Ejercicio 5.1

Se desea diseñar un sistema discreto para procesar señales continuas. Concretamente un sistema tal que

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t).$$

Calcule la respuesta al impulso $H(\Omega)$ del sistema discreto.

Resolución

El sistema que realiza la derivada es un sistema LTI, y la transformada de Fourier de su respuesta al impulso es

$$H_c(\omega) = j\omega.$$

Dado que este sistema no es de banda limitada, lo primero que habrá que hacer para construir el sistema discreto es limitarlo en banda. Si las señales de entrada van a estar muestreadas a una frecuencia ω_s, entonces definimos el sistema continuo como

$$H_c(\omega) = \begin{cases} j\omega, & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

La respuesta al impulso del sistema discreto equivalente será por lo tanto

$$H(\Omega) = j\frac{\Omega}{T} \quad |\Omega| < \pi.$$

Ejercicio 5.2

En el siguiente problema se estudiará el efecto de una falta de sincronización en la frecuencia de muestreo al reproducir una señal de audio digital. Para ello, se parte de una señal sonora $x_s(t)$. Para evitar un posible aliasing, la señal se pasa por un filtro paso bajo $h(t)$ con frecuencia de corte $w_c = 2\pi \times 2\ 10^4$ (es decir, 20 kHz). La señal resultante $x_f(t)$ es muestreada con un tren de impulsos a la frecuencia de Nyquist $\omega_s = \omega_N$, obteniendo así la señal $x[n]$, que es almacenada en un dispositivo electrónico.

(a) Dibuje la transformada de Fourier de las señales $x_s(t)$, $x_f(t)$ y $x[n]$. (Etiquete correctamente los ejes).

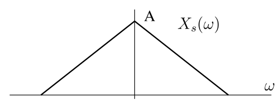
A la hora de reproducir la señal $x[n]$ almacenada, por un error de sincronización se asume una frecuencia de muestreo $\omega_{s_2} = \omega_s/2$. Esta frecuencia se usará para todo el proceso de interpolación. La señal $x[n]$ se pasa por un conversor de deltas discretas a continuas (usando ω_{s_2}), dando lugar a la señal $x_{p_2}(t)$. A partir de esta señal, mediante un proceso de interpolación, se reconstruye la señal continua $x_{f_2}(t)$.

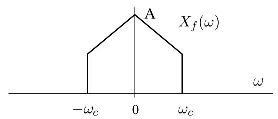
(b) Dibuje la transformada de Fourier de la señal muestreada continua $x_{p_2}(t)$ y de la señal reconstruida $x_{f_2}(t)$.

(c) ¿Qué relación existe entre $x_{f_2}(t)$ y $x_f(t)$?

Resolución

(a) Supongamos que la señal $x_s(t)$ tiene una transformada de Fourier genérica, como la que aparece en la figura inferior. Al pasarla por un filtro paso bajo, la señal queda recortada en frecuencia, tal y como se muestra en la figura, siendo A una altura genérica y $\omega_c = 2\pi \times 2\ 10^4$.





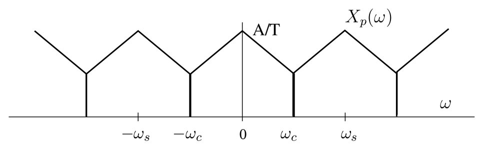
La señal se muestrea usando un tren de deltas a la frecuencia de Nyquist, esto es, al doble de la frecuencia máxima:

$$\omega_s = \omega_N = 2\omega_c = 8\pi\ 10^4.$$

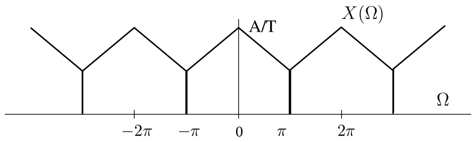
Al muestrear con un tren de deltas, en frecuencia se duplica la señal en los múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo y se multiplica por $1/T$, siendo T el periodo de muestreo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{8\pi\ 10^4} = \frac{1}{4\pi\ 10^4}.$$

La transformada de Fourier de la señal continua muestreada será la siguiente:



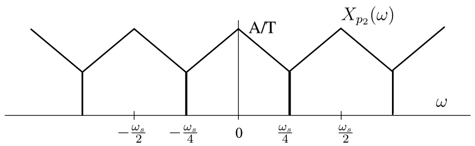
Se nos pide la TF de la señal discreta $x[n]$, es decir $X(\Omega)$ que será:



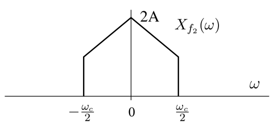
(b) A partir de $X(\Omega)$ el eje Ω se divide por el periodo de muestreo, siendo ahora el periodo

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_{s_2}} = 2T.$$

La altura no varía.



Para recuperar la señal la pasamos por un filtro paso bajo con frecuencia de corte la mitad de la frecuencia de muestreo y de ganancia T_2, con lo que tenemos la señal:



(b) A partir de los dibujos se puede ver que

$$X_{f_2}(\omega) = 2X_f(\omega)$$

y aplicando propiedades

$$x_{f_2}(t) = x_f(t/2).$$

Es decir, la señal recuperada es una versión expandida de la señal original.

Ejercicio 5.3

Sea $x(t)$ una señal limitada en tiempo, de tal modo que $x(t) = 0$, $|t| > T_0$. Su transformada de Fourier se multiplica por un tren de deltas

equiespaciadas una distancia W. Estudie analíticamente el efecto que tiene esta operación en el dominio temporal. Ilustre el resultado con un ejemplo gráfico.

Resolución

El problema consiste básicamente en un muestreo en el dominio de la frecuencia que tiene como resultado la aparición en el tiempo de una señal periódica. (Visto de otra manera, la transformada de Fourier de una señal periódica es un tren de deltas).

En frecuencia tenemos la señal:

$$\begin{aligned} X_p(\omega) &= X(\omega)P(\omega) = X(\omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - kW) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kW)\delta(\omega - kW). \end{aligned}$$

Es decir, aparece la señal $X(\omega)$ muestreada. En tiempo, la multiplicación es una convolución:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= x(t) * p(t) = x(t) * \frac{1}{W}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t - k\frac{2\pi}{W}\right) \\ &= \frac{1}{W}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(t - k\frac{2\pi}{W}\right), \end{aligned}$$

con lo que lo que tenemos es la señal escalada y replicada en múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{W}$, es decir una señal periódica. Si hubiéramos calculado de otro modo la transformada inversa de $X_p(\omega)$, tendríamos

$$x_p(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kW)e^{jkWt}.$$

En este caso, vemos que es una serie de Fourier con periodo $T = \frac{2\pi}{W}$. Es fácil ver también que la señal aperiódica (es decir, un periodo de señal) coincide con $x(t)$, con lo que llegamos a la misma solución que anteriormente.

Ejercicio 5.4

Sea una señal $x(t)$ tal que su transformada de Fourier $X(\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$. La señal $x(t)$ se multiplica por una señal periódica genérica de periodo T. Demuestre que $x(t)$ podrá ser recuperada con un filtro paso bajo. Especifique las restricciones de T y del filtro de reconstrucción.

Resolución

Una señal periódica $m(t)$ puede escribirse siempre como una serie de Fourier

$$m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

con transformada de Fourier

$$M(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right).$$

Si multiplico una señal por una señal periódica:

$$y(t) = x(t)m(t),$$

su transformada de Fourier es la convolución:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi}X(\omega) * M(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k X(\omega) * \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k X\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right). \end{aligned}$$

De este modo, la transformada de Fourier será la señal duplicada en múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{T}k$ y cada réplica multiplicada por c_k.

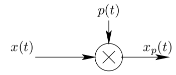
Asumiendo que $c_0 \neq 0$, la señal se podrá recuperar si no hay solapamiento entre réplicas, lo que lleva a un criterio similar al de Nyquist: $\frac{2\pi}{T} > 2\omega_M$, con lo que

$$T < \frac{\pi}{\omega_M}.$$

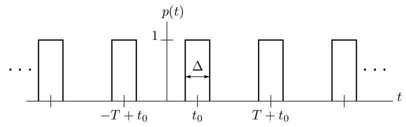
La reconstrucción se realizará con un filtro paso bajo con frecuencia de corte $\omega_c = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{T}$ y ganancia $\frac{1}{c_0}$, asumiendo que $c_0 \neq 0$

Ejercicio 5.5

En la figura (a), se muestra el esquema de muestreo "de tiempo finito", en el que la señal de muestreo, $p(t)$, es la mostrada en la figura (b).

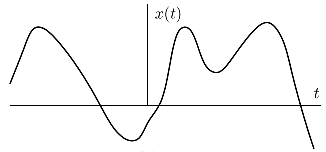


(a)

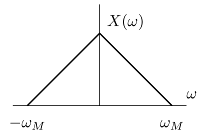


(b)

A dicho sistema se le introduce una señal $x(t)$, como la mostrada en la figura (c), cuyo espectro (real) supongamos que es el de la figura (d).



(c)



(d)

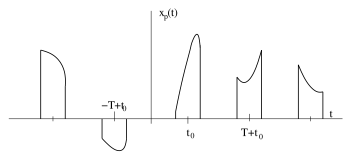
1. **Represente la señal $x_p(t)$.**
2. **Obtenga la transformada de Fourier de la señal $p(t)$.**

Para $\Delta = \frac{T}{8}$ y $t_0 = \frac{T}{4}$,

3. **Obtenga y represente $P(\omega)$ y $X_p(\omega)$.**
4. **Indique el máximo periodo de muestreo, T, para que la señal $x(t)$ se pueda recuperar a partir de la señal muestreada $x_p(t)$.**
5. **Diseñe un sistema que permita recuperar la señal a partir de la señal muestreada.**

Resolución

1. La señal $x_p(t)$ será simplemente el producto de las señales $x(t)$ y $p(t)$:



2. La señal $p(t)$ es un tren de pulsos cuadrados de anchura Δ y periodo T desplazado una cantidad t_0. Si llamamos $p_1(t)$ a un tren de pulsos centrado en el origen, tenemos que

$$p(t) = p_1(t - t_0)$$

Al ser $p_1(t)$ una señal periódica, su transformada de Fourier se tiene que calcular a partir de su serie de Fourier. De todos modos, la transformada viene en las tablas, así que directamente:

$$P_1(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin k\frac{2\pi}{T}\frac{\Delta}{2}}{k}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right),$$

y de aquí

$$\begin{aligned}
P(\omega) &= P_1(\omega)e^{-j\omega t_0} \\
&= e^{-j\omega t_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin k\frac{2\pi}{T}\frac{\Delta}{2}}{k}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin k\frac{2\pi}{T}\frac{\Delta}{2}}{k}e^{-j\omega t_0}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin k\frac{2\pi}{T}\frac{\Delta}{2}}{k}e^{-jk\frac{2\pi}{T}t_0}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) \\
&= \frac{2\pi\Delta}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(k\frac{\Delta}{T}\right)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t_0}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right).
\end{aligned}$$

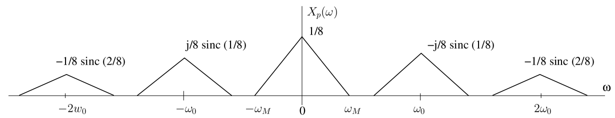
3. Para los valores dados:

$$\begin{aligned}
P(\omega) &= \frac{2\pi}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{8}\right)e^{-jk\frac{\pi}{2}}\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) \\
&= \frac{2\pi}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{8}\right)(-j)^k\delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right),
\end{aligned}$$

que consiste en una serie de deltas cuya envolvente sigue una sinc, con ceros en $8\omega_0$, $16\omega_0$, etc.

La señal $X_p(\omega)$ será:

$$\begin{aligned}
X_p(\omega) &= \frac{1}{2\pi}X(\omega) * P(\omega) \\
&= \frac{1}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{8}\right)(-j)^k X(\omega) * \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right) \\
&= \frac{1}{8}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{8}\right)(-j)^k X\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right).
\end{aligned}$$



4. El problema se puede ver desde dos puntos de vista. El primero (el más sencillo), considerando que para que no haya aliasing la replica en el origen y la réplica en ω_0 no deben tocarse. Para ello:

$$\omega_0 - \omega_M > \omega_M,$$

de donde:

$$T < \frac{\pi}{\omega_M}.$$

Hay otra posible solución que nos lleva a un periodo mayor. Si consideramos que $X(\omega)$ es real (tal y como se muestra en la figura), en $X_p(\omega)$ la réplica en el origen va a ser siempre real, la réplica en ω_0 estará multiplicada por j (será imaginaria) y la de $2\omega_o$ será real de nuevo. Si para recuperar la señal eliminamos la parte imaginaria, podemos considerar que:

$$2\omega_0 - \omega_M > \omega_M,$$

y de aquí:

$$T < \frac{2\pi}{\omega_M}.$$

5. Para recuperar la señal usando el primer método del apartado anterior basta con un filtro paso bajo de frecuencia de corte $\omega_0/2$ y ganancia 8. Para el segundo caso habría que tomar la parte real de $X_p(\omega)$ antes de filtrar.

Ejercicio 5.6

En el siguiente problema se analizará un esquema *real* de muestreo. En muchos esquemas comerciales, para muestrear una señal continua

$x(t)$, en lugar de tomar su valor en un punto concreto, $x[n]=x(nT)$, lo que se hace es tomar el valor medio en un intervalo alrededor de ese punto:

$$x[n]=\frac{1}{T_s}\int_{(n-1/2)T}^{(n+1/2)T} x(t)dt.$$

Esto puede modelarse usando un tren de deltas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x[n] &= x_2(nT) \\ x_p(t) &= x_2(t)\cdot p(t) \\ &= [x(t)*h_1(t)]\cdot p(t), \end{aligned}$$

donde

$$h_1(t)=\begin{cases} 1, & |t|\le \frac{T}{2} \\ 0, & |t|>\frac{T}{2} \end{cases}$$

y $p(t)$ es un tren de deltas equiespaciadas de la forma:

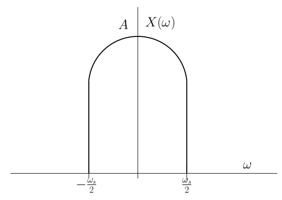
$$p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-kT\right).$$

Las señales $x[n]$ y $x_p(t)$ son alternativamente la señal muestreada discreta y la señal muestreada continua. Considerando que la señal $x(t)$ es de banda limitada, tal que $X(\omega)=0$ si $|\omega|>\frac{\omega_s}{2}$:

1. **Dibuje la transformada de Fourier de $x_2(t)$, $x_p(t)$ y $x[n]$ en función de la de $x(t)$ (considere una $x(t)$ real y de banda limitada).**
2. **Explique el efecto del esquema de muestreo sobre la señal $x(t)$. Indique si habrá o no aliasing y si la señal podrá recuperarse.**
3. **En caso de poderse recuperar alguna de las señales, proponga un esquema para recuperar la señal promediada $x_2(t)$ y/o un esquema para recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.**

Resolución

1. Dado que la señal $x(t)$ es real, su transformada de Fourier será hermítica. Si escojo una $X(\omega)$ real, tendré que escoger una señal par. Como no se indica nada de esta señal, podemos escoger una cualquiera:



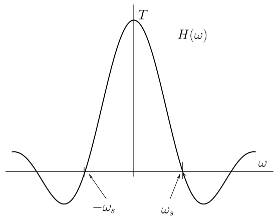
Antes de ser muestreada, la señal pasa por un sistema LTI con respuesta al impulso $h_1(t)$:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x(t)*h_1(t), \\ X_2(\omega) &= X(\omega)H_1(\omega)=X(\omega)\,\frac{2\sin(\omega T_1/2)}{\omega} \\ &= X(\omega)\cdot T\mathrm{sinc}\left(\omega\frac{T}{2\pi}\right)=T\cdot X(\omega)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right), \end{aligned}$$

