Sistemas Lineales

Tema 7. Problemas

1. Se sabe que una señal de valor real $x(t)$ ha sido determinada sólo por sus muestras cuando la frecuencia de muestreo es $\omega_s = 10^4\pi$. ¿Para qué valores de ω se garantiza que $X(\omega)$ sea cero?

2. Una señal continua $x(t)$ se obtiene a la salida de un filtro pasobajo ideal con frecuencia de corte $\omega_c = 1000\pi$. Si el muestreo con tren de impulsos se realiza sobre $x(t)$, ¿cuál de los siguientes periodos de muestreo garantiza que $x(t)$ se pueda recuperar a partir de su versión muestreada usando un filtro paso bajo adecuado?

   (a) $T = 0.5 \times 10^{-3}$
   (b) $T = 2 \times 10^{-3}$
   (c) $T = 10^{-4}$

3. Sea $x(t)$ una señal con frecuencia de Nyquist ω_0. Determine la frecuencia de Nyquist de cada una de las siguientes señales:

   (a) $x(t) + x(t-1)$
   (b) $\frac{\mathrm{d}x(t)}{dt}$
   (c) $x^2(t)$
   (d) $x(t)\cos\omega_0 t$

4. Sea $x(t)$ una señal con frecuencia de Nyquist ω_0. También

$$y(t) = x(t)p(t-1)$$

   donde

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \text{ siendo } T < \frac{2\pi}{\omega_0}$$

   Especifique las restricciones de magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del filtro que proporciona $x(t)$ como su salida cuando $y(t)$ es la entrada.

5. En el sistema mostrado en la figura 1 se multiplican dos funciones de tiempo $x_1(t)$ y $x_2(t)$, y el producto $w(t)$ se muestrea con un tren de impulsos. la función $x_1(t)$ es de banda limitada a ω_1 y $x_2(t)$ es de banda limitada a ω_2; esto es

$$X_1(\omega) = 0, \ \ |\omega| \geq \omega_1$$

$$X_2(\omega) = 0, \ \ |\omega| \geq \omega_2$$

   Determine el máximo intervalo de muestreo T tal que $w(t)$ se pueda recuperar a partir de $w_p(t)$ mediante el uso de un filtro pasobajo ideal.

6. En la figura 2 se muestra un sistema en el cual la señal de muestreo es un tren de impulsos con signo alternado. La transformada de Fourier de la señal de entrada es como se muestra en la figura.

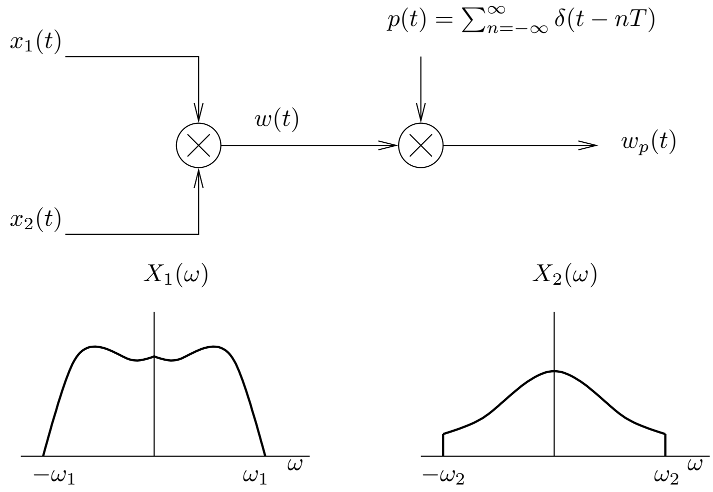


Figura 1:

(a) Para $\Delta < \pi/(2\omega_M)$, dibuje la transformada de Fourier de $x_p(t)$ e $y(t)$.

(b) Para $\Delta < \pi/(2\omega_M)$, determine un sistema con el cual se pueda recuperar $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

(c) Para $\Delta < \pi/(2\omega_M)$, determine un sistema con el cual se pueda recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$.

