Sistemas Lineales

Tema 3. Problemas (v2.0)

1. Muestre que

$$x(t) = \begin{cases} e^{st} & t \geq 0 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

no es una autofunción del sistema $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$.

2. Determine si los siguientes pares de entrada y salida pueden corresponder a un sistema LTI.

(a) $x(t) = \text{sen}(2\omega_0 t + \phi)$, $y(t) = e^{j2\omega_0 t}$

(b) $x(t) = \text{sen}(2\omega_0 t + \phi)$, $y(t) = e^{j4\omega_0 t}$

(c) $x(t) = \text{sen}(2\omega_0 t + \phi)$, $y(t) = te^{j2\omega_0 t} - te^{-j2\omega_0 t}$

3. Determine la representación en series de Fourier de cada una de las siguientes señales:

(a) $x(t) = e^{j200t}$

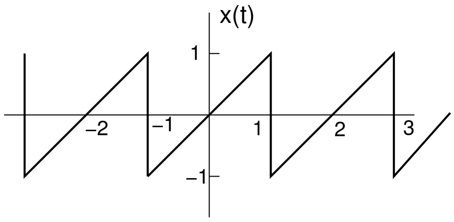
(b) $x(t) = \cos[\pi(t-1)/4]$

(c) $x(t) = \cos 4t + \text{sen}\, 8t$

(d) $x(t) = \cos 4t + \text{sen}\, 6t$

(e) $x(t)$ es una señal periódica con periodo 2 y $x(t) = e^{-t}$ para $-1 < t \leq 1$

(f) $x(t)$ como se muestra en la figura siguiente

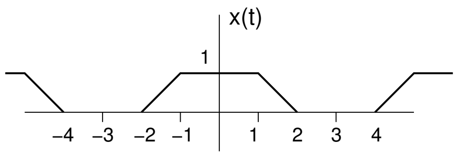


(g) $x(t) = [1 + \cos 2\pi t][\cos(10\pi t + \pi/4)]$

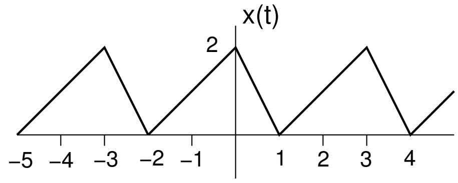
(h) $x(t)$ es una señal periódica con periodo 2 y

$$x(t) = \begin{cases} (1-t) + \text{sen}\, 2\pi t & 0 < t < 1 \\ 1 + \text{sen}\, 2\pi t & 1 < t < 2 \end{cases}$$

(i) $x(t)$ como se muestra en la figura siguiente



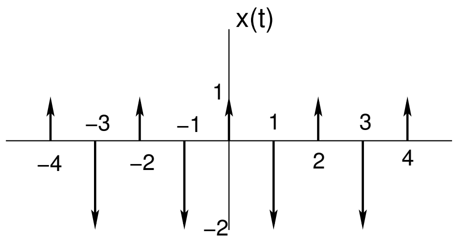
(j) $x(t)$ como se muestra en la figura siguiente



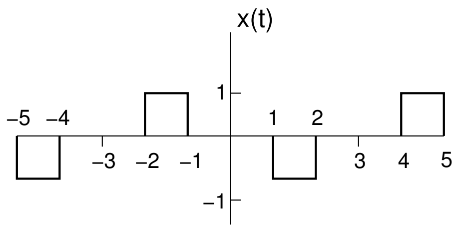
(k) $x(t)$ es una señal periódica con periodo 4 y

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} \pi t & 0 < t < 2 \\ 0 & 2 < t < 4 \end{cases}$$

(l) $x(t)$ como se muestra en la figura siguiente



(m) $x(t)$ como se muestra en la figura siguiente



4. Considere un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = e^{-4t}u(t)$. Encuentre la representación en series de Fourier de la salida $y(t)$ para cada una de las siguientes entradas:

   (a) $x(t) = \cos 2\pi t$

   (b) $x(t) = \operatorname{sen} 4\pi t + \cos(6\pi t + \pi/4)$

   (c) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n)$

   (d) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta(t - n)$

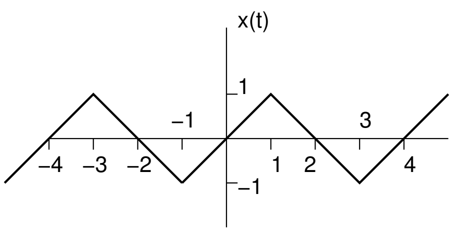
5. Indique cuáles de las señales mostradas en la figura que aparece debajo cumplen las siguientes propiedades:

   (a) $\Re\{X(\omega)\} = 0$

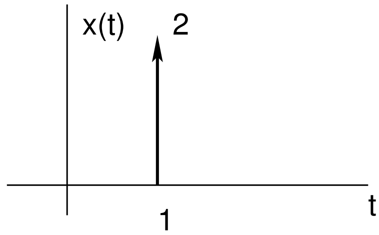
   (b) $\Im\{X(\omega)\} = 0$

   (c) Que exista un α real tal que $e^{j\alpha\omega}X(\omega)$ se real.

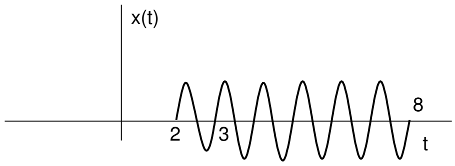
   (d) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega = 0$



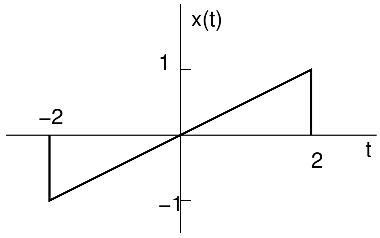
(a)



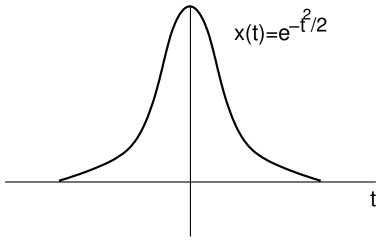
(b)



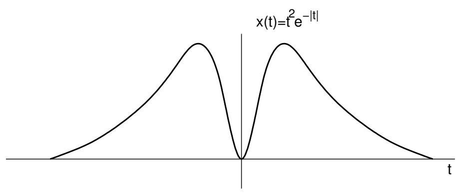
(c)



(d)



(e)



(f)

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(\omega) d\omega = 0$

(f) Que $X(\omega)$ sea periódica.

6. Use la ecuación de análisis de la transformada de Fourier para calcular las transformadas de las siguientes señales:

   (a) $x(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1)$

   (b) $x(t) = e^{-2|t-1|}$

   (c) $x(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$

   (d) $\frac{d}{dt}\{u(-2-t) + u(t-2)\}$

7. Determine la transformada de Fourier de las siguientes señales periódicas:

   (a) $x(t) = \mathrm{sen}(2\pi t + \pi/4)$

   (b) $x(t) = 1 + \cos(6\pi t + \pi/8)$

   (c) $x(t) = \cos(2\pi t) + \mathrm{sen}(3\pi t)$

8. Calcule la transformada de Fourier de cada una de las siguientes señales:

(a) $x(t) = [e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t] u(t),\ \alpha > 0$

(b) $x(t) = e^{-3|t|} \operatorname{sen} 2t$

(c) $x(t) = \begin{cases} 1 + \cos \pi t, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

(d) $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t - kT),\ |\alpha| < 1$

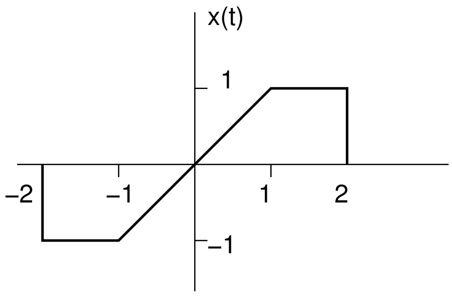
(e) $x(t) = [t e^{-2t} \operatorname{sen} 4t] u(t)$