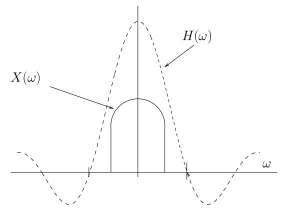
con

$$H_1(\omega)=T\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right).$$

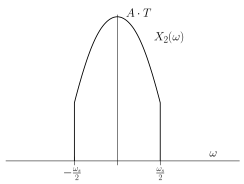
Nótese que los ceros de la sinc se encuentran en todos los múltiplos de ω_s:



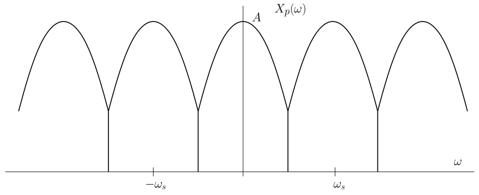
La señal resultante, $X_2(\omega)$, será por lo tanto el producto de $X(\omega)$ con $H(\omega)$:



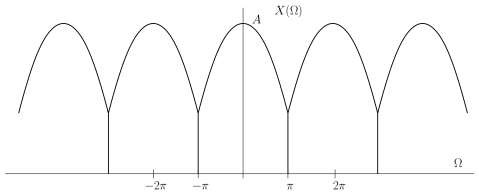
Dado que el primer cero de la sinc está en $\omega = \omega_s$, y que la frecuencia máxima de $X(\omega)$ es $\omega_s/2$, $X_2(\omega)$ tomará valores en la misma banda que $X(\omega)$. Podemos aproximar su forma:



Al muestrear la señal, la transformada de Fourier se multiplicará por T y se replicará en todos los múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo:



La transformada de Fourier de la señal discreta será:



2. En este apartado hay que estudiar dos efectos: (1) el del muestreo y (2) el del sistema $h_1(t)$ sobre la señal. Como se comentó en el apartado anterior, la señal $X_2(\omega)$ tiene el mismo ancho de banda que $X(\omega)$, ya que la convolución con $h_1(t)$ no modifica la anchura de la señal en frecuencia. Por lo tanto, se cumple que:

$$X_2(\omega) = 0, \quad |\omega| > \frac{\omega_s}{2}.$$

Por lo tanto, dado que la frecuencia de muestreo es $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, se cumple el teorema de Nyquist y la señal $x_2(t)$ no tendrá aliasing. Por otro lado, dado que los ceros de la sinc caen fuera de la zona en que $X(\omega)$ toma valores, la multiplicación por $H_1(\omega)$ será una operación *invertible*, ya que no se anula ningún valor de $X(\omega)$. En resumen:

- La convolución con $h_1(t)$ no modifica el ancho de banda de la señal, y es una operación invertible, de tal forma que podremos recuperar $x(t)$ a partir de $x_2(t)$.
- Se muestrea la señal a la frecuencia de Nyquist, por lo que no habrá aliasing (siempre y cuando no haya deltas en el extremo).

3. Para recuperar la señal $x_2(t)$ a partir de $x_p(t)$, simplemente es necesario realizar un filtrado paso bajo:

$$H(\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

Para recuperar la señal $x(t)$ a partir de $x_2(t)$ tenemos que usar el sistema inverso a $h_1(t)$. Lo definimos en frecuencia. La señal $H(\omega)$ no es invertible debido a los ceros de la sinc. Sin embargo, nótese que los ceros caen fuera de la zona de trabajo, por lo que podemos definir el sistema inverso como:

$$H_i(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{T\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)}, & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

Ejercicio 5.7

Sea $x(t)$ una señal real limitada en tiempo, de tal modo que $x(t) = 0$ si $t < 0$ ó $t \geq T_0$. Su transformada de Fourier se multiplica por un tren de deltas equiestapaciadas una distancia W_0.

1. **Estudie analíticamente el efecto que tiene esta operación en el dominio temporal. Ilustre el resultado con un ejemplo gráfico, asumiendo que $T_0 < \frac{2\pi}{W_0}$.**
2. **Repita el estudio para $x(t) = 1$ si $0 \geq t > T_0$ ($x(t) = 0$ fuera del intervalo) y $W_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. Dibuje la señal resultante en tiempo y frecuencia.**

Resolución

1. La señal $x(t)$ tendrá transformada de Fourier $X(\omega)$. Se multiplica por un tren de deltas $P(\omega)$ definido:

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - kW_0),$$

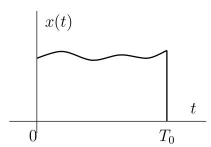
de tal forma que

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega) \cdot P(\omega) \\ &= X(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - kW_0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kW_0)\delta(\omega - kW_0). \end{aligned}$$

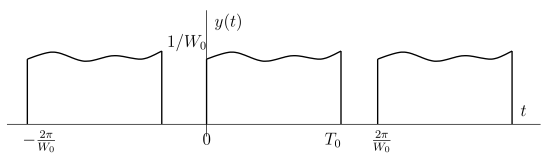
En tiempo esto equivale a

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * p(t) \\ &= x(t) * \frac{1}{W_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - k\frac{2\pi}{W_0}\right) \\ &= \frac{1}{W_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(t - k\frac{2\pi}{W_0}\right). \end{aligned}$$

Se pide un ejemplo gráfico. Para ello supongamos una señal del tipo:



De acuerdo con el estudio, la señal se duplicará en los múltiplos enteros de $\frac{2\pi}{W_0}$:



2. Se pide que se *repita el estudio* (no que se apliquen los resultados anteriores). Para ello partimos de la señal indicada, cuya transformada de Fourier es

$$X(\omega) = \frac{2\sin(\omega T_0/2)}{\omega} e^{-j\omega T_0/2} = T_0 \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{T_0}{2\pi}\omega\right) e^{-j\omega T_0/2}.$$

Dado que $W_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ (para este apartado),

$$X(\omega) = T_0 \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{W_0}\right) e^{-j\omega T_0/2}.$$

Al multiplicar por el tren de deltas,

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega) \cdot P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(kW_0)\delta(\omega - kW_0) \\ &= T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\left(\frac{kW_0}{W_0}\right) e^{-jkW_0T_0/2}\delta(\omega - kW_0) \\ &= T_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(k)\, e^{-jk\pi}\delta(\omega - kW_0). \end{aligned}$$

Nótese que

$$\mathrm{sinc}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

por lo que

$$Y(\omega) = T_0 \cdot \delta(\omega),$$
$$y(t) = \frac{1}{W_0}.$$

La solución es coherente con lo obtenido en el apartado anterior.

Ejercicio 5.8

Un determinado proceso de adquisición de datos basado en técnicas de Resonancia Magnética proporciona la señal de salida $X(\omega)$ en el dominio de Fourier. En lugar de trabajar con la señal en frecuencia se suele trabajar con la señal temporal $x(t)$, obtenida mediante su transformada inversa de Fourier. Dado que esta señal puede ser compleja, realmente se trabaja con su módulo $|x(t)|$.

Se define la señal

$$x_M(t) = |x(t)|^2 = x_R(t)^2 + x_I(t)^2,$$

donde $x_R(t)$ es la parte real de $x(t)$ y $x_I(t)$ es la parte imaginaria de $x(t)$. El proceso aparece resumido en la siguiente figura:

$$X(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t) \longrightarrow \boxed{|.|^2} \longrightarrow x_M(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_M(\omega)$$

1. Suponiendo que $x(t) = \frac{\sin At}{2\pi t}$ calcule la transformada de Fourier de $x_M(t)$ (Tenga en cuenta que $x(t)$ es ahora una señal real, es decir, $x(t) = x_R(t)$, $x_I(t) = 0$).

2. Un problema en el sensor hace que se introduzcan errores en la captación de los datos que se pueden modelar como deltas. El sistema da ahora como salida la señal

$$X_2(\omega) = X(\omega) + \delta(\omega - \omega_0).$$

Calcule $x_2(t)$, su parte real $x_{R_2}(t)$ y su parte imaginaria $x_{I_2}(t)$.

3. (0.65 pt.) Sea ahora

$$x_{M_2}(t) = |x_2(t)|^2 = x_{R_2}(t)^2 + x_{I_2}(t)^2.$$

Calcule la transformada de Fourier de $x_{M_2}(t)$.

$$X(\omega) + \delta(\omega - \omega_0) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x_2(t) \longrightarrow \boxed{|.|^2} \longrightarrow x_{M_2}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_{M_2}(\omega)$$

4. Encuentre para qué valores de ω_0 va a ser posible obtener $x_M(t)$ a partir de $x_{M_2}(t)$ utilizando para ello un filtro paso bajo. (Nota: Considere que en el proceso vamos a poder ser capaces de eliminar cualquier delta aislada que aparezca en el dominio de Fourier).

Resolución

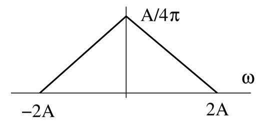
1. Dado que la señal en tiempo es $x_M(t) = x^2(t)$, en frecuencia será

$$X_M(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X(\omega).$$

La transformada de Fourier de $x(t)$ se puede calcular directamente con las tablas, y va a ser un pulso cuadrado:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1/2, & |\omega| \leq A \\ 0, & |\omega| > A \end{cases}$$

La convolución de dos pulsos cuadrados será un pulso triangular, con lo que $X_M(\omega)$ será:



2. Sin más que hacer la transformada inversa:

$$x_2(t) = x(t) + \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t},$$

y separando parte real e imaginaria (teniendo en cuenta que $x(t)$ es real):

$$x_{R_2}(t) = x(t) + \frac{1}{2\pi} \cos(\omega_0 t),$$

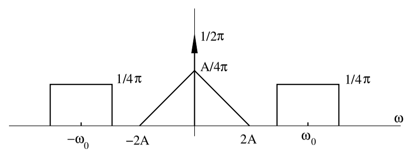
$$x_{I_2}(t) = \frac{1}{2\pi} \sin(\omega_0 t).$$

3. Calculamos en primer lugar $x_{M_2}(t)$ (teniendo en cuenta que $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$):

$$\begin{aligned} x_{M_2}(t) &= x_{R_2}(t)^2 + x_{I_2}(t)^2 \\ &= (x(t) + \frac{1}{2\pi}\cos(\omega_0 t))^2 + (\frac{1}{2\pi}\sin(\omega_0 t))^2 \\ &= x^2(t) + \left(\frac{\cos(\omega_0 t)}{2\pi}\right)^2 + \frac{2x(t)\cos(\omega_0 t)}{2\pi} + \left(\frac{\sin(\omega_0 t)}{2\pi}\right)^2 \\ &= x^2(t) + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 + \frac{x(t)\cos(\omega_0 t)}{\pi}, \end{aligned}$$

y su transformada de Fourier será:

$$\begin{aligned} X_{M_2}(\omega) &= X_M(\omega) + \frac{1}{2\pi}\delta(\omega) + \frac{1}{2\pi} X(\omega) * [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \\ &= X_M(\omega) + \frac{1}{2\pi}\delta(\omega) + \frac{1}{2\pi} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2\pi} X(\omega + \omega_0). \end{aligned}$$

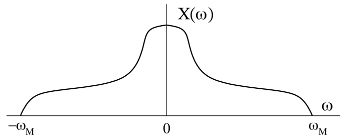


4. Para poder recuperar la señal se tiene que cumplir que la parte correspondiente a $X_M(\omega)$ no se solape con la parte de $X(\omega - \omega_0)$, es decir

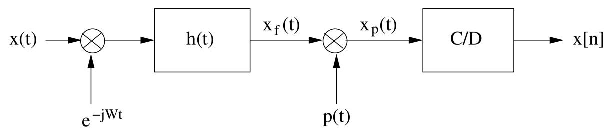
$$2A < \omega_0 - A \implies \omega_0 > 3A.$$

Ejercicio 5.9

Sea una señal de audio $x(t)$, tal que su transformada de Fourier $X(\omega) = 0$ si $|\omega| > \omega_M$, con $\omega_M = 4\pi \cdot 10^4$, tal y como se muestra en la figura:



Se asume que $X(\omega)$ es además real y par. Se pretende diseñar un sistema de comunicación móvil digital, para lo que va a ser necesario acondicionar la señal a los requerimientos del sistema, de acuerdo con el siguiente esquema:



- $W = 2\pi \cdot 3,4 \cdot 10^3$**.**
- $h(t)$ **es un filtro paso bajo de ganancia 1 y frecuencia de corte** $3,4kHz$**.**
- $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$**, con T el periodo de muestro que se corresponde con la frecuencia de Nyquist.**

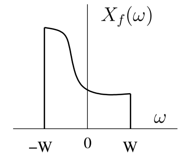
Se pide:

1. **Dibuje la transformada de Fourier de las señales $x_p(t)$ y $x[n]$.**
2. **Proponga un esquema para recuperar una versión paso bajo de $x(t)$ a partir de $x[n]$. Represente el esquema en el dominio temporal.**

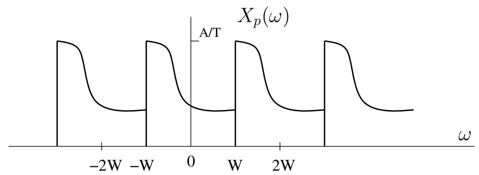
Resolución

1. Según el esquema propuesto, $X_f(\omega)$ es una versión desplazada y filtrada de $X(\omega)$:

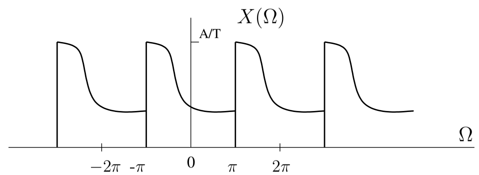
$$X_f(\omega) = X(\omega + W)H(\omega).$$



Asumiendo que la señal tiene una altura A, muestreamos la señal $x_f(t)$. la frecuencia de Nyquist será el doble de la frecuencia máxima de la señal a muestrear, esto es $\omega_s = 2W$ (con $W = 2\pi \cdot 3,4 \cdot 10^3$). De este modo, la señal muestreada en el dominio de frecuencia de tiempo continuo queda:



con $T = (2\pi)/W$ y en frecuencia de tiempo discreto:



2. Para recuperar la señal será necesario:
   - Conversión de deltas discretas a continuas ($x[n]$ a $x_p(t)$).
   - Realizar un filtrado paso bajo con frecuencia de corte W y ganancia T, para recuperar así la señal $x_f(t)$.
   - Desplazamiento en frecuencia para centrar la señal, $X_m(\omega) = X_f(\omega - W)$.

- Dado que la señal es real y par, la señal original cumple que $X(\omega) = X(-\omega)$. Sólo disponemos de una versión paso bajo de la mitad de la transformada de Fourier de la señal. Para recuperar la señal entera tendremos que abatir la TF:

$$X_{LP}(\omega) = X_m(\omega) + X_m(-\omega) = 2\text{Par}\{X_m(\omega)\}.$$

En el dominio temporal esto es

$$x_{LP}(t) = x_m(t) + x_m(-t) = 2\text{Par}\{x_m(t)\}.$$

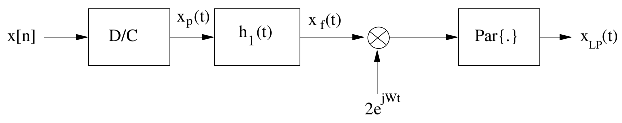
Alternativamente podría plantearse una solución del tipo

$$X_{LP}(\omega) = X_m(\omega) + X_m^*(-\omega).$$

En el dominio temporal esto es

$$x_{LP}(t) = x_m(t) + x_m^*(t) = 2\Re\{x_m(t)\}.$$

El diagrama de bloques queda de la siguiente forma:



siendo $h_1(t)$ un filtro paso bajo ideal con ganancia T y frecuencia de corte $\omega_c = W$.

