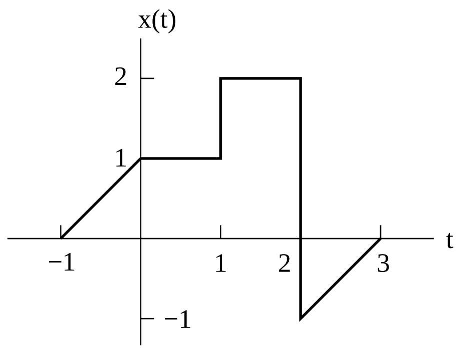
Sistemas Lineales

Problemas para entregar 2

Sea la señal $x(t)$



1. Calcule la transformada de Fourier de $x(t)$. Exprésela como parte real más parte imaginaria.

2. Calcule la transformada de Fourier de $x_2(t)$, definida de la siguiente forma

$$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - 6k).$$

Dibuje la parte real y la parte imaginaria en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

3. Calcule la transformada de Fourier de $x_3(t)$, definida de la siguiente forma

$$x_3(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - 3k).$$

Exprésela como parte real más parte imaginaria.

4. Calcule la transformada de Fourier de la señal discreta $x_4[n]$, definida de la siguiente forma

$$x_4[n] = x(n + 0.5)$$

Dibuje la parte real y la parte imaginaria en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

1. A partir de la ecuación de análisis

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-1}^{0} (t+1)e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{1} e^{-j\omega t}dt + \int_{1}^{2} 2e^{-j\omega t}dt + \int_{2}^{3} (t-3)e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{1}{\omega^2} - \frac{e^{j\omega}}{\omega^2} + \frac{e^{j\omega}}{j\omega} - \left(\frac{3}{j\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right) e^{-j2\omega} + \frac{e^{-j3\omega}}{\omega^2}. \end{aligned}$$

La parte real e imaginaria serán

$$\begin{aligned} X_R(\omega) &= \frac{1}{\omega^2}\left(1 - \cos\omega - \cos 2\omega + \cos 3\omega\right) + \frac{1}{\omega}\left(3\sin 2\omega - \sin\omega\right) \\ X_I(\omega) &= \frac{j}{\omega^2}\left(-\sin\omega + \sin 2\omega - \sin 3\omega\right) + \frac{j}{\omega}\left(3\cos 2\omega - \cos\omega\right) \end{aligned}$$

2. La señal definida será una señal periódica de periodo 6. Su transformada de Fourier vendrá dada a partir de sus coeficientes del siguiente modo:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{6}k\right)$$

siendo c_k los coeficientes de la serie de Fourier. Podemos escribirlo en función de la transformada de Fourier de un periodo de la señal, $X_a(\omega)$ (que es la solución del apartado anterior):

$$c_k = \frac{1}{6} X_a\left(\frac{2\pi}{6}k\right)$$

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{6} X_a\left(\frac{2\pi}{6}k\right) \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{6}k\right)$$

Nótese que para $k = 0$ el coeficiente así definido presenta una indeterminación, por lo que debe ser calculado a parte. De este modo:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{6} X_a\left(\frac{2\pi}{6}k\right) & k \neq 0 \\ \frac{1}{2} & k = 0 \end{cases}$$

De aquí podemos deducir la parte real e imaginaria de la TF para $[-2\pi, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} X_R(\omega) &= \pi\delta(\omega) + \sqrt{3}\delta(\omega - \pi/3) + \sqrt{3}\delta(\omega + \pi/3) + (9/4\pi - \sqrt{3})\delta(\omega - 2\pi/3) \\ &\quad +(9/4\pi - \sqrt{3})\delta(\omega + 2\pi/3) + (9/16\pi + \sqrt{3}/2)\delta(\omega - 4\pi/3) \\ &\quad +(9/16\pi + \sqrt{3}/2)\delta(\omega + 4\pi/3) - \sqrt{5}/5\delta(\omega - 5\pi/3) - \sqrt{5}/5\delta(\omega + 5\pi/3) \\ X_I(\omega) &= -2j\delta(\omega - \pi/3) + 2j\delta(\omega + \pi/3) - j(1/2 + 3\sqrt{3}/4\pi)\delta(\omega - 2\pi/3) \\ &\quad +j(1/2 + 3\sqrt{3}/4\pi)\delta(\omega + 2\pi/3) + 4j/3\delta(\omega - \pi) - 4j/3\delta(\omega + \pi) \\ &\quad +j(3\sqrt{3}/\pi 16 - 1/4)\delta(\omega - 4\pi/3) - j(3\sqrt{3}/\pi 16 - 1/4)\delta(\omega + 4\pi/3) \\ &\quad -j2/5\delta(\omega - 5\pi/3) + j2/5\delta(\omega + 5\pi/3) + j/3\delta(\omega - 2\pi) - j/3\delta(\omega + 2\pi) \end{aligned}$$

Nota: En el problema ha habido muchos errores de notación. No es correcto decir

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{6}k\right)$$

para $k \neq 0$ y $X(\omega) = A_0$ para $k = 0$. Nótese que $X(\omega)$ NO es función de k; k es un parámetro que aparece dentro de la expresión. Lo correcto es separar la expresión para A_k y no para $X(\omega)$:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{6}k\right)$$

con

$$A_k = \begin{cases} f(k) & k \neq 0 \\ A_0 & k = 0 \end{cases}.$$

Tampoco es correcto decir:

$$X(0) = A_0\delta(\omega)$$

Nótese que: (1) un valor concreto en una señal continua NO es relevante. (2) Si evaluamos toda la expresión, sería $X(0) = A_0\delta(0) = \infty$.

3. En este caso tenemos de nuevo una señal periódica, pero ahora hay un solapamiento que cambia la expresión de la señal. Calculamos los coeficientes de la Serie de Fourier a partir de la señal aperiódica

$$\begin{aligned} X_a(\omega) &= \int_{-1}^{0}(2t+1)e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{1} e^{-j\omega t}dt + \int_{1}^{2} 2e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{2}{\omega^2}\left(1-e^{j\omega}\right) + \frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega} - e^{j\omega} - 2e^{-2j\omega}\right) \end{aligned}$$

A partir de aquí calculo los $c_k = \frac{1}{3}X_a\left(\frac{2\pi}{3}k\right)$. La transformada de Fourier será

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}k\right)$$

Si escribo los coeficientes como $2\pi c_k = a_k + jb_k$ (parte real + parte imaginaria), estos serán

$$a_k = \begin{cases} \frac{3}{\pi k^2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{3}k\right) + \frac{2}{k}\left(\sin\frac{4\pi}{3}k - \sin\frac{2\pi}{3}k\right) & k \neq 0 \\ 2\pi & k = 0 \end{cases}$$

$$b_k = \begin{cases} \frac{-3}{\pi k^2}\sin\frac{2\pi}{3}k + \frac{2}{k}\cos\frac{4\pi}{3}k & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

La transformada de Fourier final será:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k + jb_k)\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}k\right)$$

4. La transformada de Fourier de la señal discreta será:

$$\begin{aligned} X_R(\Omega) &= 1 + \frac{5}{2}\cos\Omega - \frac{1}{2}\cos 2\Omega \\ X_I(\Omega) &= j(-\frac{3}{2}\sin\Omega + \frac{1}{2}\sin 2\Omega) \end{aligned}$$