \left\{ C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \right\} \end{aligned}$$

$$C_k = \begin{cases} a_k + jb_k \\ r_k e^{j\theta_k} \end{cases}$$

Serie de Fourier. Señal Real (1)

Señal real: $x(t) = x^*(t)$

$$C_k^* = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x^*(t) e^{jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j(-k) \frac{2\pi}{T} t} dt = C_{-k}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + C_{-k} e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} \right] = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R} \left\{ C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \right\} \end{aligned}$$

$$C_k = \begin{cases} a_k + jb_k \\ r_k e^{j\theta_k} \end{cases}$$

Serie de Fourier. Señal Real (1)

Señal real: $x(t) = x^*(t)$

$$C_k^* = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x^*(t) e^{jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j(-k) \frac{2\pi}{T} t} dt = C_{-k}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + C_{-k} e^{-jk \frac{2\pi}{T} t}] = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R} \left\{ C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \right\} \end{aligned}$$

$$C_k = \begin{cases} a_k + jb_k \\ r_k e^{j\theta_k} \end{cases}$$

Serie de Fourier. Señal Real (1)

Señal real: $x(t) = x^*(t)$

$$C_k^* = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x^*(t) e^{jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j(-k) \frac{2\pi}{T} t} dt = C_{-k}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + C_{-k} e^{-jk \frac{2\pi}{T} t}] = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R} \left\{ C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \right\} \end{aligned}$$

$$C_k = \begin{cases} a_k + jb_k \\ r_k e^{j\theta_k} \end{cases}$$

Serie de Fourier. Señal Real (1)

Señal real: $x(t) = x^*(t)$

$$C_k^* = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x^*(t) e^{jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j(-k) \frac{2\pi}{T} t} dt = C_{-k}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + C_{-k} e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} \right] = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R} \left\{ C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \right\} \end{aligned}$$

$$C_k = \begin{cases} a_k + jb_k \\ r_k e^{j\theta_k} \end{cases}$$

Serie de Fourier. Señal Real (1)

Señal real: $x(t) = x^*(t)$

$$C_k^* = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x^*(t) e^{jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j(-k) \frac{2\pi}{T} t} dt = C_{-k}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + C_{-k} e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} \right] = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R} \left\{ C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \right\} \end{aligned}$$

$$C_k = \begin{cases} a_k + jb_k \\ r_k e^{j\theta_k} \end{cases}$$

Serie de Fourier. Señal Real (1)

Señal real: $x(t) = x^*(t)$

$$C_k^* = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x^*(t) e^{jk \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-j(-k) \frac{2\pi}{T} t} dt = C_{-k}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} + C_{-k} e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} \right] = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R} \left\{ C_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \right\} \end{aligned}$$

$$C_k = \begin{cases} a_k + jb_k \\ r_k e^{j\theta_k} \end{cases}$$

Serie de Fourier. Señal Real (2)

$$x(t) = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R} \left\{ C_k e^{jk\omega_0 t} \right\} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Serie de Fourier de señales reales

● $C_k = a_k + jb_k$

$$x(t) = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) - b_k \sin(k\omega_0 t))$$

● $C_k = r_k e^{j\theta_k}$

$$x(t) = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

$$x(t) = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R} \left\{ C_k e^{jk\omega_0 t} \right\} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Serie de Fourier de señales reales

1 $C_k = a_k + jb_k$

$$x(t) = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) - b_k \sin(k\omega_0 t))$$

2 $C_k = r_k e^{j\theta_k}$

$$x(t) = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

$$x(t) = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R} \left\{ C_k e^{jk\omega_0 t} \right\} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Serie de Fourier de señales reales

1 $C_k = a_k + jb_k$

$$x(t) = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) - b_k \sin(k\omega_0 t))$$

2 $C_k = r_k e^{j\theta_k}$

$$x(t) = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

- 1 Introducción
 - ¿Qué queremos hacer?
- 2 Representación de señales periódicas
 - Señales periódicas armónicamente relacionadas
 - Determinación de la Serie de Fourier
 - Series de Fourier de señales reales
- 3 Convergencia de las series de Fourier