Ejercicio 5.10

Sea la señal $g(t) = (\text{sinc}(Wt))^2$.

1. **Calcule el máximo periodo de muestreo para que la señal pueda ser recuperada utilizando un filtro paso bajo. (Suponga que el muestreo va a realizarse con un tren de impulsos equiespaciados).**
2. **Dibuje las transformadas de Fourier de la señal continua, de la señal continua muestreada y de la señal discreta. (Suponga que se trabaja por encima de la frecuencia de Nyquist.)**
3. **Calcule le relación existente entre la energía de la señal original $g(t)$ y la de la señal discreta $g[n]$.**
4. **Diseñe el filtro de reconstrucción para el periodo máximo de muestreo. (Dé la solución en el dominio temporal).**

Resolución

Como paso previo hay que calcular la transformada de Fourier de la señal $g(t)$. Si definimos

$$g_1(t) = \text{sinc}(Wt) = \frac{1}{W}\frac{\sin(W\pi t)}{\pi t},$$

entonces

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}G_1(\omega) * G_1(\omega).$$

La transformada de Fourier de $g_1(t)$ es un pulso cuadrado entre $[-\pi W, \pi W]$ de altura $1/W$. Por lo tanto la transformada de $g(t)$ será un pulso triangular entre $[-2\pi W, 2\pi W]$ y con altura $1/W$ en el origen, tal como se muestra en la figura inferior.

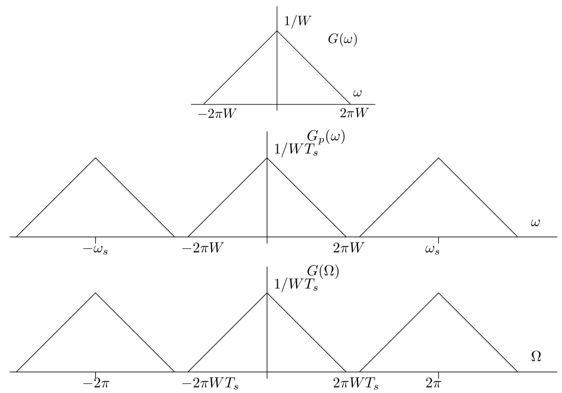
1. Según el teorema de Nyquist la mínima frecuencia de muestreo es

$$\omega_{s_{\text{mín}}} = 2\omega_M,$$

siendo ω_M la máxima frecuencia de la señal. Por lo tanto en este ejercicio $\omega_{s_{\text{mín}}} = 4\pi W$, de donde

$$T_{s_{\text{máx}}} = \frac{2\pi}{\omega_{s_{\text{mín}}}} = \frac{1}{2W}.$$

2. Tal y como aparecen en la siguiente figura:



3. Según el teorema de Parseval podemos definir la energía de la señal continua en el dominio de la frecuencia:
$$E_C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G_c(\omega)|^2 d\omega,$$
siendo $G_c(\omega)$ la Transformada de Fourier de la señal continua. La de la señal discreta será
$$E_D = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |G(\Omega)|^2 d\Omega.$$
Si se hace el cambio de variable $\Omega = \omega T_s$:
$$\begin{aligned} E_D &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |G(\Omega)|^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} |G(\omega T_s)|^2 T d\omega. \end{aligned}$$
Nótese que $G(\omega T_s)$ va a ser equivalente a lo que antes se ha llamado $G_p(\omega)$:
$$\begin{aligned} E_D &= \frac{T_s}{2\pi}\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} |G_p(\omega)|^2 d\omega = \frac{T_s}{2\pi}\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \frac{1}{T_s^2}|G_c(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{T_s}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G_c(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{T_s}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G_c(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{T_s}E_C. \end{aligned}$$
Luego la relación es
$$E_D = \frac{1}{T_s}E_C.$$
NOTA: Puede llegarse a la misma relación por caminos erróneos y con razonamientos incompletos, la mayoría de las veces por pura casualidad. Por ejemplo no es correcto:
   - Argumentar que $\int_{-\infty}^{\infty} |G_c(\omega)|^2 d\omega$ es el área de la señal $G(\omega)$ al cuadrado. Realmente es el área del cuadrado de la señal (que no es lo mismo):
$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_c(\omega)|^2 d\omega \neq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |G_c(\omega)| d\omega\right)^2$$
   - Argumentar que como $G_c(\omega)$ y $G(\Omega)$ tienen la misma forma salvo un escalado por T_s, su energía estará también escalada T_s. Nótese que la energía depende de la señal al cuadrado.
4. El filtro de reconstrucción será un filtro paso bajo de ganancia $T_s = \frac{1}{2W}$ y frecuencia de corte $\frac{\omega_s}{2} = 2\pi W$, lo que da lugar a
$$h(t) = \mathrm{sinc}(2Wt).$$
Nótese que para un proceso de muestreo con un tren de deltas equiespaciado la sinc ha de tener siempre altura 1.

Ejercicio 5.11

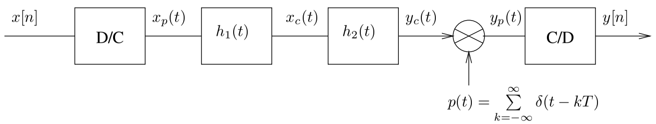
Sea $x(t)$ una señal limitada en tiempo, de tal modo que $x(t) = 0\ |t| > T_0$. Estudie el efecto que tiene en el dominio temporal el muestreo de su transformada de Fourier $X(\omega)$ por un tren de impulsos equiespaciados. (Supóngase que el tren de impulsos se modela como un tren de deltas equiespaciadas una distancia W, con $W < \frac{\pi}{T_0}$.) Ilustre el resultado con un ejemplo gráfico.

Resolución

Sea $X(\omega)$ la TF de $x(t)$. Al multiplicar por un tren de impulsos:
$$\begin{aligned} X_p(\omega) &= X(\omega)\cdot\sum_k \delta(\omega - kW), \\ x_p(t) &= x(t) * \mathcal{F}^{-1}\left\{\sum_k \delta(\omega - kW)\right\}. \end{aligned}$$
Sabemos que
$$\sum_n \delta\left(t - \frac{2\pi}{W}n\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} W\sum_k \delta(\omega - kW),$$
por lo que
$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\sum_k \delta(\omega - kW)\right\} = \frac{1}{W}\sum_n \delta\left(t - \frac{2\pi}{W}n\right),$$
y de aquí
$$x_p(t) = x(t) * \frac{1}{W}\sum_n \delta\left(t - \frac{2\pi}{W}n\right) = \frac{1}{W}\sum_n x\left(t - \frac{2\pi}{W}n\right).$$
Es decir, en el tiempo se duplica la señal $x(t)$ en múltiplos enteros de $T_s = \frac{2\pi}{W}$. Como $T_0 < \frac{\pi}{W}$ deducimos que $T_s > 2T_0$; las distintas réplicas no se van a solapar.

Ejercicio 5.12

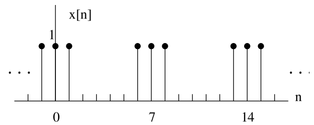
El sistema de la figura permite procesar señales discretas utilizando para ello sistemas continuos.



Los bloques C/D y D/C convierten trenes de impulsos en muestras discretas de la misma amplitud que los impulsos y viceversa, respectivamente. $h_1(t)$ es un filtro paso bajo de reconstrucción, con ganancia T y frecuencia de corte $\frac{\pi}{T}$. $h_2(t)$ es el respuesta al impulso del sistema continuo que realizará el procesado. Modelamos este procesado como un filtrado paso bajo ideal, dado por

$$H_2(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$x[n]$ es la secuencia discreta periódica de la figura:



1. **Calcule $X_c(\omega)$.**
2. **Calcule y dibuje $y[n]$ suponiendo $T = 1$.**
3. **Calcule (en tanto por ciento) la potencia media perdida por $x[n]$ al pasar por el sistema.**

Resolución

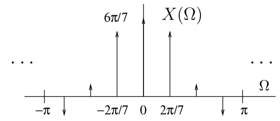
1. Por tratarse de una señal periódica, la TF de $x[n]$ se calcula a partir de los coeficientes de la serie de Fourier:

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=<N>} a_k \delta_p\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N}\right).$$

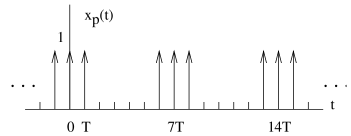
Por tratarse de una señal discreta con $N = 7$, habrá 7 coeficientes de Fourier:

$$a_k = \frac{1}{7}\sum_{-1}^{1} 1 \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{7}n} = \frac{1}{7}(1 + 2\cos(k\frac{2\pi}{7})),$$

con $k = 0, \cdots, 6$, o, si tomamos un periodo centrado en el origen, $k = -3, \cdots, 3$.

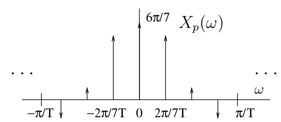


Al pasar la señal por un bloque D/C las deltas discretas ($\delta[n]$) de $x[n]$ pasan a deltas continuas ($\delta(t)$). En el dominio discreto están equiespaciadas 1. En el dominio continuo estarán equiespacidas una distancia T. (Se sabe ya que el filtro de reconstrucción debe tener su frecuencia de corte a la mitad de la frecuencia de muestreo. Si $\omega_c = \pi/T$, el periodo de muestreo es T.) La señal $x_p(t)$ quedará:



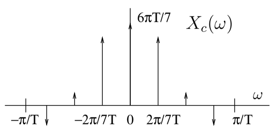
La señal $X_p(\omega)$ será igual que $X(\Omega)$ pero con un escalado en el eje ω (los valores se dividen por T).

$$X_p(\omega) = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-3}^{3} a_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{7T} - l\frac{2\pi}{T}).$$



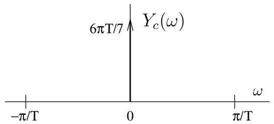
Al aplicar el filtro de reconstrucción se multiplica la señal por T y pasa por el filtro sólo un periodo (que se corresponde con $X(\Omega)$ entre $-\pi$ y π). Por lo tanto aparecerán 7 muestras, que se corresponden con los 7 coeficientes de la SF.

$$X_c(\omega) = 2\pi T \sum_{k=-3}^{3} a_k \delta(\omega - k\frac{2\pi}{7T}) = \frac{2\pi T}{7} \sum_{k=-3}^{3} (1 + 2\cos(k\frac{2\pi}{7}))\delta(\omega - k\frac{2\pi}{7T})$$



2. Al pasar la señal $X_c(\omega)$ por el filtro $H_2(\omega)$ queda únicamente la delta del origen:

$$Y_c(\omega) = 2\pi T a_0 \delta(\omega) = 2\pi a_0 \delta(\omega).$$



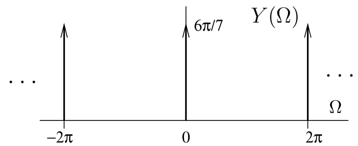
Al muestrear esta señal en tiempo, en frecuencia queda:

$$Y_p(\omega) = 2\pi a_0 \sum_k \delta(\omega - 2\pi k),$$

que al pasar a TF de tiempo discreto resulta:

$$Y(\Omega) = 2\pi a_0 \delta_p(\Omega),$$

siendo su transformada inversa $y[n] = a_0 = \frac{3}{7}$.



3. Calculamos la Potencia media de una señal periódica:

$$P_{av} = \frac{1}{N} \sum_{<N>} |x[n]|^2.$$

Para la señal de entrada:

$$P_{av_1} = \frac{1}{7} \sum_{-1}^{1} 1^2 = \frac{3}{7}.$$

Para la señal de salida:

$$P_{av_2} = \left(\frac{3}{7}\right)^2.$$

El tanto por ciento de potencia de la entrada que llega a la salida será $\frac{(3/7)^2}{3/7} =$ 43 %. Por lo tanto se pierde el 57 % de la potencia.

Ejercicio 5.13

Se va a proceder al estudio de un pulso rectangular $r(t)$, definido como

$$r(t) = \begin{cases} a, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

1. **Dibuje el módulo de la transformada de Fourier de $r(t)$, $|R(\omega)|$.**
2. **Se muestrea $R(\omega)$ con un tren de deltas equidistantes ω_0, dando lugar a la señal**

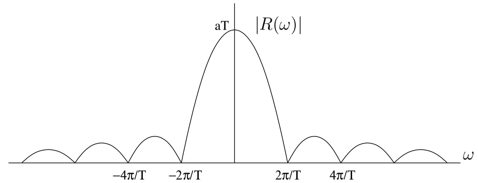
$$R_p(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k\omega_0)\delta(\omega - k\omega_0).$$

   Dibuje $R_p(\omega)$ para $|\omega| \leq \frac{4\pi}{T}$ cuando ω_0 vale $\frac{2\pi}{4T}$, $\frac{2\pi}{2T}$ y $\frac{2\pi}{T}$.

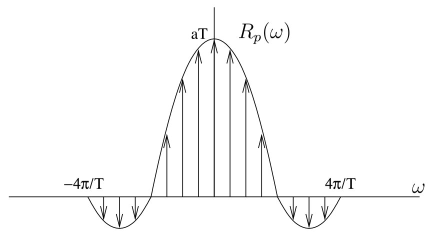
3. **Dibuje la función temporal $r_p(t)$ para cada uno de los valores de ω_0 del apartado anterior.**

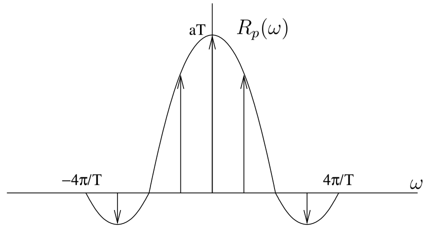
Resolución

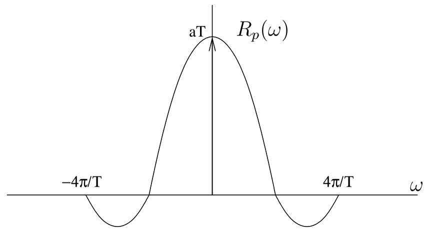
1. $R(\omega) = aT\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$.



2. Ver figura siguiente:







3. La función temporal se convierte en una serie de Fourier (función periódica):

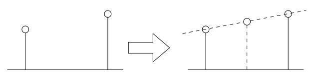
$$r_p(t) = \frac{aT}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{kT}{T_0}\right) e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t},$$

con $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

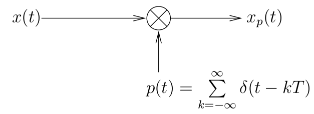
Nótese que para $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ la señal se limita a $r_p(t) = a$.

