

SISTEMAS LINEALES

TEMA 4. PROBLEMAS

1. Determine los coeficientes de la serie de Fourier de cada una de las siguientes señales periódicas en tiempo discreto.

(a) $x[n] = \sin[\pi(n-1)/4]$

(b) $x[n] = \cos(2\pi n/3) + \sin(2\pi n/7)$

(c) $x[n] = \cos\left(\frac{11\pi n}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$

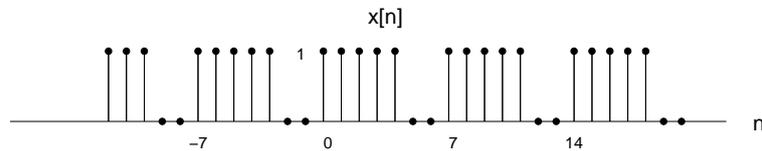
(d) $x[n]$ periódica con $N = 6$ y $x[n] = (1/2)^n$ para $-2 \leq n \leq 3$

(e) $x[n] = \sin(2\pi n/3) \cos(\pi n/2)$

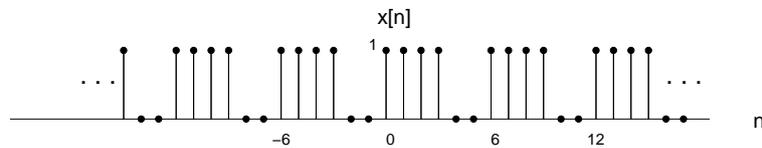
(f) $x[n]$ periódica con $N = 4$ y $x[n] = 1 - \sin(\pi n/4)$ para $0 \leq n \leq 3$

(g) $x[n]$ periódica con $N = 12$ y $x[n] = 1 - \sin(\pi n/4)$ para $0 \leq n \leq 11$

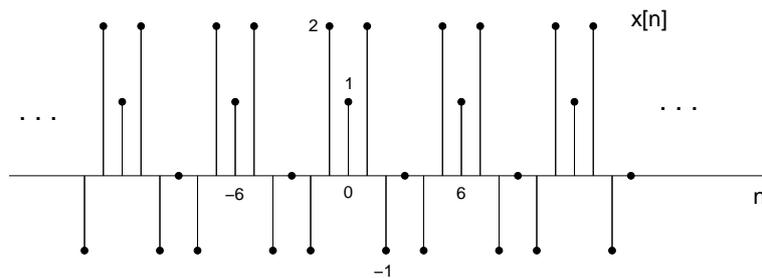
(h) $x[n]$ como se muestra en la siguiente figura:



(i) $x[n]$ como se muestra en la siguiente figura:



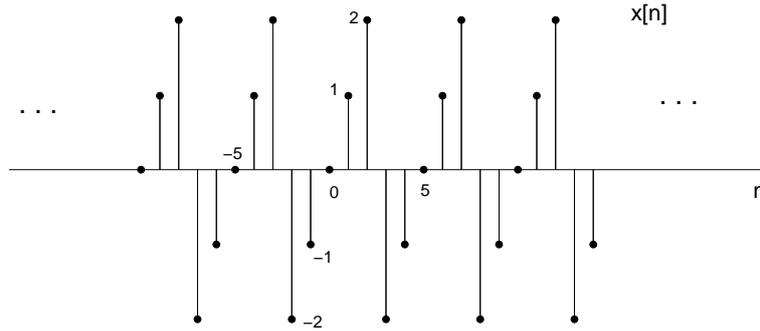
(j) $x[n]$ como se muestra en la siguiente figura:



(k) $x[n]$ como se muestra en la figura de la página siguiente.

2. Una señal periódica discreta $x[n]$ es de valor real y tiene un periodo fundamental $N = 5$. Sus coeficientes de la serie de Fourier diferentes de cero son

$$a_0 = 1, a_2 = a_{-2}^* = e^{j\pi/4}, a_4 = a_{-4}^* = 2e^{j\pi/3}$$



Expresa $x[n]$ en la forma

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k n + \phi_k)$$

3. Use la ecuación de análisis de la Transformada de Fourier para calcular las transformadas de:

- (a) $x[n] = (1/2)^{n-1}u[n-1]$
- (b) $x[n] = (1/2)^{|n-1|}$
- (c) $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$
- (d) $x[n] = \delta[n+2] - \delta[n-2]$

4. Calcule la transformada de Fourier de las siguientes señales:

- (a) $x[n] = u[n-2] - u[n-6]$
- (b) $x[n] = (1/2)^{-n}u[-n-1]$
- (c) $x[n] = (1/3)^{|n|}u[-n-2]$
- (d) $x[n] = 2^n \sin(\pi n/4)u[-n]$
- (e) $x[n] = (1/2)^{|n|} \cos(\frac{\pi}{8}(n-1))$
- (f) $x[n] = \begin{cases} n, & -3 \leq n \leq 3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$
- (g) $x[n] = \sin(\frac{5\pi}{3}n) + \cos(\frac{7\pi}{3}n)$
- (h) $x[n] = (n-1)(1/3)^{|n|}$
- (i) $x[n] = \left(\frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n}\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2}n\right)$