(d) ¿Cuál es el valor máximo de Δ en relación a ω_M para la cual $x(t)$ puede recuperarse a partir de $x_p(t)$ o de $y(t)$.

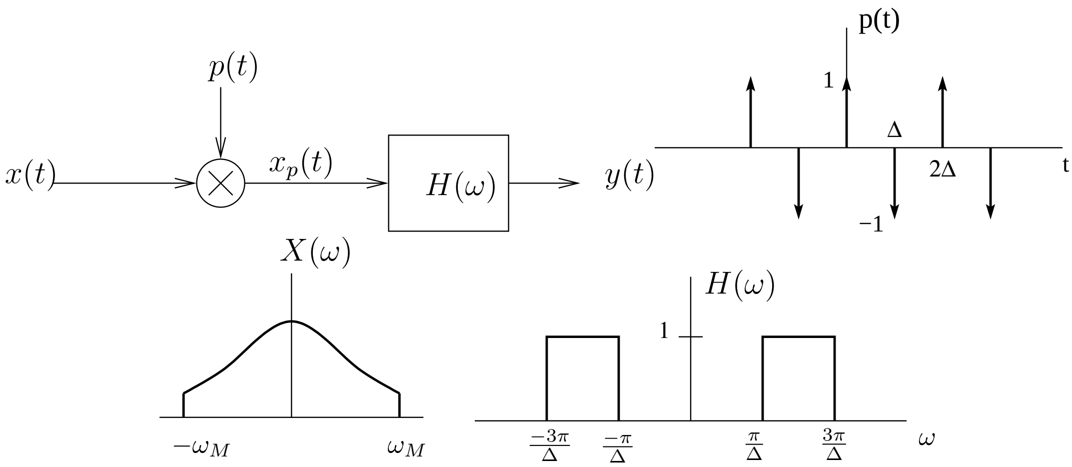


Figura 2:

7. El teorema del muestreo establece que una señal $x(t)$ debe ser muestreada a una velocidad mayor que su ancho de banda (o de manera equivalente, a una velocidad mayor que el doble de su frecuencia más alta). Esto implica que si $x(t)$ tiene un espectro como el indicado en la figura 3, entonces $x(t)$ debe ser muesterada a una velocidad mayor que $2\omega_2$. Sin embargo, ya que la señal tienen la mayor parte de su energía concentrada en una banda estrecha, parece razonable esperar que se pueda

usar una velocidad de muestreo inferior al doble de la frecuencia más alta. A una señal cuya energía está concentrada en una banda de frecuencias se le conoce como *señal paso banda*. Hay una gran variedad de técnicas de muestreo para dichas señales, conocidas como *técnicas de muestreo pasobanda*.

Considere el sistema mostrado en la figura 3(b). Suponiendo que $\omega_1 > \omega_2 - \omega_1$, encuentre el valor máximo de T y los valores de las constantes A, ω_a y ω_b tales que $x_r(t) = x(t)$