Error de aproximación

- ¿Podemos representar función discontinua usando funciones continuas?
- Aproximación mediante serie finita

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}$$

- Error: $e_N(t) = x(t) - \tilde{x}_N(t)$.
- Medida: $MSE_N = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |e_N(t)|^2 dt$
- Mejor aproximación: Coef. de la serie de Fourier. Problema 3.66
- En el límite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} MSE_N = 0$$

Error de aproximación

- ¿Podemos representar función discontinua usando funciones continuas?
- Aproximación mediante serie finita

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}$$

- Error: $e_N(t) = x(t) - \tilde{x}_N(t)$.
- Medida: $MSE_N = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |e_N(t)|^2 dt$
- Mejor aproximación: Coef. de la serie de Fourier. Problema 3.66
- En el límite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} MSE_N = 0$$

Error de aproximación

- ¿Podemos representar función discontinua usando funciones continuas?
- Aproximación mediante serie finita

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}$$

- Error: $e_N(t) = x(t) - \tilde{x}_N(t)$.
- Medida: $MSE_N = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |e_N(t)|^2 dt$
- Mejor aproximación: Coef. de la serie de Fourier. Problema 3.66
- En el límite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} MSE_N = 0$$

Error de aproximación

- ¿Podemos representar función discontinua usando funciones continuas?
- Aproximación mediante serie finita

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}$$

- Error: $e_N(t) = x(t) - \tilde{x}_N(t)$.
- Medida: $MSE_N = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |e_N(t)|^2 dt$
- Mejor aproximación: Coef. de la serie de Fourier. Problema 3.66
- En el límite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} MSE_N = 0$$

Error de aproximación

- ¿Podemos representar función discontinua usando funciones continuas?
- Aproximación mediante serie finita

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}$$

- Error: $e_N(t) = x(t) - \tilde{x}_N(t)$.
- Medida: $MSE_N = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |e_N(t)|^2 dt$
- Mejor aproximación: Coef. de la serie de Fourier. Problema 3.66
- En el límite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} MSE_N = 0$$

Error de aproximación

- ¿Podemos representar función discontinua usando funciones continuas?
- Aproximación mediante serie finita

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}$$

- Error: $e_N(t) = x(t) - \tilde{x}_N(t)$.
- Medida: $MSE_N = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |e_N(t)|^2 dt$
- Mejor aproximación: Coef. de la serie de Fourier. Problema 3.66
- En el límite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} MSE_N = 0$$

Convergencia de las Series de Fourier

Energía finita en un periodo: $\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt < \infty$

Condiciones de Dirichlet

- Absolutamente integrable en un periodo

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)| dt < \infty$$

- Variación de $x(t)$ en un intervalo finito acotada. (Num. finito de max y min.)
- Num finito de discontinuidades en un periodo.

- $x(t) = \frac{1}{t}$,
 $c < t \leq 1$

- $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)$,
 $c < t \leq 1$

- Escalón decreciente

Energía finita en un periodo: $\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt < \infty$

Condiciones de Dirichlet

- 1 Absolutamente integrable en un periodo

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)| dt < \infty$$

- 2 Variación de $x(t)$ en un intervalo finito acotada. (Num. finito de max y min.)
- 3 Num finito de discontinuidades en un periodo.

1 $x(t) = \frac{1}{t}$,
 $c < t \leq 1$

2 $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)$,
 $c < t \leq 1$

- 3 Escalón
decreciente

Energía finita en un periodo: $\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt < \infty$

Condiciones de Dirichlet

- 1 Absolutamente integrable en un periodo

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)| dt < \infty$$

- 2 Variación de $x(t)$ en un intervalo finito acotada. (Num. finito de max y min.)
- 3 Num finito de discontinuidades en un periodo.