Ejercicio 5.14

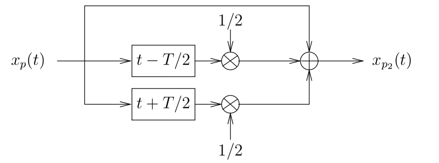
En el siguiente problema se estudiará el efecto de la interpolacion lineal sobre las señales discretas. Existen diversos métodos para interpolar un valor entre dos muestreas. El más sencillo de ellos es interpolar mediante una recta, que equivale a tomar el valor medio:



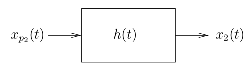
Para estudiar el efecto de esta interpolación sobre la señal muestreada, supongamos el siguiente esquema de muestreo:



Por simplicidad estudiaremos el proceso de interpolación sobre la señal $x_p(t)$. La interpolación lineal puede realizarse mediante el siguiente diagrama de bloques:



1. **Calcule la respuesta al impulso del sistema interpolador $h_p(t)$, de tal manera que $x_{p_2}(t) = x_p(t) * h_p(t)$. Dibuje su transformada de Fourier $H_p(\omega)$.**
2. **Para una señal de entrada genérica $x(t)$ con transformada de Fourier $X(\omega)$ de banda limitada tal que $X(\omega) = 0$ si $|\omega| > \omega_m$ y $\omega_m < \frac{\pi}{T}$, calcule analíticamente y dibuje $X_p(\omega)$ y $X_{p_2}(\omega)$.**
3. **Sea la señal $x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4T}t\right)$. Dibuje $x_p(t)$, $x_{p_2}(t)$ y sus transformadas de Fourier.**
4. **La señal interpolada trata de aproximar una señal muestreada al doble de la frecuencia de muestreo original. Por eso, para recuperar la señal continua pasamos $x_{p_2}(t)$ por un filtro paso bajo $h(t)$ con frecuencia de corte $\omega_c = \frac{2\pi}{T}$ y ganancia $2T$:**



Calcule $x_2(t)$ para la señal $x(t)$ del apartado anterior.

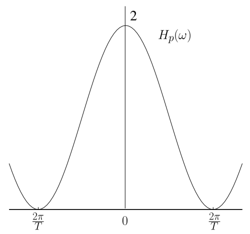
Resolución

1. La respuesta al impulso de un sistema se define como la salida del sistema cuando a la entrada hay una delta (impulso):

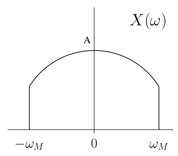
$$h_p(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t - T/2) + \frac{1}{2}\delta(t + T/2).$$

Su transformada de Fourier será:

$$H_p(\omega) = 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega T/2} + \frac{1}{2}e^{+j\omega T/2} = 1 + \cos\left(\omega\frac{T}{2}\right).$$

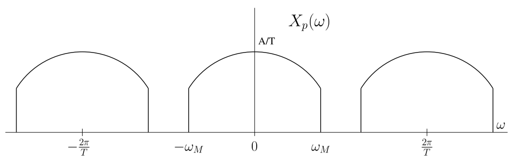


2. Supongamos una señal $x(t)$ con transformada de Fourier limitada en banda tal y como se representa a continuación:



La señal $x_p(t)$ será la señal muestreada con transformada de Fourier

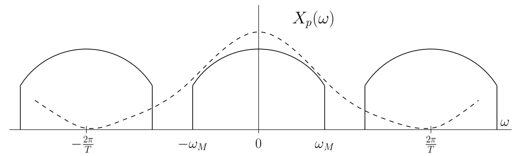
$$X_p(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right).$$

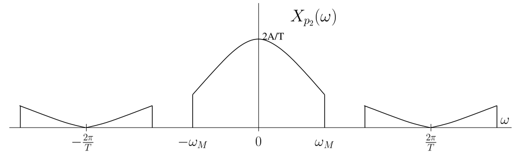


De este modo, la señal $X_{p_2}(\omega)$ será simplemente

$$\begin{aligned} X_{p_2}(\omega) &= X_p(\omega)H_p(\omega) \\ &= X_p(\omega)\left(1 + \cos\left(\omega\frac{T}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)\left(1 + \cos\left(\omega\frac{T}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

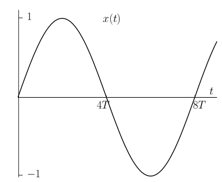
Por lo tanto, la señal $X_{p_2}(\omega)$ será la señal $X_p(\omega)$ *modulada* por un coseno alzado:



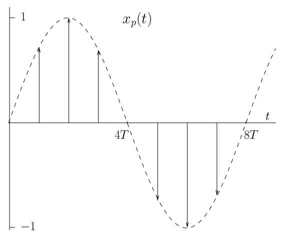


Nótese que la nueva señal es periódica de periodo $2\omega_s$, mientras que la señal original $X_p(\omega)$ era periódica de periodo ω_s.

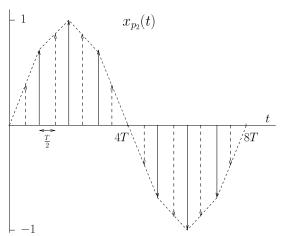
3. La señal $x(t)$ es un seno de la forma (representamos sólo el primer periodo)



Al muestrear lo que hacemos es tomar valores equiespaciados una distancia T (el periodo de muestreo):



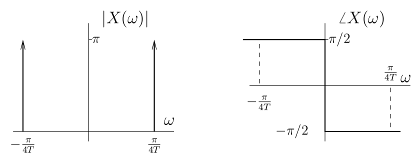
La señal $x_{p_2}(t)$ es la señal interpolada, de tal manera que entre cada dos muestras aparece una nueva cuyo valor es el valor medio de las deltas a la derecha y a la izquierda:



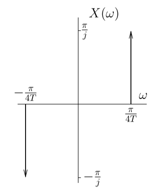
Veamos ahora sus transformadas de Fourier. La de $x(t)$ será:

$$X(\omega) = \frac{\pi}{j}\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4T}\right) - \delta\left(\omega + \frac{\pi}{4T}\right)\right],$$

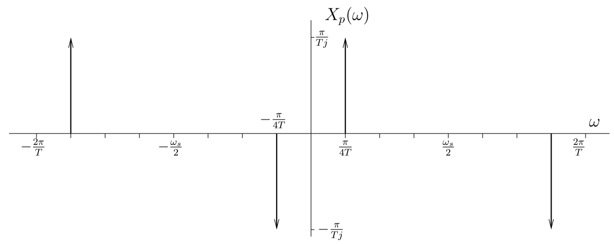
cuya representación en módulo y fase será:



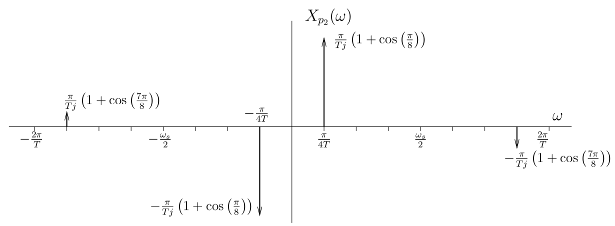
Por simplicidad, lo representaremos de la siguiente manera (aunque realmente sea un *exceso de notación*):



La señal $X_p(\omega)$ será la señal $X(\omega)$ duplicada en los múltiplos de la frecuencia de muestreo:



y la señal $X_{p_2}(\omega)$ será la misma multiplicada por el coseno alzado:



4. Al filtrar la señal, en el dominio de la frecuencia quedan 4 deltas:

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \frac{\pi}{2j}\left[\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4T}\right)\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) - \delta\left(\omega + \frac{\pi}{4T}\right)\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) - \right. \\ &\left. \delta\left(\omega - \frac{7\pi}{4T}\right)\left(1+\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right) + \delta\left(\omega + \frac{7\pi}{4T}\right)\left(1+\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)\right], \end{aligned}$$

y su transformada invera será:

$$x_2(t) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4T}t\right) - \frac{1+\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{4T}t\right).$$

Ejercicio 5.15

En el siguiente problema se estudiará un sistema de telefonía digital. El oído humano capta frecuencias comprendidas entre 20Hz y 20kHz. Supondremos que se corresponde con un espectro simétrico centrado en cero y comprendido entre -20kHz y 20 kHz. Diversos estudios demuestran que la voz humana tiene la mayor parte de la potencia en una banda de frecuencia comprendida entre -3.4 y 3.4kHz.

1. **Calcule el máximo periodo de muestreo para una señal de voz (suponiendo un ancho de banda de 3.4kHz) y para una señal de audio en general (suponiendo un ancho de banda de 20kHz).**
2. **Suponga que a partir de este momento se trabaja con una señal de voz con ancho de banda 20kHz, y que el $90\,\%$ de la potencia de la señal está en $|f| \leq 3{,}4$kHz. Se decide implementar un sistema de telefonía digital. El primer paso será por lo tanto muestrear la señal. Se opta por una frecuencia de muestreo de 8kHz. Dibuje la transformada de Fourier de la señal de voz continua muestreada y explique lo que ocurre.**
3. **Si un criterio de diseño del sistema es que la señal recibida tenga por lo menos el $90\,\%$ de la potencia de la señal original, proponga un esquema para el correcto muestreo de la señal de voz, manteniendo la frecuencia de muestreo del apartado anterior. Dibuje la transformada de Fourier de tiempo continuo y de tiempo discreto de la señal muestreada.**

Resolución

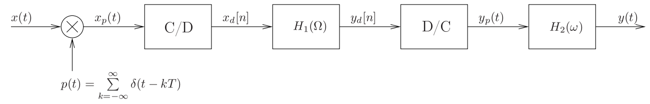
1. $T_{\text{voz}} \leq \frac{1}{7{,}2\times10^3}$ y $T_{\text{audio}} \leq \frac{1}{40\times10^3}$.
2. La señal de audio tiene una frecuencia mínima de muestreo $\omega_s = 2\pi \times 2 \times 20 \times 10^3$ (ó 40kKhz). Al muestrearse a 8kHz habrá aliasing.
3. Para un correcto muestreo es necesario filtrar la señal ANTES de muestrear. Para ello se pasa la señal por un filtro paso bajo de ganancia unitaria y frecuencia de corte comprendida entre 3,4 y 4kHz.

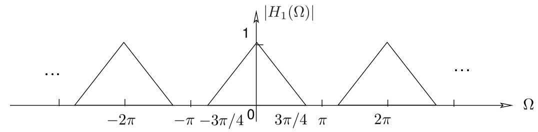
Ejercicio 5.16

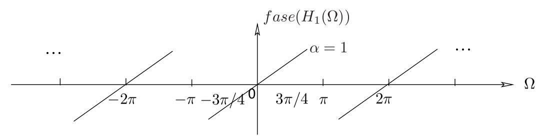
Considere el sistema y las señales mostradas a continuación, y considere que:

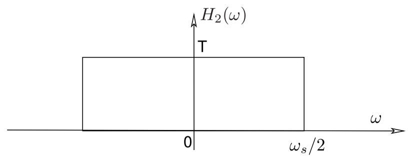
$$x(t) = \frac{1}{2} + \cos(20\pi t)\cos(40\pi t)$$

y la frecuencia de muestreo empleada es $\omega_s = 80\pi$ rad/s.









1. **Obtenga y dibuje, etiquetando claramente los ejes, las señales $X(\omega)$, $P(\omega)$, $X_p(\omega)$, $X_d(\Omega)$, $Y_d(\Omega)$, $Y_p(\omega)$ e $Y(\omega)$.**
2. **Obtenga la señal de salida, $y(t)$.**

Resolución

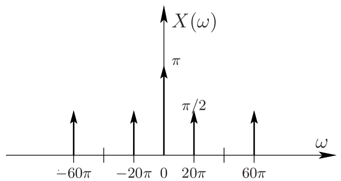
1. En primer lugar es conveniente expresar la señal de entrada, $x(t)$, de una forma más adecuada para encontrar su transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} + \cos(20\pi t)\cos(40\pi t) = \frac{1}{2} + \frac{e^{j20\pi t} + e^{-j20\pi t}}{2}\frac{e^{j40\pi t} + e^{-j40\pi t}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{e^{j60\pi t} + e^{-j20\pi t} + e^{j20\pi t} + e^{-j60\pi t}}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(60\pi t) + \frac{1}{2}\cos(20\pi t). \end{aligned}$$

Una vez que la entrada ha sido expresada de esta manera, su transformada de Fourier es inmediata:

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega - 60\pi) + \delta(\omega + 60\pi) + \delta(\omega - 20\pi) + \delta(\omega + 20\pi)\right].$$

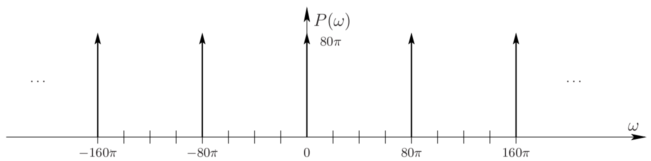
La dibujamos a continuación:



Como puede observarse la frecuencia máxima de la señal es de 60π. Sin embargo, la señal $p(t)$ tiene una frecuencia de muestreo $\omega_s = 80\pi$ (por lo tanto, el periodo de muestreo será $T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{1}{40}$), si bien la frecuencia de Nyquist para este caso sería $\omega_N = 120\pi$. Puesto que estamos muestreando a una frecuencia menor, se producirá un solapamiento en frecuencia. Como puede verse en las tablas, la transformada de Fourier de la señal $p(t)$ es un tren de deltas en frecuencia:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} P(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s).$$

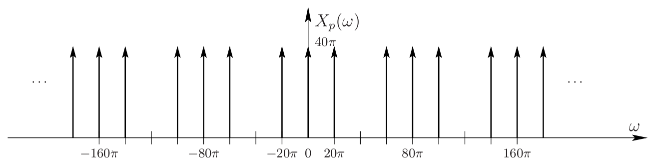
La gráfica de esta señal se muestra a continuación:



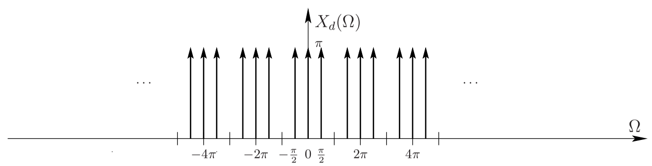
$x_p(t)$ es el producto entre $x(t)$ y $p(t)$. Por lo tanto, en frecuencia, $P(\omega)$ se obtiene mediante una convolución:

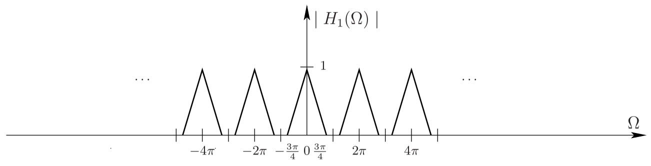
$$x_p(t) = x(t)p(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(\omega - k\omega_s).$$

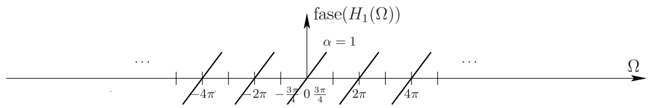
Debido al solapamiento la delta situada en 60π de la réplica situada en el origen se superpone con las delta situadas en $\omega_s - 20\pi$, correspondiente a la réplica centrada en $\omega_s = 80\pi$. Lo mismo sucede con la delta situada en -60π, y con las réplicas sucesivas. Globalmente, las deltas con área 20π se superponen con las correspondientes a las réplicas dando lugar a deltas de área 40π. Las deltas situadas en $\pm k\omega_s$ no sufren solapamiento y permanecen inalteradas.



Al pasar de tiempo continuo a discreto la transformada de Fourier de la señal sufre un escalado en frecuencia, de forma que la frecuencia de muestreo, ω_s, se convierte en 2π. Por lo tanto, las deltas situadas en 20π quedan en $\pi/2$, de modo que quedan dentro del rango de frecuencias para las que el filtro $H_1(\Omega)$ es no nulo.



