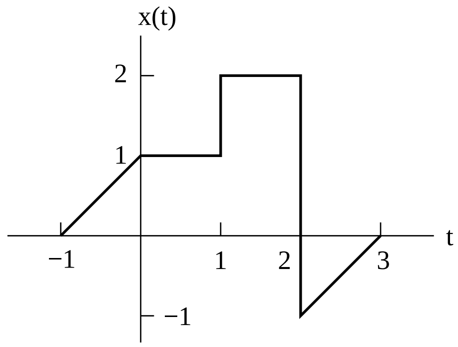
Sistemas Lineales

Problemas para entregar 1

Sea la señal $x(t)$



Calcule y dibuje:

1. $x\left(\frac{7t-3}{5}+2\right)$

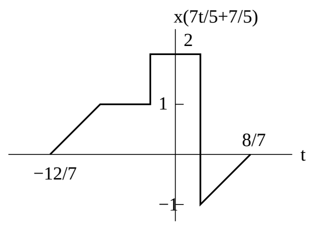
2. La parte par y la parte impar de $x(t)$.

3. La parte hermítica y la parte antihermítica de $x(t)$.

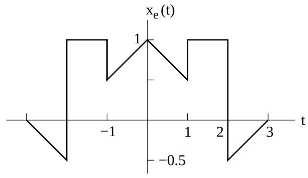
4. La potencia instantánea de la señal. (Calcule además su Energía, su valor de pico, su valor medio y su potencia media).

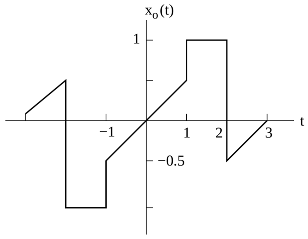
5. La convolución $y(t) = x(t) * x(t)$.

1. Dado que $x\left(\frac{7t-3}{5}+2\right) = x\left(\frac{7t}{5}+\frac{7}{5}\right)$, lo único que se pide es un desplazamiento 7/5 hacia la izquierda, y posteriormente una compresión por un factor 5/7:



2. Parte par e impar como se detallan a continuación:





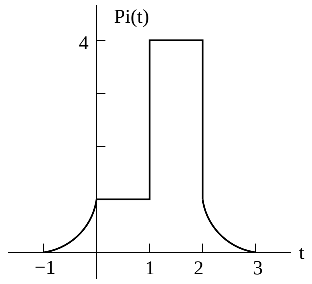
3. Dado que la señal es real, se cumple que $x(t) = x^*(t)$ y por lo tanto la parte hermítica es igual a la parte par, y la antihermítica a la impar.

4. Nuestra señal se define como

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ t+1 & -1 \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 2 & 1 \leq t < 2 \\ t-3 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & t \geq 4 \end{cases}$$

La potencia instantánea será

$$P_i(t) = |x(t)|^2 = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ (t+1)^1 & -1 \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 4 & 1 \leq t < 2 \\ (t-3)^2 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & t \geq 4 \end{cases}$$



La energía:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{17}{3}$$

La potencia media será 0 (por ser una señal de energía). El valor de pico:

$$x_p = \max\{|x(t)|\} = 2$$

El valor medio de la señal podemos considerarlo de dos formas. en primer lugar el valor medio de toda la señal:

$$x_{av} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt = 0$$

o como el valor medio en el intervalo en que está definida la señal:

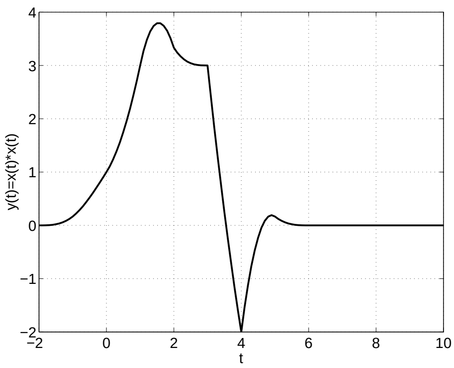
$$x_{av} = \frac{1}{4} \int_{-1}^{3} x(t)dt = \frac{1}{4} A(x(t)) = \frac{3}{4},$$

siendo $A(x(t))$ el área de la señal.

5. La solución es

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ \frac{1}{6}t^3 + t^2 + 2t + \frac{4}{3} & -2 \leq t < -1 \\ -\frac{1}{6}t^3 + t + 1 & -1 \leq t < 0 \\ t^2 + t + 1 & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 10t - \frac{10}{3} & 1 \leq t < 2 \\ -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 9t + 12 & 2 \leq t < 3 \\ t^2 - 12t + 30 & 3 \leq t < 4 \\ \frac{1}{6}t^3 - 5t^2 + 37t - \frac{242}{3} & 4 \leq t < 5 \\ -\frac{1}{6}t^3 + 3t^2 - 18t + 36 & 5 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$

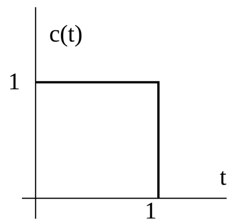
La convolución puede realizarse de varias formas. A modo de ejemplo se exponen

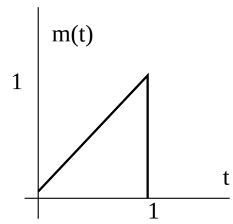


dos:

(a) Realizando directamente la convolución de la señal.

(b) Mediante funciones elementales y propiedades. Si definimos las señales





$$c(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad m(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

La señal $x(t)$ puede escribirse entonces como

$$x(t) = m(t+1) + c(t) + 2c(t-1) + m(t-2) - c(t-2)$$

Si defino

$$x_1 = c(t) * c(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$x_2 = m(t) * m(t) = \begin{cases} t^3/6 & 0 \le t < 1 \\ (t - 2/3) - t^3/6 & 1 \le t < 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$x_3 = c(t) * m(t) = \begin{cases} t^2/2 & 0 \le t < 1 \\ t - t^2/2 & 1 \le t < 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

La convolución será:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * x(t) \\ &= (m(t+1) + c(t) + 2c(t-1) + m(t-2) - c(t-2)) \\ &\quad *(m(t+1) + c(t) + 2c(t-1) + m(t-2) - c(t-2)) \\ &= x_2(t+2) + 2x_3(t+1) + 4x_3(t) + x_1(t) + \\ &\quad +4x_1(t-1) + 2x_2(t-1) - 2x_3(t-1) + 2x_1(t-2) + 2x_3(t-2) + \\ &\quad +4x_3(t-3) - 4x_1(t-3) + x_2(t-4) + x_1(t-4) - 2x_3(t-4) \end{aligned}$$