La Serie Continua de Fourier
(Sistemas Lineales)

Santiago Aja-Fernández

Universidad de Valladolid

Contenidos

Introducción

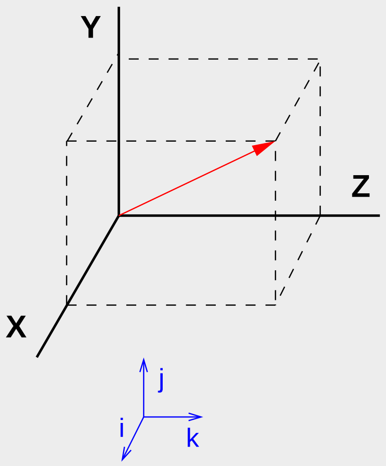
Idea Previa

- Representación de señales en función de señales básicas
- Propiedades:
  1. Señales básicas
  2. Respuesta de LTI sencilla

- Ejemplo: exponenciales complejas (autofunciones)

$$x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y(t) = H(s)e^{st}$$

Introducción



Ejemplo

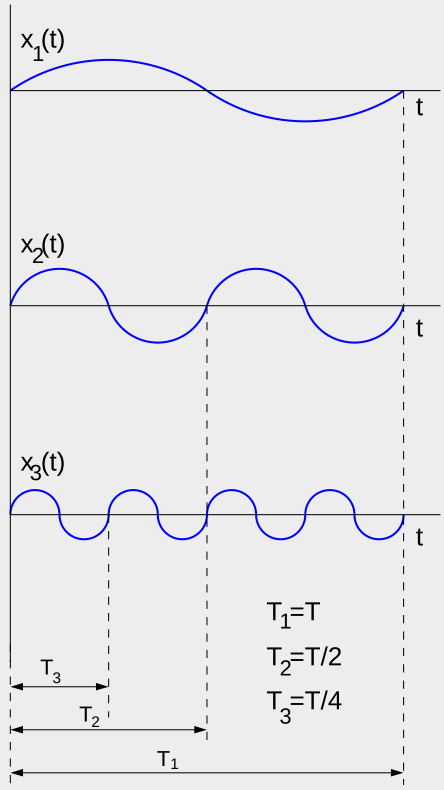
$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t}$$

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t}$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$$

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

Señales periódicas



- Periódica: $x(t) = x(t+T)\ \forall t$
- Señales periódicas armónicamente relacionadas

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in Q,\ \frac{T_1}{T_2} \in Q$$

- Exponenciales:

$$\left.\begin{array}{l} e^{j\omega_1 t} \\ e^{j\omega_2 t} \end{array}\right\} \rightarrow e^{j\left(k\frac{2\pi}{T}\right)t} \rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} T = kT_1 = k\frac{2\pi}{\omega_1} \\ T = mT_2 = m\frac{2\pi}{\omega_2} \end{array}\right. \rightarrow \frac{k}{m} \in Q$$

Señales periódicas

- Familia de señales exponenciales armónicamente relacionadas:

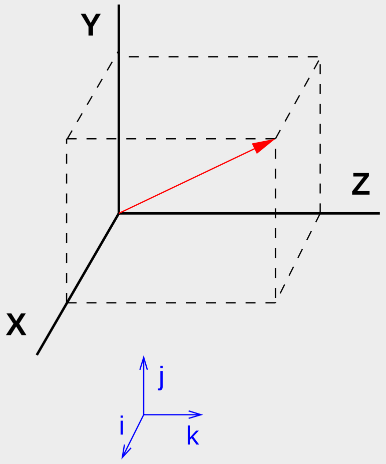
$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

- Combinación lineal también periódico de periodo T

$$\sum_k c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \rightarrow \text{Periódico}$$

- Serie de Fourier: Representación de señal periódica usando exponenciales armonicamente relacionadas.

Serie de Fourier



Espacio de señales

- Definimos un espacio.
- Famila de señales:

$$\phi_k(t) = e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

- Distancia:

$$< x(t), y(t) >= \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)y^*(t)dt$$

- $\phi_k(t)$... ¿base?