5. Determine la señal discreta correspondiente a cada transformada:

- (a) $X(\Omega) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{4} \leq |\Omega| \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0, & \frac{3\pi}{4} \leq |\Omega| \leq \pi, 0 \leq |\Omega| \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$
- (b) $X(\Omega) = 1 + 3e^{-j\Omega} + 2e^{-j2\Omega} - 4e^{-j3\Omega} + e^{-j10\Omega}$
- (c) $X(\Omega) = e^{-j\Omega/2}$ para $-\pi \leq \Omega \leq \pi$
- (d) $X(\Omega) = \cos^2 \Omega + \sin^2 3\Omega$

$$(e) X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(\Omega - \frac{\pi}{2}k)$$

$$(f) X(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega} - (1/5)}{1 - (1/5)e^{-j\Omega}}$$

$$(g) X(\Omega) = \frac{1 - (1/3)e^{-j\Omega}}{1 - (1/4)e^{-j\Omega} - (1/8)e^{-2j\Omega}}$$

$$(h) X(\Omega) = \frac{1 - (1/3)^6 e^{-6j\Omega}}{1 - (1/3)e^{-j\Omega}}$$

6. Determine la transformada de Fourier para $-\pi \leq \Omega < \pi$ de las siguientes señales periódicas:

$$(a) x[n] = \sin(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{4})$$

$$(b) x[n] = 2 + \cos(\frac{\pi}{6}n + \frac{\pi}{8})$$

7. Si $X(\Omega)$ es la transformada de Fourier de $x[n]$, calcule la transformada de las siguientes señales en función de $X(\Omega)$:

$$(a) x_1[n] = x[1 - n] + x[-1 - n]$$

$$(b) x_2[n] = \frac{x^*[-n] + x[n]}{2}$$

$$(c) x_3[n] = (n - 1)^2 x[n]$$

8. Considere un sistema LTI causal y estable cuya entrada $x[n]$ y cuya salida $y[n]$ están relacionadas mediante la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] - \frac{1}{6}y[n - 1] - \frac{1}{6}y[n - 2] = x[n]$$

Determine la respuesta al impulso del sistema en el dominio de la frecuencia, $H(\Omega)$ y del tiempo discreto, $h[n]$.

9. Considere un sistema LTI discreto con respuesta al impulso

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Use la transformada de Fourier para calcular la respuesta de cada una de las siguientes señales de entrada:

$$(a) x[n] = (3/4)^n u[n]$$

$$(b) x[n] = (n + 1)(1/4)^n u[n]$$

$$(c) x[n] = (-1)^n$$

10. Calcule la respuesta al impulso del sistema descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n] + y[n - 1] + \frac{1}{4}y[n - 2] = x[n - 1] - \frac{1}{2}x[n - 2]$$

Calcule el inverso de dicho sistema. Demuestre que el inverso no es causal.

11. Considere la señal $x[n] = \cos\left(\frac{11\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right) e^{j\frac{2\pi}{3}n}$.

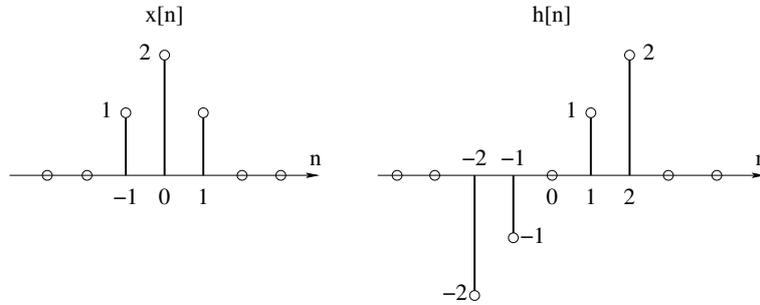
(a) Determine el periodo de la señal, N , y los coeficientes de su serie de Fourier.

(b) Obtenga la potencia y la energía de la señal.

12. Calcular la energía y la potencia de la señal discreta $x[n]$, cuyos coeficientes de la serie de Fourier están dados por:

$$a_k = \cos\left(\frac{5\pi}{3}k\right).$$

13. Sean $x[n]$ y $h[n]$ las señales mostradas en la siguiente figura.



- (a) Calcular $y[n] = x[n] * h[n]$ operando en el dominio de la frecuencia.
 (b) Calcular $z[n] = (2x[n+1] + x[n-1]) * h[n+2]$.
14. La propiedad de desplazamiento temporal de una señal discreta nos dice que

$$X(\Omega)e^{-j\Omega n_0} \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x[n - n_0],$$

siendo n_0 un número entero.

- (a) Estudie qué ocurre con $x[n]$ si su transformada de Fourier se multiplica por $e^{-j\Omega r_0}$, siendo ahora r_0 un número real:

$$X(\Omega)e^{-j\Omega r_0} \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} ?$$

- (b) Demuestre que la solución para el caso de n_0 entero es un caso particular de r_0 real.
15. Estudie las propiedades de memoria, causalidad, invertibilidad, linealidad, estabilidad e invarianza en el tiempo del sistema dado por la relación:

$$y[n] = \int_{\pi}^{3\pi} e^{j\Omega 11} \left(\frac{\sin(21\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right)^2 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\Omega m}\right) e^{j\Omega n} d\Omega.$$

16. Demuestre que una secuencia discreta real y periódica $x[n]$ puede escribirse como una suma de senos y cosenos. (Por facilidad suponga que el periodo N es impar).
17. Problemas de ampliación: 5.13, 5.18, 5.24, 5.25, 5.33, 5.34, 5.35.