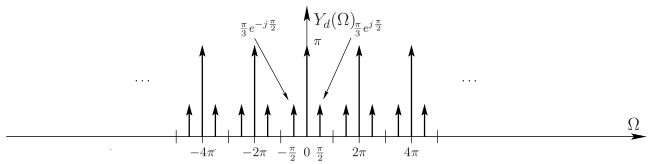




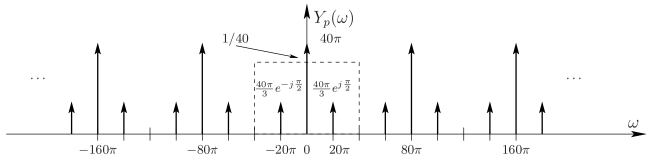
El área de las deltas situadas en $\pm\frac{\pi}{2}$ se ve afectada por el filtro $H_1(\Omega)$. En ese punto, la altura del filtro es 1/3, por lo que ambas deltas se verán afectadas en su área. Además, el desfase lineal introducido se traducirá en un factor $e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$, puesto que debemos considerar que el valor del filtro será:

$$H_1(\Omega) = |H_1(\Omega)|e^{j\angle\{H_1(\Omega)\}} = |H_1(\Omega)|e^{j\Omega}.$$

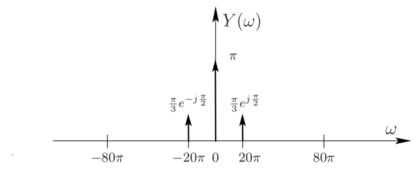
Puesto que se trata de deltas, hay que considerar el valor del módulo y la fase en el punto en el que están las deltas.



Una vez aplicado el filtro $H_1(\Omega)$, la nueva conversión de tiempo discreto a continuo se traduce en un escalado en el eje de frecuencias de modo que 2π se convierte de nuevo en la frecuencia de muestreo, $\omega_s = 80\pi$, con el consiguiente escalado en el área de las deltas.



Por último, al aplicar el filtro de reconstrucción eliminamos las réplicas, obteniendo la señal final $Y(\omega)$ que se representa a continuación.



2. Como puede verse en la figura, la señal $Y(\omega)$ puede expresarse de la manera siguiente:

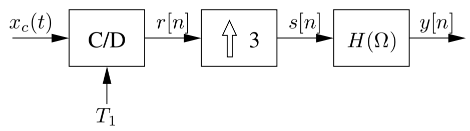
$$Y(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{\pi}{3}\left[e^{j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega - 20\pi) + e^{-j\frac{\pi}{2}}\delta(\omega + 20\pi)\right].$$

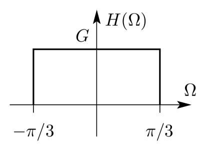
Utilizando las tablas de transformadas, es inmediato comprobar que la transformada inversa de dicha señal es:

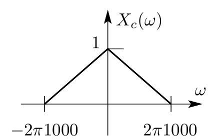
$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{e^{j(20\pi t + \pi/2)} + e^{-j(20\pi t+\pi/2)}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ejercicio 5.17

Considere el sistema mostrado en la figura, donde el bloque intermedio tiene una relación entrada-salida $s[n] = r_{(3)}[n]$, es decir, una expansión en el tiempo.

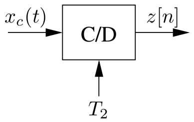






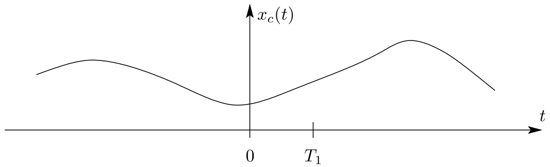
1. Para $T_1 = 1/3000$ s., obtenga y represente $R(\Omega)$, $S(\Omega)$ e $Y(\Omega)$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Considere ahora el sistema mostrado en figura siguiente y obtenga los valores de T_2 y G, distintos de cero, tales que $z[n] = y[n]$.



3. Obtenga las relaciones entrada-salida en el tiempo para cada uno de los tres subsistemas mostrados en la figura inicial, es decir, $r[n]$ en función de $x_c(t)$, $s[n]$ en función de $r[n]$ e $y[n]$ en función de $s[n]$.

4. Represente $r[n]$, $s[n]$ e $y[n]$ para la siguiente señal de entrada



Resolución

1. En primer lugar obtenemos la frecuencia de muestreo:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_1} = 2\pi 3000.$$

Dado que $\omega_s > 2\omega_M$, siendo $\omega_M = 2\pi 1000$, la frecuencia máxima de la señal de entrada $X_c(\omega)$, no se produce aliasing en el muestreo.

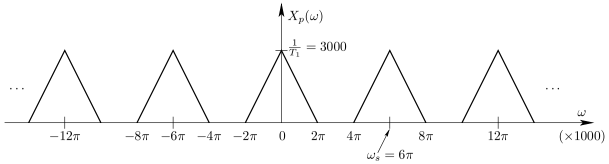
Para obtener el espectro de la señal discreta, $R(\Omega)$, pasamos previamente, como es habitual, por la señal continua muestreada con un tren de impulsos:

$$x_p(t) = x_c(t)p(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_1)\delta(t - nT_1),$$

cuyo espectro se relaciona con el de la señal de entrada por la siguiente ecuación conocida:

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\omega - k\omega_s),$$

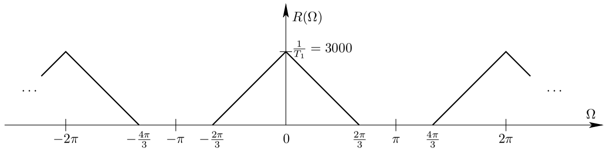
cuya representación se muestra en la figura.



Para obtener la transformada de Fourier de la señal muestreada discreta, $r[n]$ basta con normalizar en frecuencia $X_p(\omega)$:

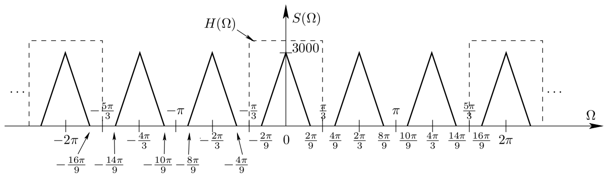
$$R(\Omega) = X_p\left(\frac{\Omega}{T_1}\right) = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{T_1}\right),$$

cuya representación en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ se muestra a continuación (téngase en cuenta que, como toda transformada de Fourier de tiempo discreto, es periódica de periodo 2π).



Para obtener $s[n]$ realizamos una expansión en el tiempo, también llamada inserción de ceros, debido a que una expansión por un factor L consiste en introducir $L-1$ ceros entre cada dos muestras de la señal. La propiedad correspondiente en el dominio de Fourier se encuentra en las tablas, y corresponde, debido a la dualidad tiempo-frecuencia, a una compresión del espectro por un factor L, en nuestro caso $L = 3$:

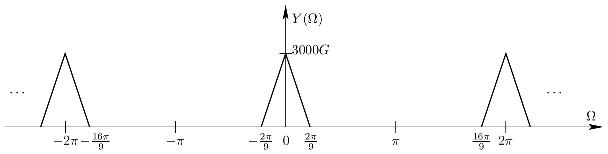
$$s[n] = r_{(3)}[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S(\Omega) = X(3\Omega),$$



Finalmente, para obtener la transformada de Fourier de la señal $y[n]$, se pasa la señal $s[n]$ por el filtro paso bajo $h[n]$ con frecuencia de corte $\Omega_c = \pi/3$, representado en línea discontinua en la figura anterior. Para obtener la salida, aplicando la propiedad de convolución de la transformada de Fourier:

$$Y(\Omega) = S(\Omega)H(\Omega),$$

obteniendo finalmente el siguiente espectro:



2. La señal mostrada anteriormente corresponde a un muestreo sin aliasing de la señal de entrada. Para calcular el valor del periodo de muestreo aplicado, simplemente debemos obtener el valor de T_2 que aplicado sobre la frecuencia ω_M produce una frecuencia de $\Omega_M = 2\pi/9$:

$$\omega_M T_2 = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi\omega_M}{9} = \frac{T_1}{3} = \frac{1}{9000}\text{ s.}$$

Para obtener el valor de la ganancia del filtro necesaria, G, tenemos en cuenta que la altura del espectro en el origen debe ser $1/T_2$ veces la del espectro continuo $X_c(\omega)$:

$$3000G = \frac{1}{T_2} = 9000 \Rightarrow G = 3.$$

3. La relación entre $r[n]$ y $x_c(t)$ es la del muestreo periódico:

$$r[n] = x_c(nT_1).$$

La relación entre $s[n]$ y $r[n]$ es la ecuación de inserción de ceros o expansión en el tiempo de una señal discreta:

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r[k]\delta[n-kL] = \begin{cases} r\left[\frac{n}{L}\right], & n = \dot{L} = kL, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Finalmente, para obtener la relación entre $y[n]$ y $s[n]$, calculamos en primer lugar la respuesta al impulso del filtro paso bajo dado, que se encuentra en las tablas:

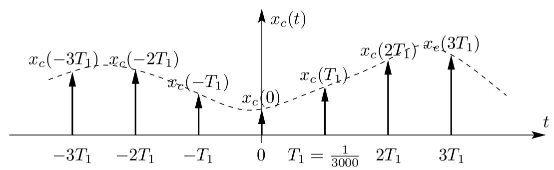
$$H(\Omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h[n] = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{\pi n} = \frac{1}{3}\operatorname{sinc}\left(\frac{n}{3}\right).$$

Teniendo en cuenta que la relación entrada-salida en un sistema LTI es la convolución con su respuesta al impulso obtenemos finalmente la relación:

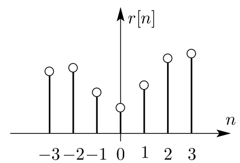
$$y[n] = s[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}(n-k)\right)}{\pi(n-k)}.$$

Como se ha demostrado en el apartado 2, esta señal debe ser igual a la que se obtendría realizando un muestreo 3 veces más rápido.

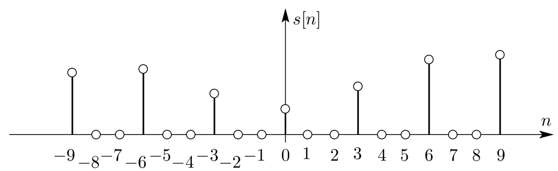
4. A partir de las relaciones obtenidas en el apartado anterior es inmediato obtener las representaciones de las señales pedidas. En primer lugar, obtenemos, al igual que hicimos en el primer apartado para las transformadas de Fourier, la señal intermedia $x_p(t)$.



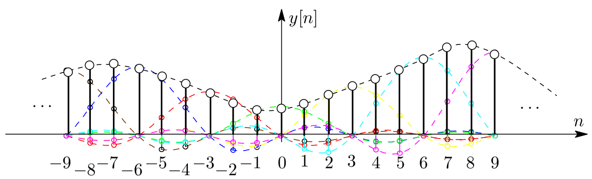
A partir de esta señal, es inmediato obtener $r[n]$, simplemente normalizando el eje de tiempos:



Realizando la inserción de 2 ceros entre cada dos muestras, obtenemos la señal $s[n]$:

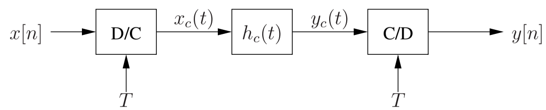


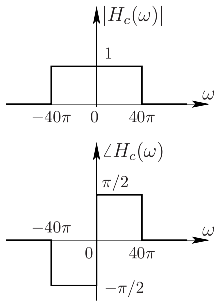
Finalmente, filtrando esta señal paso-bajo se obtiene la señal $y[n]$, que debe ser exactamente igual, como ya hemos dicho, a la señal que se obtendría realizando el muestreo con un periodo 3 veces menor, como se muestra en la figura. En esta figura se han representado en distintos colores las sincs que contribuyen en cada muestra; se puede observar que en las muestras múltiplos de 3 sólo es no nula la sinc centrada en cada una de ellas, mientras que en el resto de muestras, las colas permiten obtener de forma exacta el valor de la señal en dichos instantes.



Ejercicio 5.18

El sistema de la figura permite procesar señales discretas mediante un sistema continuo.





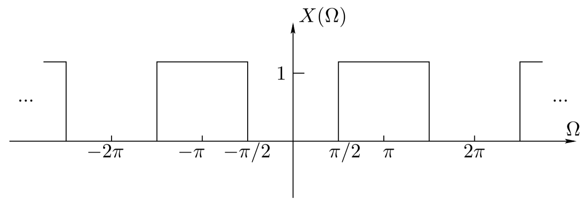
Para la frecuencia de muestreo $f_s = 60$ Hz y la señal de entrada:

$$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right),$$

1. **Obtenga y represente $X(\Omega)$.**
2. **Obtenga y represente $X_c(\omega), Y_c(\omega)$ e $Y(\Omega)$.**
3. **Calcule $y[n]$ (se recomienda utilizar la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier).**
4. **Calcule (en tanto por ciento), la energía total perdida por $x[n]$ al pasar por el sistema.**

Resolución

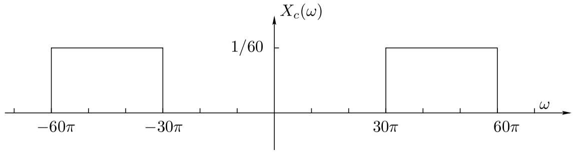
1. La señal $\frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$, como puede apreciarse en las tablas de pares transformados, es la respuesta al impulso de un filtro paso bajo de ganancia unidad. Por tanto, la señal $x[n]$ es un filtro paso alto de la misma ganancia, que tendrá la forma:



$$X(\Omega) = \begin{cases} 0, & |\Omega| < \pi/2 \\ 1, & |\Omega| \geq \pi/2 \end{cases}$$

Esta es la definición para el periodo fundamental: esta señal de variable continua es periódica de periodo 2π.

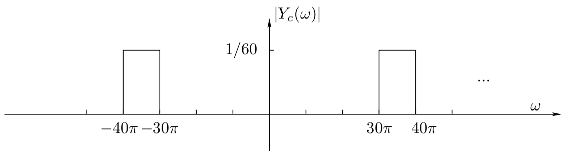
2. Tras pasar por el conversor D/A la señal es de variable continua, y no está multiplicada por un tren de deltas (el conversor D/A incluye la interpolación con sincs). Por tanto el espectro de $X_c(\omega)$ no es periódico. Dicho espectro será una versión escalada en frecuencia de $X(\Omega)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Por último, también es necesario tener en cuenta el escalado en amplitud debido al muestreo. El resultado final es, teniendo en cuenta que el periodo de muestreo es $T = 1/60$:

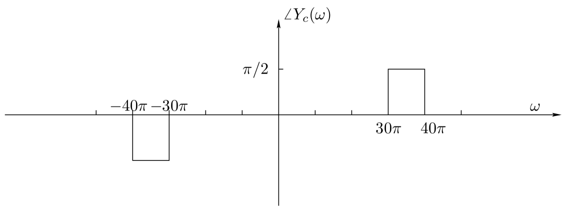


$$X_c(\omega) = \begin{cases} 1/60, & 30\pi \le |\omega| < 60\pi \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Esta definición es global, ya que $X_c(\omega)$ no es periódica.

