Sistemas Lineales

Tema 2. Problemas

1. Sea $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3]$ y $h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$. Calcule y haga la gráfica de cada una de las siguientes convoluciones:

   (a) $y_1[n] = x[n] * h[n]$

   (b) $y_2[n] = x[n+2] * h[n]$

   (c) $y_3[n] = x[n] * h[n+2]$

2. Considere la señal

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (u[n+3] - u[n-10])$$

   Exprese A y B en términos de n de manera que se cumplan las siguientes ecuaciones:

$$h[n-k] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1}, & A \leq k \leq B \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

3. Calcule la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$ de los siguientes pares de señales:

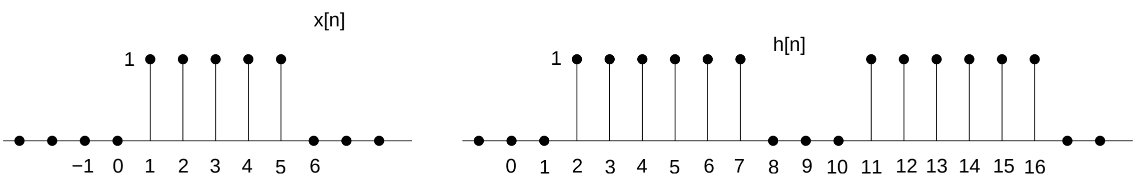
   (a) $\begin{array}{l} x[n] = \alpha^n u[n], \\ h[n] = \beta^n u[n], \end{array} \quad \alpha \neq \beta$

   (b) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$

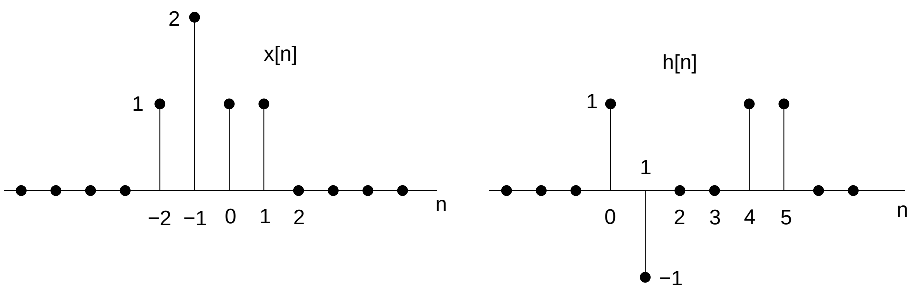
   (c) $x[n] = 2^n u[-n]$
   $h[n] = u[n]$

   (d) $x[n] = (-1)^n (u[-n] - u[-n-8])$
   $h[n] = u[n] - u[n-8]$

   (e) $x[n]$ y $h[n]$ como se muestran a continuación:

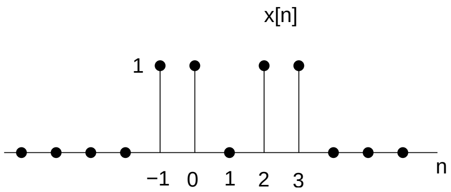


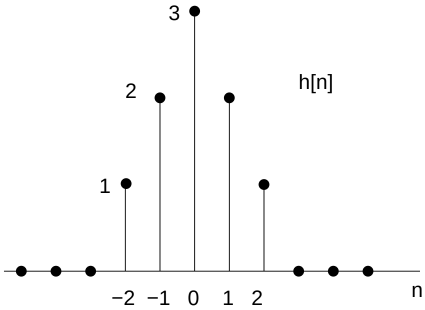
   (f) $x[n]$ y $h[n]$ como se muestran a continuación:



   (g) $x[n]$ y $h[n]$ como se muestran a continuación:

   (h) $x[n] = 1$ para todo n, $h[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ 4^n, & n < 0 \end{cases}$





(i) $x[n] = u[n] - u[-n]$ para todo n, $h[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ 4^n, & n < 0 \end{cases}$

(j) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
$h[n] = 4^n u[2-n]$

(k) $x[n] = \alpha^n (u[n] - u[n-10]), \quad 0 < \alpha < 1$
$y[n] = \beta^n u[n+5], \quad 0 < \beta < 1$

4. Calcule la convolución continua de los siguientes pares de señales. Pinte los resultados.

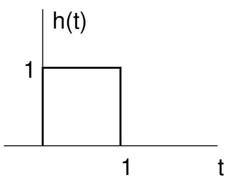
(a) $x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$
$h(t) = e^{-\beta t} u(t)$ (Haga este ejercicio para $\alpha \neq \beta$ y para $\alpha = \beta$).