(f) $x(t) = \left[\frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi t}\right] \left[\frac{\operatorname{sen} 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}\right]$

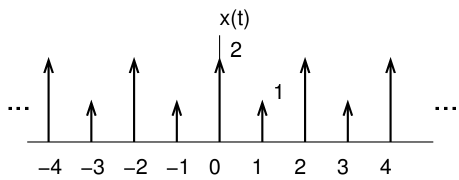
(g) $x(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

(h) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-|t-2n|}$

(i) $x(t)$ como se muestra en la siguiente figura:



(j) $x(t)$ como se muestra en la siguiente figura:

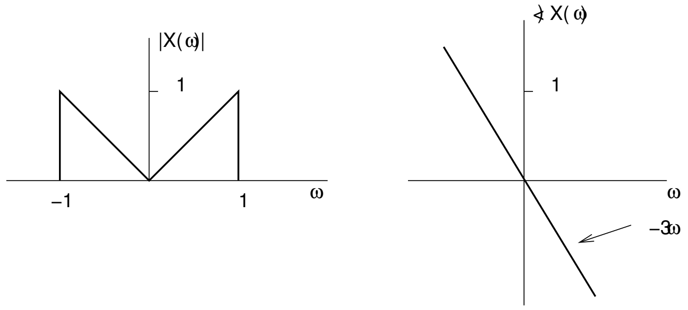


9. Determine la señal continua correspondiente a las siguientes transformadas:

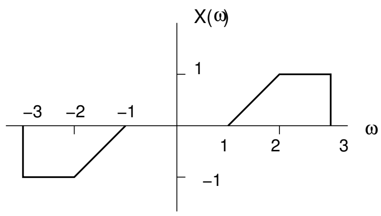
(a) $X(\omega) = \frac{2 \operatorname{sen}[3(\omega - 2\pi)]}{(\omega - 2\pi)}$

(b) $X(\omega) = \cos(4\omega + \pi/3)$

(c) $X(\omega)$ como se muestra en la siguiente figura:



(d) $X(\omega)$ como se muestra en la siguiente figura:



(e) $X(\omega) = 2[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)] + 3[\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)]$

10. Calcule la convolución de los siguientes pares de señales $x(t)$ y $h(t)$ mediante el cálculo de $X(\omega)$ y $H(\omega)$, usando la propiedad de convolución y haciendo la transformación inversa.

    (a) $x(t) = te^{-2t}u(t)$, $h(t) = e^{-4t}u(t)$

    (b) $x(t) = te^{-2t}u(t)$, $h(t) = te^{-4t}u(t)$

    (c) $x(t) = e^{-t}u(t)$, $h(t) = e^{t}u(-t)$

11. Suponga que $x(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$ y

$$h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & -1 < t < 3 \\ 0 & \text{resto} \end{array} \right\}$$

    Verifique la propiedad de convolución para este par de señales demostrando que la transformada de Fourier de $y(t) = x(t) * h(t)$ es igual a $H(\omega)X(\omega)$.

12. Compruebe si las siguientes funciones son o no periódicas. Calcule su transformada de Fourier.

    (a) $x_1(t) = \cos(6\omega_0 t) + \cos(9\omega_0 t)$

    (b) $x_2(t) = \text{sen}(\omega_0 t) \times \cos(\sqrt{2}\omega_0 t)$

    (c) $x_3(t) = x_2(t) + \cos(\omega_0 t) \times \text{sen}(\sqrt{2}\omega_0 t)$

    (d) $x_4(t) = \sum_{n=1}^{5} \text{sen}(\sqrt{n}\omega_0 t)$

    (e) $x_5(t) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

13. Calcule la transformada de Fourier de la señal $x(t)$, siendo ésta una señal periódica con periodo $T = 2$ y $x(t) = e^{-t}$ para $-1 < t \leq 1$.