Hasta este punto los espectros eran reales. Puesto que el filtro introduce un desfase no nulo, a partir de este punto debemos incluir la fase en las representaciones. Conviene notar que $\exp(j\pi/2) = j$ y que $\exp(-j\pi/2) = -j$:

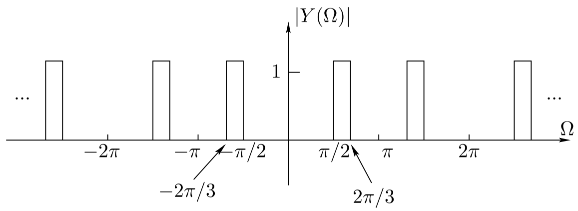


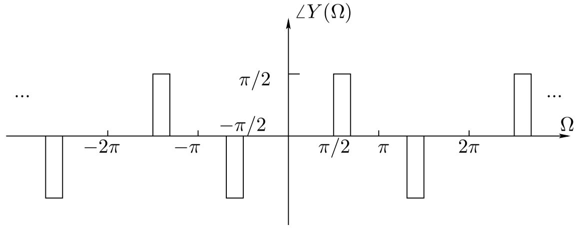


$$Y_c(\omega) = \begin{cases} j/60 \cdot \text{sign}(\omega), & 30\pi \le |\omega| < 40\pi \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Esta definición es global, ya que $Y_c(\omega)$ no es periódica.

Cuando pasa por el conversor A/D, la señal es primero muestreada a 60 Hz. (con lo que el espectro se repite de forma periódica y sufre un escalado por un factor $1/T$) y después pasa por el conversor de pulsos a secuencia (y es el eje de frecuencias el que se escala). Por tanto, obtenemos:





$$Y(\Omega) = \begin{cases} j \cdot \text{sign}(\Omega), & \pi/2 \le |\Omega| < 2\pi/3 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Esta es la definición para el periodo fundamental: esta señal de variable continua es periódica de periodo 2π.

3. Como se sugiere en el enunciado, la forma más sencilla de calcular $y[n]$ es emplear la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier en tiempo discreto:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} Y(\Omega)e^{j\Omega n} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-2\pi/3}^{-\pi/2} -je^{j\Omega n}d\Omega + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} je^{j\Omega}nd\Omega\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{2\pi/3} j\left(e^{j\Omega n} - e^{-j\Omega n}\right)d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{2\pi/3} -2\sin(\Omega n)d\Omega, \end{aligned}$$

haciendo un sencillo cambio de variable ($s = -\Omega$) en la primera integral. Para $n \neq 0$:

$$y[n] = \frac{1}{n\pi}\cos\Omega n\Big|_{\pi/2}^{2\pi/3} = \frac{\cos(2n\pi/3) - \cos(n\pi/2)}{n\pi}.$$

Para $n = 0$, es muy fácil comprobar que $y[0] = 0$.

4. Para solucionar este apartado usamos la relación de Parseval. La energía de cada una de las señales puede calcularse como:

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} |X(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{2}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 1 \cdot d\Omega = \frac{1}{2}.$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} |Y(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{2}{2\pi}\int_{\pi/2}^{2\pi/3} 1\cdot d\Omega = \frac{1}{6}.$$

El porcentaje de energía perdida al atravesar el sistema será por tanto:

$$\Delta = 100\cdot\frac{E_x - E_y}{E_x} = 100\cdot\frac{1/2-1/6}{1/2} = 100\cdot\frac{2}{3} \simeq 66,67\,\%.$$

Ejercicio 5.19

Considere la siguiente señal continua:

$$x(t) = \frac{\sin(10\pi t)}{\pi t}\cos(20\pi t).$$

Se pretende recortar la anchura del espectro de dicha señal con el fin de obtener

$$y(t) = \frac{\sin(5\pi t)}{\pi t}\cos(20\pi t).$$

1. **Diseñe el filtro necesario para dicho propósito. Determine $h(t)$ y $H(\omega)$.**
2. **Se pretende implementar dicho filtro mediante un sistema LTI discreto. Muestre el esquema necesario para realizar el proceso.**
3. **Utilizando como frecuencia de muestreo la frecuencia de Nyquist, y especificando una frecuencia adecuada para el filtro de reconstrucción, dibuje los espectros de las sucesivas señales que van obteniéndose ($X(\omega)$, $P(\omega)$, $X_p(\omega)$, $X_d(\Omega)$, $H_d(\Omega)$, $Y_d(\Omega)$, $Y_p(\omega)$, $Y_c(\omega)$).**

Resolución

1. Para determinar el filtro necesario para obtener $y(t)$ a partir de $x(t)$, comenzamos dibujando las transformadas de Fourier de ambas señales:

$$x(t) = \frac{\sin(10\pi t)}{\pi t}\cos(20\pi t) = x_1(t)x_2(t),$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X_1(\omega) * X_2(\omega)\right].$$

A partir de las tablas, es sencillo averiguar $X_1(\omega)$ y $X(\omega)$:

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le 10\pi \\ 0, & |\omega| > 10\pi \end{cases}$$

$$X_2(\omega) = \pi\left[\delta(\omega - 20\pi) + \delta(\omega + 20\pi)\right].$$

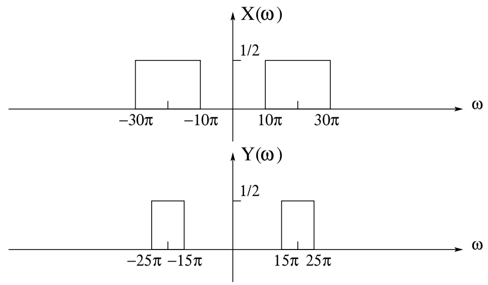
Por tanto:

$$X(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 10\pi \le |\omega| \le 30\pi \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

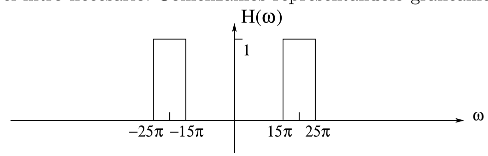
De forma análoga podemos hallar $Y(\omega)$:

$$Y(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 15\pi \le |\omega| \le 25\pi \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Gráficamente:



A partir de las representaciones gráficas de $X(\omega)$ e $Y(\omega)$, es sencillo determinar el filtro necesario. Comenzamos representándolo gráficamente:

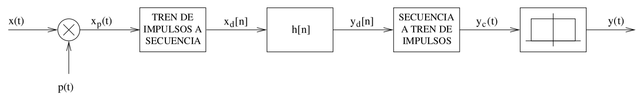


Expresamos ahora $H(\omega)$ y $h(t)$ de manera analítica:

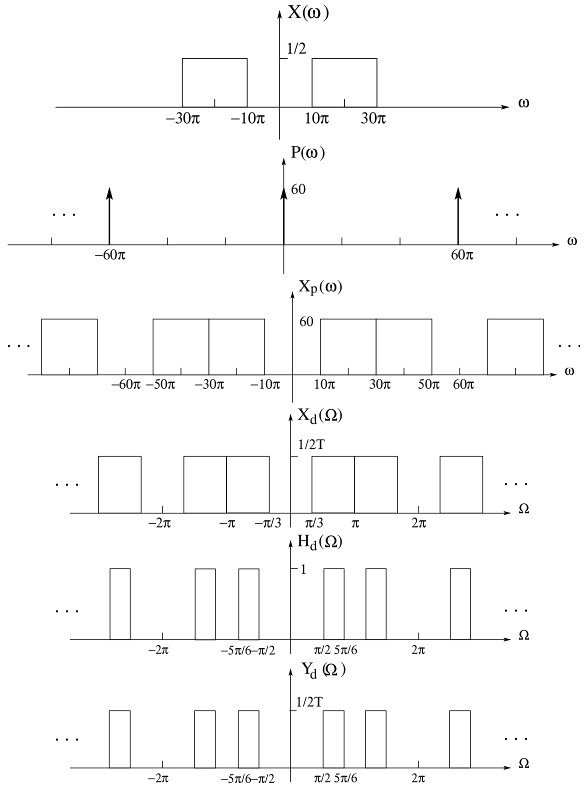
$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & 15\pi \le |\omega| \le 25\pi \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

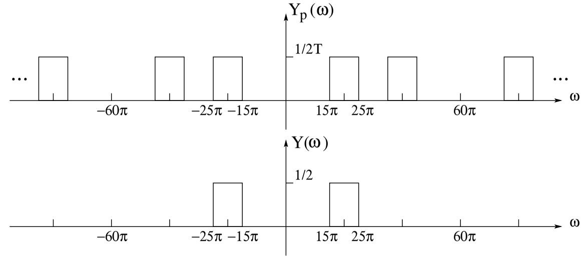
$$h(t) = 2\frac{\sin(5\pi t)}{\pi t}\cos(20\pi t).$$

2. Dibujamos continuación el esquema necesario para filtrar la señal continua $x(t)$ utilizando para ello un filtro discreto:



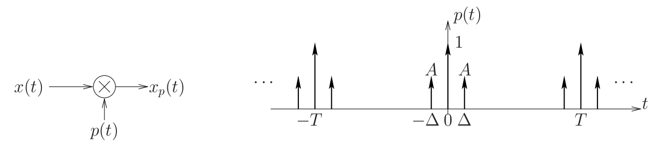
3. Puesto que la máxima frecuencia de $X(\omega)$ es $\omega_M = 30\pi$, tomamos como frecuencia de muestreo la frecuencia de Nyquist, $\omega_S = 2\omega_M = 60\pi$. Dibujamos entonces los espectros de las señales sucesivas:



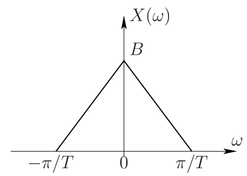


Ejercicio 5.20

Considere el esquema de muestreo representado en la figura inferior, donde los parámetros A, Δ y T de la señal de muestreo, $p(t)$, son ajustables, con $0 < \Delta < T/2$.

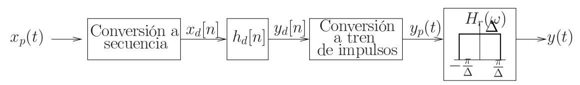


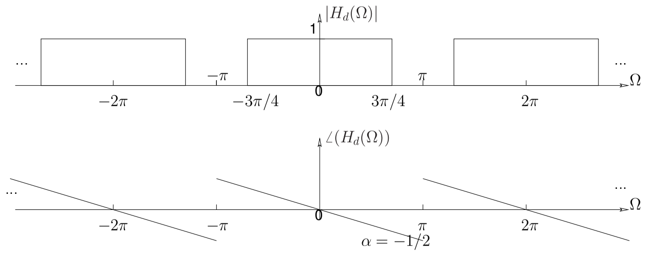
La señal de entrada a dicho sistema tiene el siguiente espectro:



1. **Obtenga una expresión para la transformada de Fourier de la señal de muestreo, $p(t)$, en función de los parámetros A, Δ y T. Indique la condición que deben cumplir dichos parámetros para que dicha transformada de Fourier sea periódica en frecuencia.**
2. **Para $\Delta = T/4$, $A = 1/4$, represente la transformada de Fourier de $p(t)$, así como la de la señal muestreada $x_p(t)$.**

3. Para $\Delta = T/3$, $A = 1$, obtenga la relación entre la señal $y(t)$ y la señal $x(t)$. La señal $y(t)$ se obtiene como salida del siguiente sistema, colocado en cascada con el anterior:





Resolución

1. Dado que $p(t)$ es una señal periódica, de periodo T, para calcular su transformada de Fourier necesitamos conocer previamente su serie de Fourier, para lo cual aplicamos la ecuación de análisis de la serie de Fourier a lo largo de un periodo, en cuyos extremos no hay deltas. Elegimos para tal efecto el periodo comprendido entre $[-T/2, T/2)$, instantes en los que nunca hay deltas, dada la condición $0 < \Delta < T/2$.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} p(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left[A\delta(t+\Delta) + \delta(t) + A\delta(t-\Delta)\right] e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \\ &= \frac{1}{T}\left[Ae^{jk\frac{2\pi}{T}\Delta} + 1 + Ae^{-jk\frac{2\pi}{T}\Delta}\right] = \frac{1}{T}\left[1 + 2A\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\Delta\right)\right], \quad \forall k. \end{aligned}$$

A partir de los coeficientes de la serie de Fourier es inmediato obtener la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right) \\ &= \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[1 + 2A\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\Delta\right)\right]\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right). \end{aligned}$$

Para que esta transformada de Fourier sea periódica el coseno discreto debe serlo (algo que como sabemos ocurre siempre). Por tanto debemos estudiar la periodicidad de $\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\Delta\right)$.

Para que sea periódico debe darse la condición:

$$\cos\left(k\frac{2\pi}{T}\Delta\right) = \cos\left((k+N)\frac{2\pi}{T}\Delta\right) = \cos\left(k\frac{2\pi}{T}\Delta + N\frac{2\pi}{T}\Delta\right),$$

siendo N el periodo de dicho coseno. Por tanto, para que sea periódico debe cumplirse:

$$N\frac{2\pi}{T}\Delta = 2\pi m, \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, la condición de periodicidad es:

$$\frac{\Delta}{T} = \frac{m}{N}, \text{ con } m, N \in \mathbb{Z}.$$

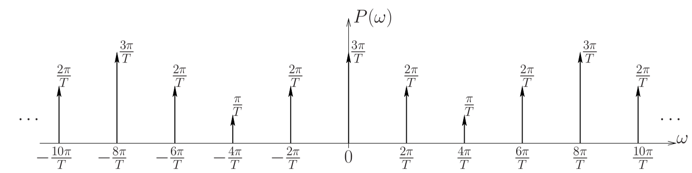
O lo que es lo mismo:

$$\frac{\Delta}{T} \in \mathbb{Q}.$$

2. Sustituyendo en la expresión de $P(\omega)$ para $\Delta = T/4$, $A = 1/4$, obtenemos la siguiente expresión:

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[1 + \frac{1}{2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right]\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right).$$

Representando $P(\omega)$ se obtiene:



Para obtener la transformada de Fourier de $x_p(t)$, teniendo en cuenta la propiedad de modulación:

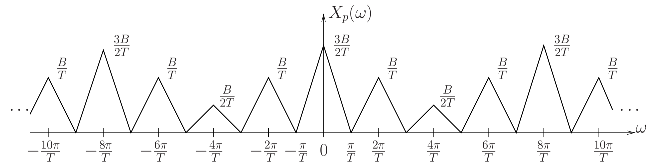
$$x_p(t) = x(t)p(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * P(\omega).$$

Sustituyendo $P(\omega)$ por su expresión:

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T}X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right] \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prop. distrib.} \\ \text{convolución}}}{=} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right] X\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right).$$

Representando $X_p(\omega)$ se obtiene finalmente:



3. Para $\Delta = T/3$, $A = 1$, obtenemos como señal de muestreo el tren de deltas periódicos de periodo Δ:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta),$$

con lo que el esquema de las dos figuras en cascada es el esquema estándar de procesado discreto de señales continuas con periodo de muestreo $\Delta = T/3$.