1 $x(t) = \frac{1}{t}$,
 $c < t \leq 1$

2 $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)$,
 $c < t \leq 1$

- 3 Escalón
decreciente

Energía finita en un periodo: $\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt < \infty$

Condiciones de Dirichlet

- 1 Absolutamente integrable en un periodo

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)| dt < \infty$$

- 2 Variación de $x(t)$ en un intervalo finito acotada. (Num. finito de max y min.)

- 3 Num finito de discontinuidades en un periodo.

1 $x(t) = \frac{1}{t}$,
 $c < t \leq 1$

2 $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)$,
 $c < t \leq 1$

- 3 Escalón
decreciente

Energía finita en un periodo: $\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt < \infty$

Condiciones de Dirichlet

- 1 Absolutamente integrable en un periodo

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)| dt < \infty$$

- 2 Variación de $x(t)$ en un intervalo finito acotada. (Num. finito de max y min.)

- 3 Num finito de discontinuidades en un periodo.

1 $x(t) = \frac{1}{t}$,
 $c < t \leq 1$

2 $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)$,
 $c < t \leq 1$

- 3 Escalón
decreciente

Energía finita en un periodo: $\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt < \infty$

Condiciones de Dirichlet

- 1 Absolutamente integrable en un periodo

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)| dt < \infty$$

- 2 Variación de $x(t)$ en un intervalo finito acotada. (Num. finito de max y min.)
- 3 Num finito de discontinuidades en un periodo.

1 $x(t) = \frac{1}{t}$,
 $c < t \leq 1$

2 $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)$,
 $c < t \leq 1$

3 Escalón
decreciente

Energía finita en un periodo: $\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt < \infty$

Condiciones de Dirichlet

- 1 Absolutamente integrable en un periodo

$$\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)| dt < \infty$$

- 2 Variación de $x(t)$ en un intervalo finito acotada. (Num. finito de max y min.)

- 3 Num finito de discontinuidades en un periodo.

1 $x(t) = \frac{1}{t}$,
 $c < t \leq 1$

2 $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)$,
 $c < t \leq 1$

- 3 Escalón
decreciente

Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

Tipos de convergencia

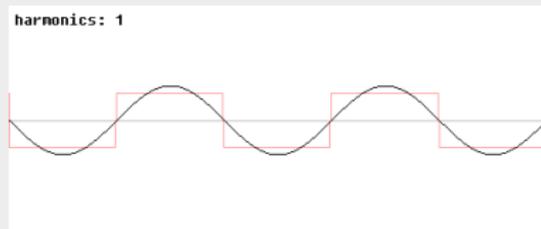
- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

Fenómeno de Gibbs

Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

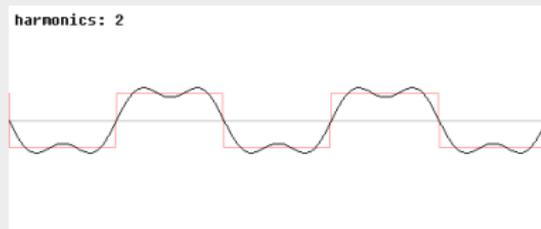
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

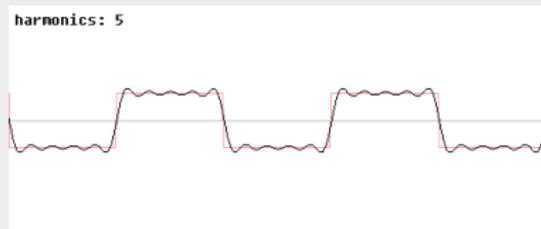
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

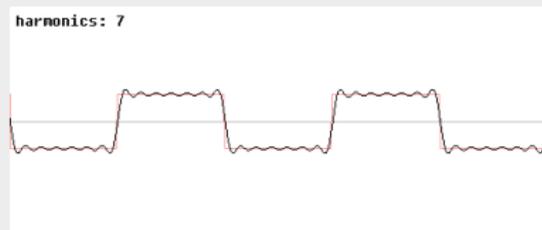
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

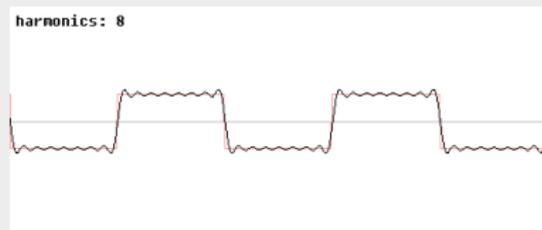
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T: energía de la diferencia cero.