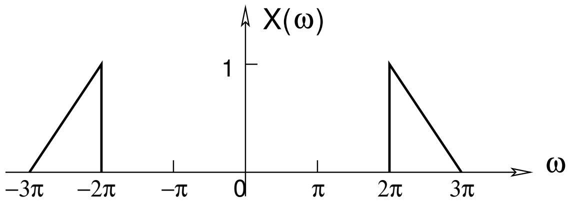
14. La entrada y la salida de un sistema LTI causal están relacionadas por la siguiente ecuación diferencial
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

   (a) Encuentre la respuesta de este sistema al impulso.

   (b) Calcule la respuesta del sistema cuando la entrada es $x(t) = te^{-2t}u(t)$.

   (c) Repita el apartado (a) para el sistema LTI causal descrito por
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sqrt{2}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2x(t)$$

15. Calcule la potencia y la energía de la señal cuya transformada de Fourier se representa en la siguiente figura:



16. Considere la señal:
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(t-2k)$$
con
$$x_a(t) = \begin{cases} e^{-a|t|}, & -1 \le t < 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$
Represente la señal $x(t)$. Calcule su transformada de Fourier, $X(\omega)$, y represéntela para $-3\pi \le \omega \le 3\pi$.

17. Para señales de energía se define su producto escalar como:
$$< x(t), y(t) >= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt.$$

   (a) Demuestre la siguiente igualdad:
$$< x(t), y(t) >= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y^*(\omega)d\omega.$$

   (b) Calcule la transformada de Fourier de la señal $x(t)$ y represente su módulo y fase, siendo:
$$x(t) = \frac{\text{sen}[B(t+t_0)]}{\pi(t+t_0)}e^{j\omega_0(t+t_0)} + \frac{\text{sen}[B(t-t_0)]}{\pi(t-t_0)}e^{-j\omega_0(t-t_0)}.$$

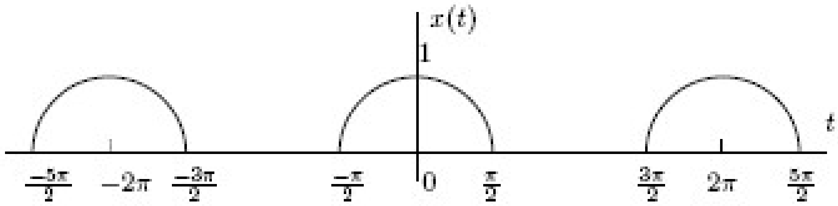
   (c) Calcule la transformada de Fourier de la señal
$$y(t) = \frac{2a}{a^2+t^2}, \qquad \Re\{a\} > 0.$$

   (d) Calcule $< x(t), y(t) >$.

(e) Calcule $< x(t), z(t) >$, siendo

$$z(t) = \frac{2jt}{a^2 + t^2}, \qquad \Re\{a\} > 0.$$

18. La señal periódica que se muestra a continuación se genera cuando una señal de tensión con forma de coseno es rectificada por un diodo, proceso que se conoce como rectificación de media onda. Escriba esta señal como una suma de senos y cosenos armónicamente relacionados.



19. Dada la señal $x(t) = u(t + 0.5) - u(t - 0.5)$ y la respuesta al impulso de un sistema LTI $h(t) = e^{j\omega_0 t}$:

    (a) Determine los valores de ω_0 que aseguren que $y(0) = 0$.

    (b) Demuestre que para una señal $x(t)$ arbitraria la salida será siempre periódica (o nula). Calcule su periodo y su serie de Fourier.

20. Calcule la frecuencia máxima y el valor en el origen de la transformada de Fourier de la señal $y(t) = [\text{sinc}(\omega_0 t)]^4$.

21. Dibuje la transformada ed Fourier en el intervalo $[-5\pi, 5\pi]$ de la señal:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(t - k),$$

con

$$x_a(t) = \begin{cases} \cos(\pi t), & 0 < t \leq 1, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$