Serie de Fourier

- Estudio de las señales

$$\begin{aligned} < \phi_k(t), \phi_m(t) > &= \frac{1}{T}\int_{<T>} e^{jk\frac{2\pi}{T}t} e^{-jm\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \left. \frac{e^{j(k-m)\frac{2\pi}{T}t}}{T(k-m)\frac{2\pi}{T}} \right|_0^T = 0 \\ < \phi_k(t), \phi_k(t) > &= \left|\left| e^{jk\frac{2\pi}{T}} \right|\right|^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{ll} < \phi_k(t), \phi_m(t) >= 0 & \text{Ortogonalidad} \\ ||\phi_k(t)|| = 1 & \text{Norma 1} \end{array}\right\} \rightarrow \text{Ortonormales}$$

- Forman una base

Serie de Fourier

Representación de señales

- Proyectamos señal periódica $x(t)$ sobre la base

$$
\begin{aligned}
< x(t), \phi_k(t) > &= \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \\
&= C_k
\end{aligned}
$$

- Construimos la serie:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\phi_k(t) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}
\end{aligned}
$$

Serie de Fourier

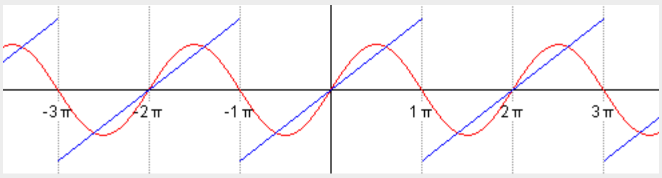
Serie de Fourier

- Ecuación de Análisis:

$$
C_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt
$$

- Ecuación de Síntesis:

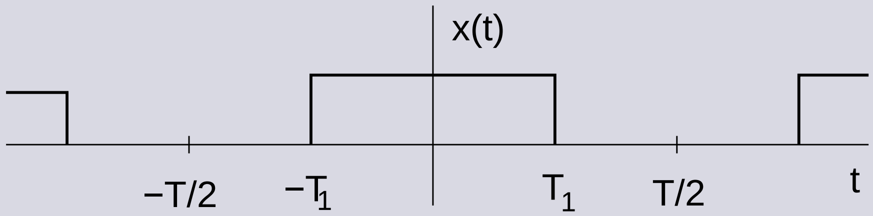
$$
x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}
$$



Serie de Fourier

Ejemplo 1

Serie de Fourier de un tren de pulsos rectangulares



Serie de Fourier. Señal Real (1)

Señal real: $x(t) = x^*(t)$

$$C_k^* = \frac{1}{T}\int_{<T>} x^*(t)e^{jk\frac{2\pi}{T}t}dt = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-j(-k)\frac{2\pi}{T}t}dt = C_{-k}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[C_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} + C_{-k}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\right] = C_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{R}\left\{C_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\right\} \end{aligned}$$

$$C_k = \left\{ \begin{array}{l} a_k + jb_k \\ r_k e^{j\theta_k} \end{array} \right.$$

Serie de Fourier. Señal Real (2)

$$x(t) = C_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}\left\{C_k e^{jk\omega_0 t}\right\} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Serie de Fourier de señales reales

1. $C_k = a_k + jb_k$

$$x(t) = C_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(k\omega_0 t\right) - b_k \sin\left(k\omega_0 t\right)\right)$$

2. $C_k = r_k e^{j\theta_k}$

$$x(t) = C_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos\left(k\omega_0 t + \theta_k\right)$$

Convergencia de las Series de Fourier

Error de aproximación

- ¿Podemos representar función discontinua usando funciones continuas?
- Aproximación mediante serie finita

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

- Error: $e_N(t) = x(t) - \tilde{x}_N(t)$.
- Medida: $\text{MSE}_N = \frac{1}{T}\int_{<T>} |e_N(t)|^2 dt$
- Mejor aproximación: Coef. de la serie de Fourier. Problema 3.66
- En el límite:

$$\lim_{N\to\infty} \text{MSE}_N = 0$$

Convergencia de las Series de Fourier

Energía finita en un periodo: $\frac{1}{T}\int_{<T>} |x(t)|^2 dt < \infty$

Condiciones de Dirichlet

1. Absolutamente integrable en un periodo

$$\frac{1}{T}\int_{<T>} |x(t)| dt < \infty$$

2. Variación de $x(t)$ en un intervalo finito acotada. (Num. finito de max y min.)
3. Num finito de discontinuidades en un perido.

1. $x(t) = \frac{1}{t}$, $c < t \leq 1$
2. $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)$, $c < t \leq 1$
3. Escalón decreciente

Convergencia de las Series de Fourier

Tipos de convergencia

1. Periódica sin discontinuidades: Igual punto a punto
2. Numero finito de discontinuidades en T: energía de la diferencia cero.

Fenómero de Gibbs