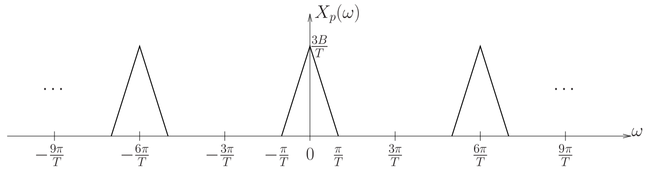
La transformada de Fourier de la señal de muestreo, $P(\omega)$ es:

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta}k\right) = \frac{6\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{6\pi}{T}k\right).$$

Para obtener la transformada de Fourier de la señal muestreada, $X_p(\omega)$, aplicamos de nuevo la propiedad de modulación:

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{2\pi}{\Delta}k\right) = \frac{3}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{6\pi}{T}k\right),$$

cuya representación es la siguiente:

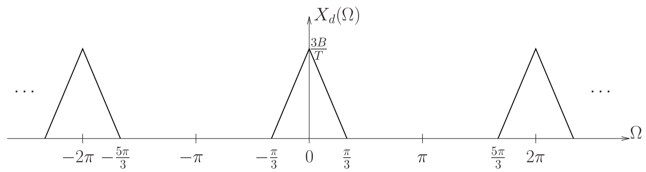


Tras el bloque conversor de impulsos a secuencia, se obtiene:

$$x_d[n] = x(n\Delta) = x(nT/3) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_d(\Omega) = X(\Omega/\Delta) = X(3\Omega/T).$$

$$X_d(\Omega) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{\Delta}\right) = \frac{3}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{T/3}\right).$$

Es decir, una expansión del eje de frecuencias con un factor $T/3$, obteniéndose el espectro $X(\Omega)$, representado a continuación:



El filtro $h_d[n]$ es un filtro paso bajo de fase lineal con frecuencia de corte $\Omega_c = 3\pi/4$. Su respuesta en frecuencia en el intervalo $[-\pi, \pi)$ es:

$$H_d(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega/2}, & 0 \leq |\Omega| < 3\pi/4, \\ 0, & 3\pi/4 < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

Como la frecuencia máxima de la señal $x_d[n]$ es $\pi/3$, el filtro deja pasar toda la señal y únicamente aplica el desfase. Por tanto, la relación entre las transformadas de Fourier a la salida y entrada de dicho filtro es:

$$Y_d(\Omega) = X_d(\Omega)e^{-j\Omega/2} = \frac{3}{T}e^{-j\frac{\Omega}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{T/3}\right).$$

Tras el bloque de conversión de secuencia a tren de impulsos, se desnormaliza en frecuencia, obteniendo la señal $y_p(t)$, cuya transformada de Fourier es:

$$\begin{aligned} Y_p(\Omega) &= Y_d(\omega\Delta) = Y_d(\omega T/3) = e^{-j\omega\frac{T}{6}} X_d(\omega T/3) \\ &= \frac{3}{T}e^{-j\omega\frac{T}{6}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - \frac{6\pi k}{T}\right). \end{aligned}$$

El filtro de reconstrucción, $H_r(\omega)$, es un filtro paso bajo de frecuencia de corte $\pi/\Delta = 3\pi/T$ y de ganancia $\Delta = T/3$. Por tanto, deja pasar la réplica en el origen ($k = 0$) y elimina el resto, compensando además el factor $3/T$ de la amplitud de la señal.

Por tanto, la salida del sistema tiene como transformada de Fourier:

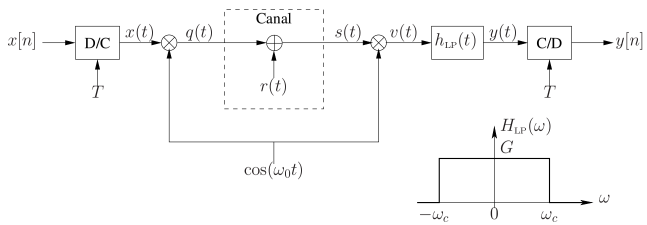
$$Y(\omega) = e^{-j\omega\frac{\Delta}{2}}X(\omega) = e^{-j\omega\frac{T}{6}}X(\omega).$$

Finalmente, aplicando la propiedad de desplazamiento en el tiempo de la transformada de Fourier, se obtiene la relación entre la salida y la entrada del sistema:

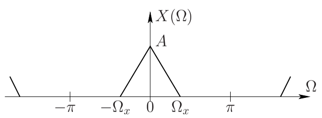
$$y(t) = x\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) = x\left(t - \frac{T}{6}\right).$$

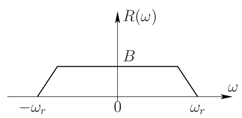
Ejercicio 5.21

El sistema mostrado en la figura inferior se usa para transmitir la señal discreta $x[n]$ a través de un cierto canal de comunicaciones en el que existe un ruido aditivo, $r(t)$, de banda limitada.



A continuación se muestran las transformadas de Fourier de las señales $x[n]$ y $r(t)$:





1. **Se desea que la salida del sistema, $y[n]$, sea igual que su entrada, $x[n]$. Determine de forma razonada el rango de ω_0, en función de ω_r, Ω_x y T para el que esto es posible.**

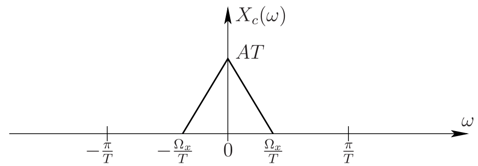
2. **Dado un valor de ω_0 en el rango de frecuencias obtenido en el apartado anterior, determine el rango de valores válidos para ω_c y el valor de G para el que $y[n] = x[n]$.**
3. **Indique de forma razonada si es posible conseguir que $y[n] = x[n]$ sustituyendo el filtro continuo $H_{\mathbf{LP}}(\omega)$ por un filtro discreto $H_{\mathbf{LP}}(\Omega)$ colocado tras el bloque C/D. En caso de serlo, obtenga las condiciones que deben cumplir los parámetros ω_0, ω_r, Ω_x y T. Obtenga, asimismo la respuesta al impulso de dicho filtro discreto, $h_{\mathbf{LP}}[n]$.**

Resolución

1. La salida del conversor D/C corresponde a la señal discreta $x[n]$ interpolada para obtener la señal $x_c(t)$ en el dominio continuo. La relación entre sus transformadas de Fourier es conocida:

$$X_c(\omega) = \begin{cases} TX(\omega T), & |\omega| < \frac{\pi}{T}, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Este espectro tiene la siguiente forma:

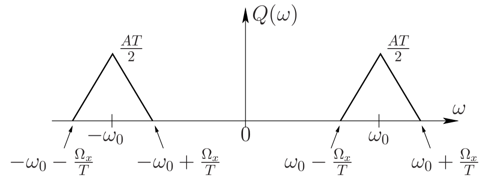


A continuación se obtiene la señal $q(t)$, cuya transformada de Fourier es fácil de obtener mediante la propiedad de modulación de la transformada de Fourier de tiempo continuo:

$$q(t) = x_c(t)\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Q(\omega) = \frac{1}{2\pi}X_c(\omega) * [\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)],$$

$$Q(\omega) = \frac{1}{2}[X_c(\omega + \omega_0) + X_c(\omega - \omega_0)],$$

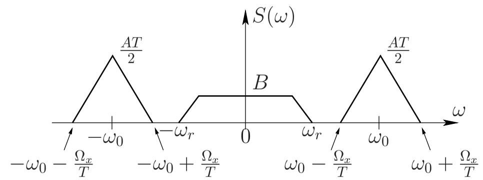
cuya representación es la siguiente:



Tras añadir el ruido aditivo y aplicando la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier, se obtiene el espectro de la señal a la salida del canal:

$$s(t) = q(t) + r(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S(\omega) = Q(\omega) + R(\omega),$$

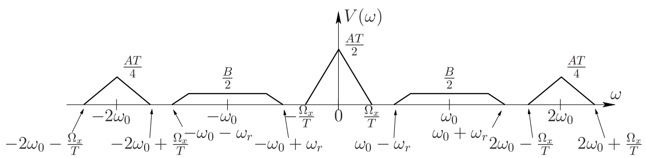
cuya representación queda:



De nuevo se vuelve a modular la señal con el coseno de la misma frecuencia y en fase con el anterior:

$$v(t) = s(t)\cos(\omega_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} V(\omega) = \frac{1}{2}S(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}S(\omega - \omega_0),$$

que queda representado de la siguiente forma:



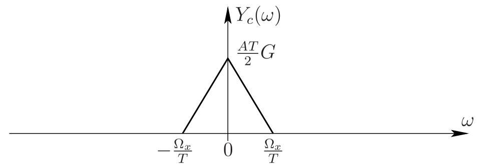
Mediante el filtro paso bajo nos quedamos con la réplica del origen y con el bloque de muestreo pasamos la señal de nuevo al dominio discreto. Por tanto, para que la réplica a la salida pueda ser exactamente igual a la original, es necesario que el filtro paso bajo sea el adecuado (apartado b) y que el ruido no esté solapado con la réplica del origen:

$$\frac{\Omega_x}{T} \le \omega_0 - \omega_r \Rightarrow \omega_0 \ge \omega_r + \frac{\Omega_x}{T}.$$

2. Como dijimos antes, $h_{\mathrm{LP}}(t)$ debe ser un filtro paso bajo que elimine las partes del espectro de $v(t)$ no deseadas. La frecuencia de corte del filtro debe estar en el rango:

$$\frac{\Omega_x}{T} \le \omega_c \le \omega_0 - \omega_r.$$

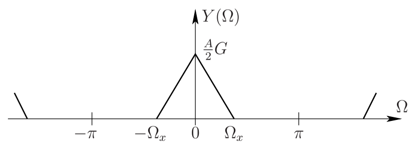
A la salida del filtro, la señal obtenida, $y_c(t)$ tiene como transformada de Fourier:



y tras el proceso de muestreo:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_c\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{T}\right),$$

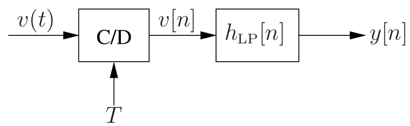
quedando representado de la siguiente forma:



Por tanto, para que $y[n] = x[n]$, la ganancia del filtro $h_{\mathrm{LP}}(t)$ debe ser:

$$G = 2.$$

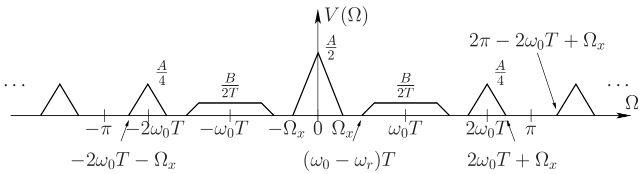
3. Sustituyendo el filtro paso bajo continuo por un filtro paso bajo discreto, el esquema que obtenemos es el siguiente:



El espectro de la señal muestreada, $v[n]$:

$$V(\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} V_c\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{T}\right),$$

queda representado de la siguiente forma:



Como se puede ver en la figura, si se filtra paso bajo las componentes espectrales no deseadas, se puede conseguir recuperar una réplica exacta de la señal original. Dado que sólo nos interesan las componentes espectrales que corresponden a la señal original y que vamos a filtrar paso bajo la señal $v[n]$ para eliminar el resto, podemos permitir cierto aliasing en el muestreo, que se eliminará mediante el filtro paso bajo, $h_{\mathrm{LP}}[n]$. Además se debe seguir cumpliendo la condición obtenida en el apartado 1 para que el ruido no se solape con la señal. Por tanto, las condiciones para que esto sea posible son las siguientes:

(1) $\Omega_x \leq 2\pi - (2\omega_0 T + \Omega_x) \Rightarrow \Omega_x \leq \pi - \omega_0 T,$

(2) $\omega_0 \geq \omega_r + \frac{\Omega_x}{T}$ (apartado 1).

Para recuperar la señal el filtro paso bajo debe tener los siguientes parámetros:

$$G' = 2,$$

$$\Omega_x \leq \Omega_c \leq (\omega_0 - \omega_r)T \stackrel{\text{óptimo}}{\Longrightarrow} \Omega_c = \frac{(\omega_0-\omega_r)T+\Omega_x}{2}.$$

Por último, su respuesta al impulso viene en las tablas:

$$h[n] = G'\frac{\mathrm{sen}(\Omega_c n)}{\pi n} = \frac{G'\Omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega_c}{\pi}n\right).$$

Nota: para distinguir las transformadas de las señales de entrada y de salida continuas y discretas, se ha añadido un subíndice "c" a las señales continuas, que en el enunciado se denotan como $x(t)$, $y(t)$ y $v(t)$.

Ejercicio 5.22

Sea una señal de tiempo continuo definida como

$$x(t) = \begin{cases} 3\cos(3t), & |t| \leq \pi/3 \\ 0, & |t| > \pi/3. \end{cases}$$

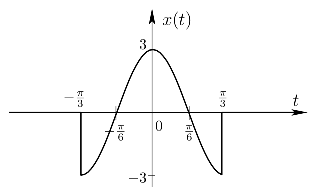
1. **Dibuje la señal $x(t)$ y su transformada de Fourier $X(\omega)$.**
2. **La señal $x(t)$ se muestrea con un tren de deltas equiespaciadas en el tiempo con periodo de muestreo $T_s = \pi/10$. Argumente si se podrá recuperar la señal original a partir de la muestreada utilizando un filtro paso-bajo.**
3. **Dibuje la señal muestreada continua $x_p(t)$ y la señal discreta $x[n]$.**
4. **Calcule una expresión analítica para $X(\Omega)$.**

Resolución

1. Para representar $x(t)$ obtenemos el periodo principal de $cos(3t)$:

$$\omega_0 = 3 \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3}.$$

Por tanto, en el intervalo $-\pi/3 \leq t \leq \pi/3$ hay un periodo del coseno, de altura 3, centrado en el origen:



Para calcular su transformada de Fourier, podemos expresar:

$$x(t) = x_1(t)x_2(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) = \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega),$$

siendo:

$$x_1(t) = 3\cos(3t), \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \pi/3, \\ 0, & |t| > \pi/3, \end{cases}$$

cuyas transformadas de Fourier están en las tablas:

$$X_1(\omega) = 3\pi\delta(\omega+3) + 3\pi\delta(\omega-3),$$

$$X_2(\omega) = \frac{2\,\mathrm{sen}(\omega\pi/3)}{\omega} = \frac{2\pi}{3}\,\mathrm{sinc}(\omega/3).$$

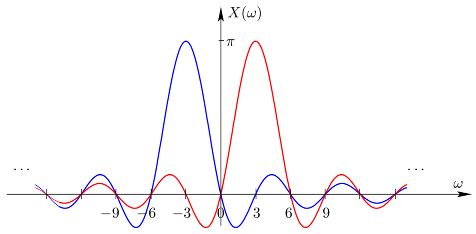
Por tanto:

$$X(\omega) = \pi[\delta(\omega+3) + \delta(\omega-3)] * [\mathrm{sinc}(\omega/3)],$$

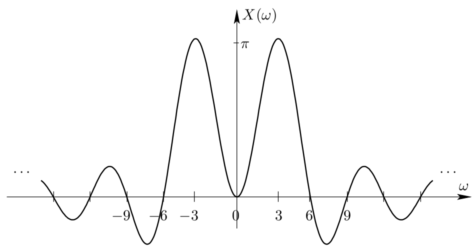
cuya expresión mediante sincs, más fáciles de representar es:

$$X(\omega) = \pi\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega+3}{3}\right) + \pi\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega-3}{3}\right).$$

Representando los dos sumandos por separado:



y finalmente su suma:



2. Dado que la señal $x(t)$ no es limitada en banda, como se ha comprobado en el apartado anterior, no existe una frecuencia, ω_M, tal que

$$X(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_M,$$

y por tanto no se cumple el teorema de Nyquist para ningún periodo de muestreo. En particular no se cumple para $T_s = \pi/10$.