(b) $x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$
$h(t) = e^{2t} u(1-t)$

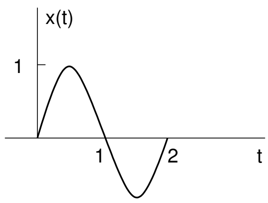
(c) $x(t) = e^{-3t} u(t)$
$h(t) = u(t-1)$

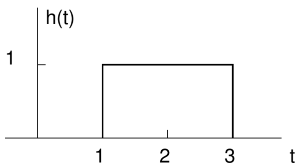
(d) $x(t) = e^{-2t} u(t+2) + e^{3t} u(-t+2)$
$h(t) = e^{t} u(t-1)$

(e) $x(t) = \begin{cases} e^{t}, & t < 0 \\ e^{5t} - 2e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$
$h(t)$ como se muestra en la siguiente figura:

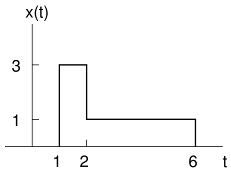


(f) $x(t)$ y $h(t)$ como se muestran a continuación:

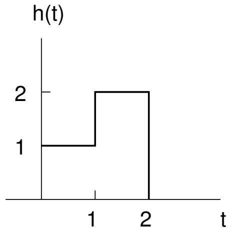




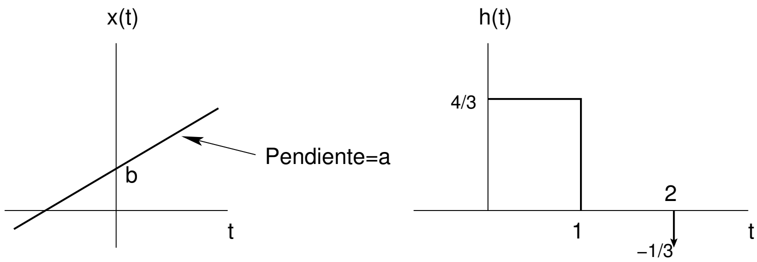
(g) $x(t)$ como se muestra a continuación, y $h(t) = u(-2-t)$:



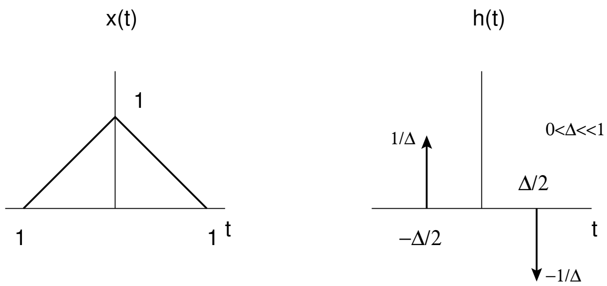
(h) $x(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$, y $h(t)$ como se muestra a continuación:



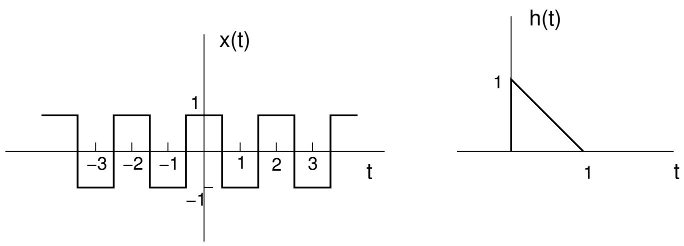
(i) $x(t)$ y $h(t)$ como se muestran a continuación:



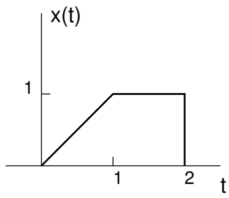
(j) $x(t)$ y $h(t)$ como se muestran a continuación:



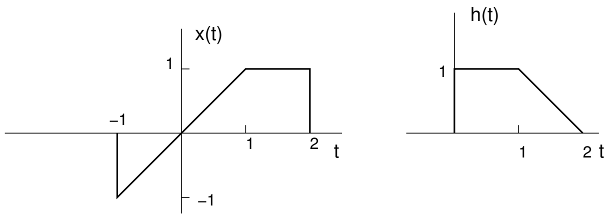
(k) $x(t)$ y $h(t)$ como se muestran a continuación:



(l) $x(t)$ como se muestran a continuación, y $h(t) = e^{-t}\,[u(t-1) - u(t-2)]$:

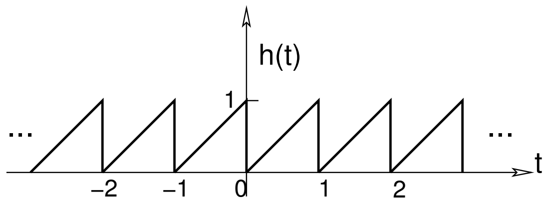


(m) $x(t)$ y $h(t)$ como se muestran a continuación:

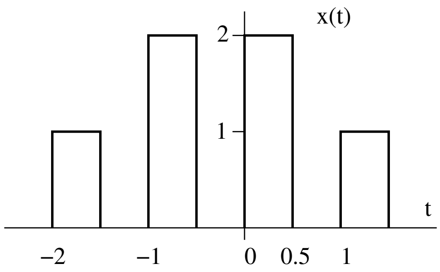


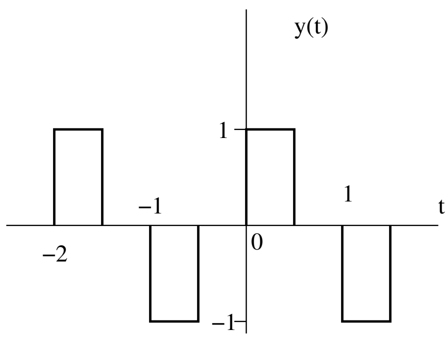
(n) $x(t) = e^{-2t}[u(t-1) - u(t-4)]$,
$h(t) = e^{2t}[u(1-t) - u(-1-t)]$.

(o) $h(t)$ como en la siguiente figura, y $x(t) = \sin(\pi t)[u(t+1) - u(t-1)]$



5. Sean $x(t)$ e $y(t)$ las señales siguientes





Calcule y dibuje:

(a) $z_0(t) = x(t) * y(t)$

(b) $z_1(t) = x(t-1) * y(t+2)$

(c) $z_2(t) = x(t) * y(-t)$

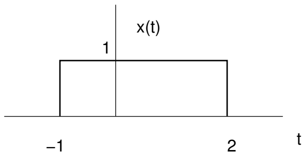
(d) $z_3(t) = x(t) * \frac{dy(t)}{dt}$

6. Considere un sistema LTI cuya entrada está relacionada con la salida a través de la ecuación

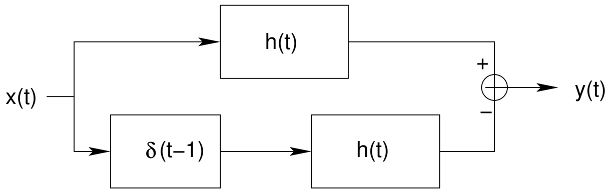
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2)\, d\tau$$

(a) ¿Cuál será la respuesta al impulso $h(t)$?