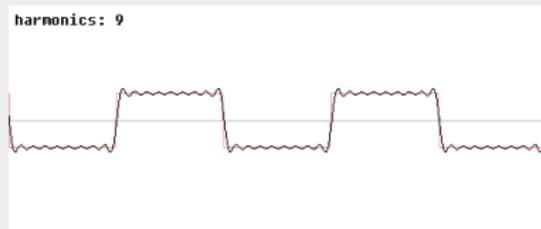
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

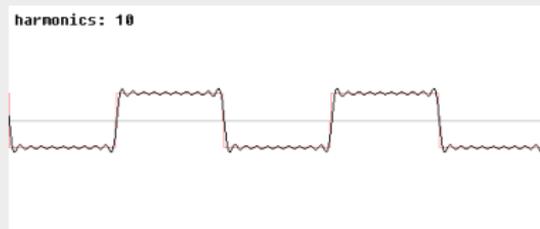
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

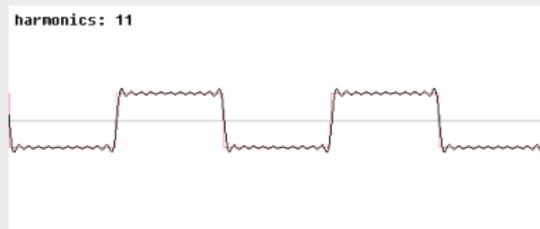
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

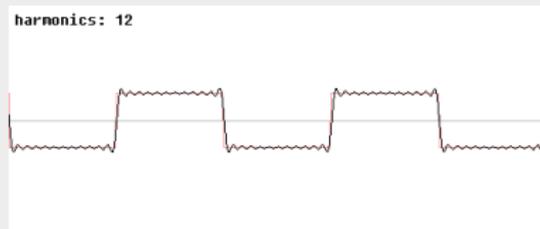
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

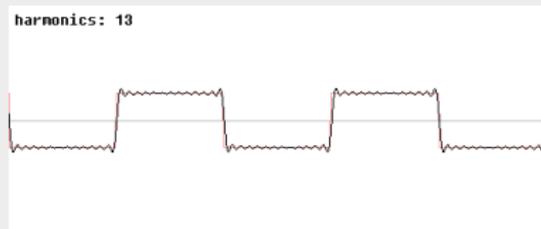
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

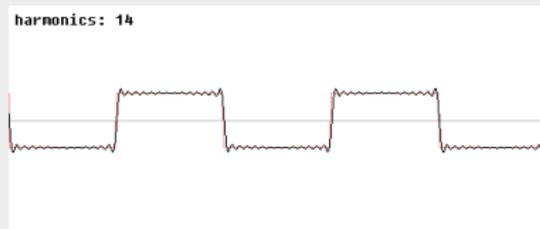
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

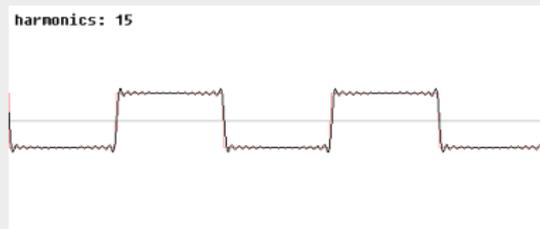
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

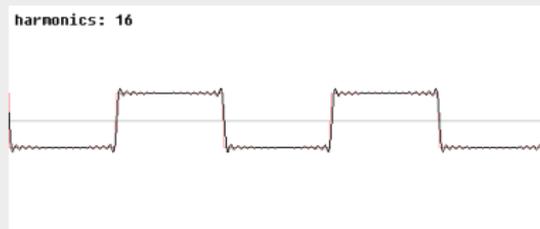
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