3. Para obtener la señal muestreada $x_p(t)$ basta multiplicar la señal continua por la señal de muestreo ideal, $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$:

$$x_p(t) = x(t)p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nTs)\delta(t - nT_s).$$

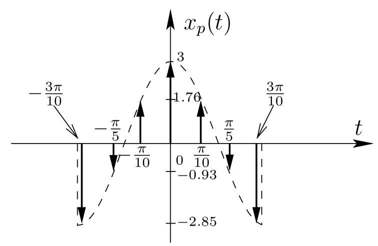
Teniendo en cuenta que $x(t)$ es no nula exclusivamente en el intervalo $-\pi/3 \leq t \leq \pi/3$, y que las deltas de dirac tienen una separación de $T_s = \pi/10$ entre sí, se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} x_p(t) =& 3\cos\left(\frac{-9\pi}{10}\right)\delta\left(t+\frac{3\pi}{10}\right) + 3\cos\left(\frac{-3\pi}{5}\right)\delta\left(t+\frac{\pi}{5}\right) + \\ &+ 3\cos\left(\frac{-3\pi}{10}\right)\delta\left(t+\frac{\pi}{10}\right) + 3\cos(0)\delta(t) + 3\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\delta\left(t-\frac{\pi}{10}\right) + \\ &+ 3\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\delta\left(t-\frac{\pi}{5}\right) + 3\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\delta\left(t-\frac{3\pi}{10}\right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el coseno es una función par:

$$\begin{aligned} x_p(t) =& 3\delta(t) + 3\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\left[\delta\left(t+\frac{3\pi}{10}\right) + \delta\left(t-\frac{3\pi}{10}\right)\right] + \\ &+ 3\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\left[\delta\left(t+\frac{\pi}{5}\right) + \delta\left(t+\frac{\pi}{5}\right)\right] \\ &+ 3\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\left[\delta\left(t+\frac{\pi}{10}\right) + \delta\left(t+\frac{\pi}{10}\right)\right], \end{aligned}$$

y cuya representación es simplemente el muestreo periódico cada T_s de la señal $x(t)$ representada en el apartado (1):



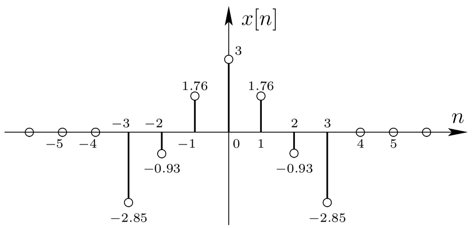
Finalmente, para representar $x[n]$ basta aplicar la relación entre la señal muestreada y la señal discreta:

$$x[n] = x(nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k].$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
x[n] =& 3\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\delta[n+3] + 3\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\delta[n+2]+\\
&+3\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\delta[n+1] + 3\delta[n] + 3\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\delta[n-1]+\\
&+3\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\delta[n-2] + 3\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\delta[n-3],
\end{aligned}$$

cuya representación gráfica es:



4. Para obtener una expresión analítica para $X(\Omega)$, lo más sencillo es obtenerla a partir de la expresión de $x[n]$, obtenida en el apartado anterior:

$$\begin{aligned}
X(\Omega) =& 3\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)e^{3j\Omega} + 3\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)e^{2j\Omega} + 3\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)e^{j\Omega} + 3+\\
&+3\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)e^{-j\Omega} + 3\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)e^{-2j\Omega} + 3\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)e^{-3j\Omega}.
\end{aligned}$$

Simplificando:

$$X(\Omega) = 6\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\cos(3\Omega) + 6\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\cos(2\Omega) + 6\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)\cos(\Omega) + 3.$$

Una expresión alternativa se obtiene mediante la aplicación directa de la ecuación de análisis de la transformada de Fourier de tiempo discreto y teniendo en cuenta que $x[n]$ es nula fuera del intervalo $-3 \leq n \leq 3$:

$$\begin{aligned}
X(\Omega) =& \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-3}^{3} 3\cos\left(\frac{3\pi}{10}n\right)e^{-j\Omega n}\\
=&\frac{3}{2}\sum_{n=-3}^{3}\left(e^{j\frac{3\pi}{10}n} + e^{-j\frac{3\pi}{10}n}\right)e^{-j\Omega n} = \frac{3}{2}\sum_{n=-3}^{3}\left[e^{-j\left(\Omega-\frac{3\pi}{10}\right)n} + e^{-j\left(\Omega+\frac{3\pi}{10}\right)n}\right]\\
=&\frac{3}{2}\frac{e^{3j\left(\Omega-\frac{3\pi}{10}\right)} - e^{-4j\left(\Omega-\frac{3\pi}{10}\right)}}{1-e^{-j\left(\Omega-\frac{3\pi}{10}\right)}} + \frac{3}{2}\frac{e^{3j\left(\Omega+\frac{3\pi}{10}\right)} - e^{-4j\left(\Omega+\frac{3\pi}{10}\right)}}{1-e^{-j\left(\Omega+\frac{3\pi}{10}\right)}}\\
=&\frac{3}{2}\frac{\cancel{e^{-\frac{1}{2}j\left(\Omega-\frac{3\pi}{10}\right)}}}{\cancel{e^{-\frac{1}{2}j\left(\Omega-\frac{3\pi}{10}\right)}}}\left[\frac{e^{\frac{7}{2}j\left(\Omega-\frac{3\pi}{10}\right)} - e^{-\frac{7}{2}j\left(\Omega-\frac{3\pi}{10}\right)}}{e^{\frac{1}{2}j\left(\Omega-\frac{3\pi}{10}\right)} - e^{-\frac{1}{2}j\left(\Omega-\frac{3\pi}{10}\right)}} + \frac{e^{\frac{7}{2}j\left(\Omega+\frac{3\pi}{10}\right)} - e^{-\frac{7}{2}j\left(\Omega+\frac{3\pi}{10}\right)}}{e^{\frac{1}{2}j\left(\Omega+\frac{3\pi}{10}\right)} - e^{-\frac{1}{2}j\left(\Omega+\frac{3\pi}{10}\right)}}\right].
\end{aligned}$$

Identificando términos, se obtiene finalmente:

$$X(\Omega) = \frac{3}{2}\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{7}{2}\left(\Omega-\frac{3\pi}{10}\right)\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\left(\Omega-\frac{3\pi}{10}\right)\right]} + \frac{3}{2}\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{7}{2}\left(\Omega+\frac{3\pi}{10}\right)\right]}{\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\left(\Omega+\frac{3\pi}{10}\right)\right]}.$$

Una solución alternativa y equivalente sería aplicar la expresión general para la transformada de Fourier de la señal muestreada discreta:

$$\begin{aligned}
X(\Omega) =& \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\Omega-2\pi k}{T_s}\right)\\
=&10\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\frac{\Omega-2\pi k}{\pi/10}+3}{3}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{\frac{\Omega-2\pi k}{\pi/10}-3}{3}\right)\right]\\
=&10\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{10(\Omega-2\pi k)}{3\pi}+1\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{10(\Omega-2\pi k)}{3\pi}-1\right)\right].
\end{aligned}$$

Esta expresión es menos clara que las anteriores, por contener un sumatorio infinito, aunque por otra parte se observa el efecto del aliasing debido a la suma de espectros de anchura infinita como son las sincs.

Ejercicio 5.23

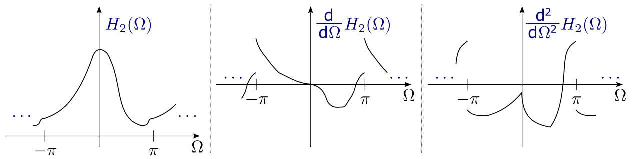
Se pretende diseñar un sistema LTI discreto equivalente al sistema LTI continuo dado por: $y_c(t) = (x_c * h_c)(t) = \frac{d^2x_c(t)}{dt^2}$**. Suponga que** $X_c(\omega) = 0$ **si** $|\omega| > \omega_M > 0$**.**

1. **Determine la frecuencia mínima de muestreo,** ω_s**. Para dicha** ω_s**, calcule la respuesta en frecuencia del sistema discreto,** $H(\Omega)$**.**

2. **Utilizando la ecuación de síntesis de la transformada de Fourier en tiempo discreto, calcule la respuesta al impulso del sistema LTI discreto, $h[n]$.**

3. **Demuestre que el sistema en tiempo continuo no es estable (sugerencia: encuentre una señal $x_c(t)$ acotada cuya salida $y_c(t)$ no lo esté). Demuestre que el sistema en tiempo discreto sí es estable (sugerencia: demuestre que $h[n]$ es absolutamente sumable acotando cada uno de sus valores y sabiendo que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).**

4. **Suponga ahora una respuesta en frecuencia genérica $H_2(\Omega)$ tal que:**
   - **$H_2(\Omega)$ es continua y derivable para todo Ω, y $|H_2(\Omega)| \leq K_0$.**
   - **$\frac{d}{d\Omega}H_2(\Omega)$ es continua y derivable para $-\pi < \Omega < \pi$, y $|\frac{d}{d\Omega}H_2(\Omega)| \leq K_1$.**
   - **$\frac{d^2}{d\Omega^2}H_2(\Omega)$ es continua para $-\pi < \Omega < \pi$, y $|\frac{d^2}{d\Omega^2}H_2(\Omega)| \leq K_2$.**



Demuestre que el sistema LTI discreto con respuesta al impulso $h_2[n]$ (cuya transformada de Fourier en tiempo discreto es $H_2(\Omega)$) es estable. Para ello, proceda igual que en el apartado 3 sustituyendo $h[n]$ por $h_2[n]$, y siga una operativa paralela a la del apartado 2. Tenga en cuenta las desigualdades siguientes: $|a+b| \leq |a| + |b|$, y $|\int_a^b x(t)dt| \leq \int_a^b |x(t)|dt$.

Resolución

1. La frecuencia mínima de muestreo sin que haya aliasing es la dada por el teorema de Nyquist, es decir: $\omega_s = 2\omega_M$. Puesto que en el dominio transformado de Fourier la derivación corresponde a un producto por $j\omega$, la respuesta en frecuencia del sistema LTI en tiempo continuo será: $H_c(\omega) = (j\omega)^2 = -\omega^2$. El sistema en tiempo discreto que, para señales limitadas en banda, imita el comportamiento del dado será entonces:
$$H(\Omega) = \begin{cases} H_c\left(\frac{\Omega}{T_s}\right) = -\frac{\Omega^2}{T_s^2}, & -\pi < \Omega \leq \pi; \\ H(\Omega - 2k\pi), & (2k-1)\pi < \Omega \leq (2k+1)\pi, k \neq 0, \end{cases}$$
donde $T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$ (recordemos que la transformada de Fourier en tiempo discreto es siempre periódica de periodo 2π).

2. Para $n \neq 0$, aplicamos la ecuación de síntesis e integramos por partes dos veces:
$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega)\exp(j\Omega n)d\Omega = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Omega^2}{T_s^2}\exp(j\Omega n)d\Omega \\ &= \frac{-1}{2\pi}\left(\cancelto{0}{\frac{\Omega^2}{jnT_s^2}\exp(j\Omega n)\Big|_{-\pi}^{\pi}} - \frac{2}{jnT_s^2}\int_{-\pi}^{\pi}\Omega\exp(j\Omega n)d\Omega\right) \\ &= \frac{1}{j\pi n T_s^2}\left(\frac{\Omega}{jn}\exp(j\Omega n)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \cancelto{0}{\frac{1}{jn}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(j\Omega n)d\Omega}\right) \\ &= \frac{\cancel{\pi}\exp(j\pi n) - (-\cancel{\pi})\exp(-j\pi n)}{j^2\cancel{\pi}n^2T_s^2} = -\frac{2(-1)^n}{n^2T_s^2}. \end{aligned}$$
Para $n = 0$, $h[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Omega^2}{T_s^2}d\Omega = \frac{\pi^2}{3T_s^2}$.

3. Consideremos la función:
$$x_c(t) = \begin{cases} -1, & t < -1; \\ -\sqrt{1-(t+1)^2}, & -1 \leq t < 0; \\ \sqrt{1-(t-1)^2}, & 0 \leq t < 1; \\ 1, & t \geq 1, \end{cases}$$
que claramente está acotada por $|x_c(t)| \leq 1$. Si calculamos su derivada segunda en $t = 0^+$, comprobamos fácilmente que ésta no está acotada:
$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x_c(t)\Big|_{t=0^+} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\sqrt{1-(t-1)^2}\right)\Big|_{t=0^+} \\ &= \frac{-1}{(1-(t-1)^2)^{3/2}}\Big|_{t=0^+} \longrightarrow -\infty, \end{aligned}$$
y por tanto el sistema en tiempo continuo no es estable. El sistema discreto será estable si y sólo si su respuesta al impulso es absolutamente sumable:
$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]| &= \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{2}{n^2T_s^2} + \frac{\pi^2}{3T_s^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2T_s^2} = \frac{\pi^2}{3T_s^2} + \frac{4}{T_s^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{3T_s^2} + \frac{2\pi^2}{3T_s^2} = \frac{\pi^2}{T_s^2} < \infty, \end{aligned}$$
y el sistema en tiempo discreto es estable.

4. Puesto que $|H_2(\Omega)| < K_0$, $|h_2[0]| = |\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_2(\Omega)d\Omega| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H_2(\Omega)|d\Omega \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_0 d\Omega = K_0 < \infty$. Para el resto de valores de n procedemos igual que en el apartado 2 integrando por partes. Puesto que H_2 es continua y

periódica, sabemos que su valor será el mismo en $\pm\pi$: $H_2(\pi) = H_2(-\pi)$. Sin embargo su derivada puede tener valores distintos en $\pm\pi$ (ver gráficas en el enunciado), y por tanto:

$$
\begin{aligned}
|h_2[n]| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_2(\Omega) \exp(j\Omega n) d\Omega \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \cancelto{0}{\frac{H_2(\Omega)}{jn} \exp(j\Omega n) \Big|_{-\pi}^{\pi}} - \frac{1}{jn} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{d\Omega} H_2(\Omega) \exp(j\Omega n) d\Omega \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{1}{jn} \right| \left| \frac{1}{jn} \frac{d}{d\Omega} H_2(\Omega) \exp(j\Omega n) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{jn} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2}{d\Omega^2} H_2(\Omega) \exp(j\Omega n) d\Omega \right| \\
&= \frac{1}{2\pi n} \left| \frac{(-1)^n}{jn} \frac{dH_2(\Omega)}{d\Omega} \Big|_{\Omega=\pi} - \frac{(-1)^n}{jn} \frac{dH_2(\Omega)}{d\Omega} \Big|_{\Omega=-\pi} - \frac{1}{jn} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 H_2(\Omega)}{d\Omega^2} e^{j\Omega n} d\Omega \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi n} \left(\left| \frac{(-1)^n}{jn} \frac{dH_2(\Omega)}{d\Omega} \Big|_{\Omega=\pi} \right| + \left| \frac{(-1)^n}{jn} \frac{dH_2(\Omega)}{d\Omega} \Big|_{\Omega=-\pi} \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{1}{jn} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 H_2(\Omega)}{d\Omega^2} e^{j\Omega n} d\Omega \right| \right) \\
&\leq \frac{1}{2\pi n^2} \left| \frac{dH_2(\Omega)}{d\Omega} \Big|_{\Omega=\pi} \right| + \frac{1}{2\pi n^2} \left| \frac{dH_2(\Omega)}{d\Omega} \Big|_{\Omega=-\pi} \right| + \frac{1}{2\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{d^2 H_2(\Omega)}{d\Omega^2} e^{j\Omega n} \right| d\Omega \\
&\leq \frac{K_1}{2\pi n^2} + \frac{K_1}{2\pi n^2} + \frac{1}{2\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_2 d\Omega = \left(\frac{K_1}{\pi} + K_2 \right) \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}
$$

Sólo nos queda comprobar que $h_2[n]$ es absolutamente sumable (ver resolución del apartado 3), y por tanto el sistema en tiempo discreto es estable:

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_2[n]| \leq K_0 + 2 \left(\frac{K_1}{\pi} + K_2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = K_0 + 2 \left(\frac{K_1}{\pi} + K_2 \right) \frac{\pi^2}{6} < \infty.
$$