(b) Determine la respuesta al sistema cuando la entrada es la siguiente



(c) Considere la interconexión de sistemas LTI que aparece en la siguiente figura:

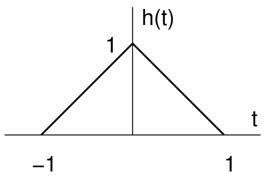


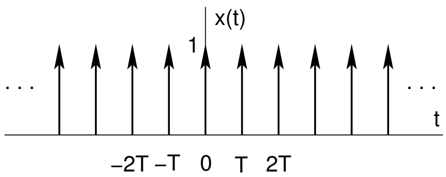
Aquí $h(t)$ es la misma que en el apartado (a). Determine la salida $y(t)$ cuando la entrada $x(t)$ es la misma que en el apartado (b). Realice esta cálculo de dos formas:

i. Calcule la respuesta global al impulso de todo el sistema interconectado y luego use la convolución para calcular $y(t)$.

ii. Use el resultado del apartado (b) junto con las propiedades de la convolución para determinar $y(t)$ sin realizar la convolución.

7. Sea $h(t)$ un pulso triangular y $x(t)$ un tren de impulsos, tal como se muestra a continuación:



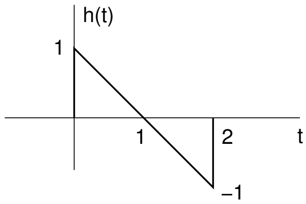


Podemos definir $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$.

(a) Determine y dibuje $y(t) = x(t) * h(t)$ para los siguientes valores de T: $T = 4$, $T = 2$, $T = 3/2$, $T = 1$.

(b) Considere un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = e^{-t}u(t)$. Determine y dibuje la salida $y(t)$ cuando la entrada es el tren de impulsos $x(t)$ para $T = 1$.

(c) Sea ahora $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(t-k)$. Determine y dibuje la salida del sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ tal como se dibuja a continuación:



8. Calcule y dibuje $y[n] = x[n] * h[n]$, donde

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 3 \leq n \leq 8 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 4 \leq n \leq 15 \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$$

9. Sea

$$x(t) = u(t-3) - u(t-5)$$
$$h(t) = e^{-3t}u(t)$$

   (a) Calcule $y(t) = x(t) * h(t)$.
   (b) Calcule $g(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right) * h(t)$.
   (c) ¿Cómo está relacionada $g(t)$ con $y(t)$?

10. ¿Cuáles de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas estables LTI?

   (a) $h_1(t) = e^{-(1-2j)t}u(t)$
   (b) $h_2(t) = e^{-t}\cos(2t)u(t)$

11. Considere un sistema LTI causal cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionadas por la ecuación en diferencias

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n]$$

   Determine $y[n]$ si $x[n] = \delta[n-1]$.

12. Un cierto sistema LTI tiene como respuesta al impulso $h(t) = \sin(\pi t)\cos(2\pi t)$.

   (a) Utilizando la integral de convolución, calcule la salida si la entrada es $x(t) = e^{-t}u(t)$. Intente expresar la salida como combinación lineal de senos y cosenos.
   (b) Argumente si el sistema descrito cumple las propiedades de memoria, causalidad, invertibilidad y estabilidad.

13. Sea un sistema LTI caracterizado por su respuesta al impulso $h(t) = e^{t}u(t-1)$.

   (a) Estudie la memoria, causalidad, y estabilidad del sistema.
   (b) Calcula la salida del sistema cuando la entrada es:
   $x(t) = e^{-2t}u(t+2) + e^{3t}u(-t+2)$.

14. Estudie la estabilidad del sistema discreto dado por la respuesta al impulso:

$$h[n] = cos(\frac{\pi n}{2}).$$

15. Indique si es verdadero o falso que $\frac{d}{dt}(x(t) * y(t)) = \frac{dx(t)}{dt} * \frac{dy(t)}{dt}$

16. Problema 3.16 del tema 3 del libro de Oppenheim (primera edición), apartados (a), (b) y (d).

17. Problema 3.28 del tema 3 del libro de Oppenheim (primera edición), apartados (a) y (b).

18. Problemas de ampliación: Oppenheim (segunda ed.), capítulo 2. Problemas: 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.15, 2.24, 2.28, 2.33, 2.38, 2.39.