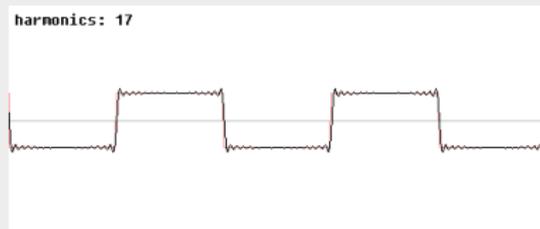
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

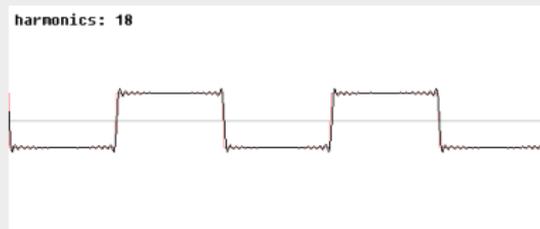
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

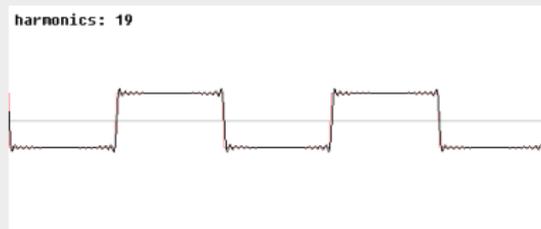
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

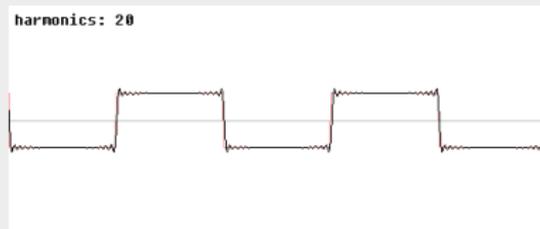
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

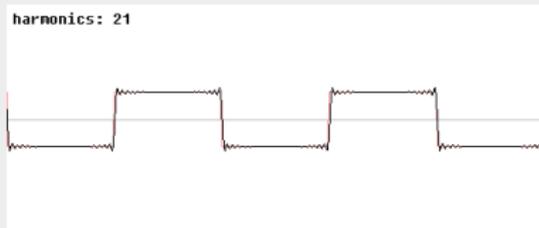
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

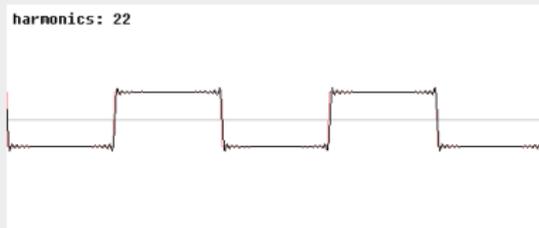
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

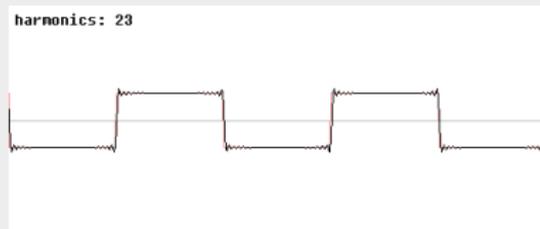
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

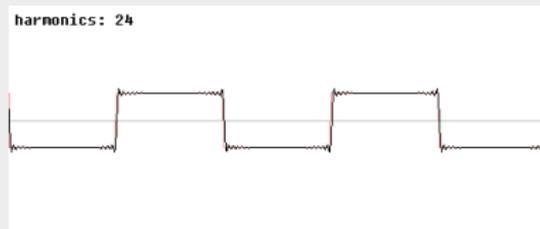
Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

Fenómeno de Gibbs



Tipos de convergencia

- 1 Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
- 2 Numero finito de discontinuidades en T : energía de la diferencia cero.

Fenómeno de Gibbs