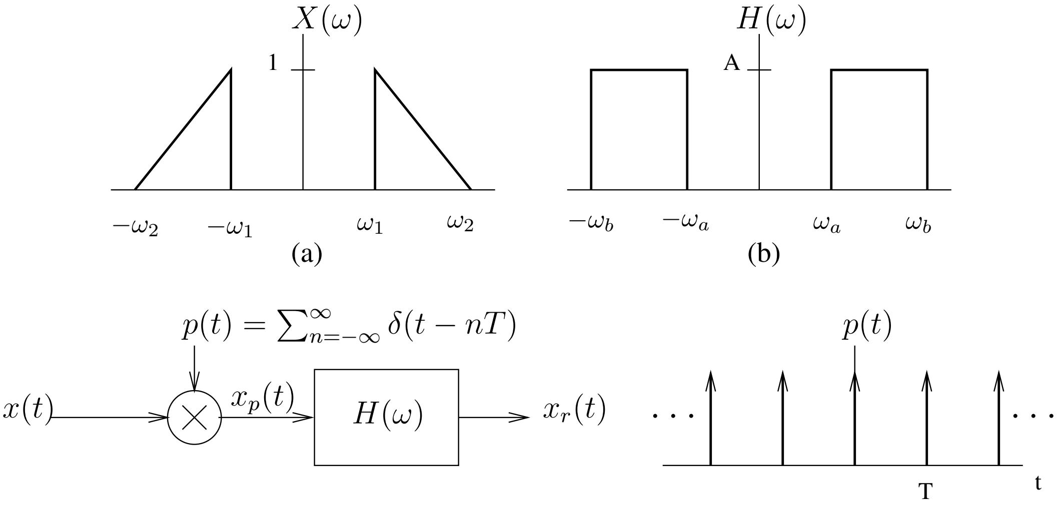


Figura 3:

8. En el sistema mostrado en la figura 4, la entrada $x_c(t)$ es de banda limitada con $X(\omega) = 0$, $|\omega| > 2\pi \times 10^4$. El filtro digital $h[n]$ está descrito por la relación entrada salida

$$y[n] = T \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{1}$$

   (a) ¿Cuál es el valor máximo de T permitido si se quiere evitar que exista *aliasing* en la transformación de $x_c(t)$ a $x_p(t)$?

   (b) Con el sistema LTI discreto de la ecuación (1), determine su respuesta al impulso $h[n]$.

   (c) Determine si hay algún valor de T para el cual

$$\lim_{n\to\infty} y[n] = \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} x_c(\tau) d\tau \tag{2}$$

   Si es así, determine el máximo valor. Si no, explique y especifique cómo se debe escoger T para que la igualdad de la ecuación (2) sea la mejor aproximación

9. Considere un disco en el cual están pintados cuatro ciclos de una senoide. El disco gira a 15 revoluciones por segundo, de manera que la senoide tiene una frecuencia de 60 Hz cuando se ve a través de una rendija estrecha, tal y como se muestra en la figura 5.

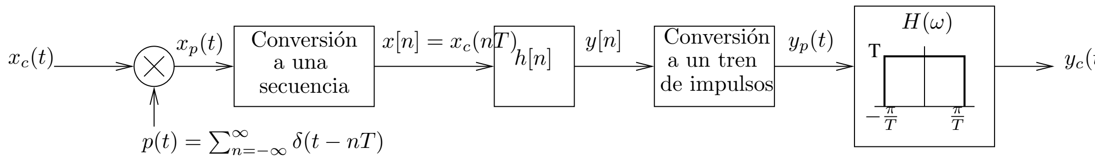


Figura 4:

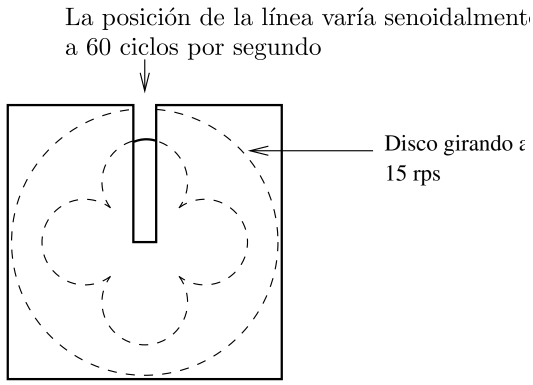


Figura 5:

Sea $v(t)$ la posición de la línea vista a través de la rendija. Entonces

$$v(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi), \ \ \omega_0 = 120\pi$$

Para facilitar la notación se normalizará la señal, de modo que $A = 1$. A 60 Hz, el ojo no es capaz de seguir $v(t)$, y supondremos que este efecto puede explicarse modelando el ojo como un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte a 20 Hz.

El muestreo de la senoide se puede realizar mediante la iluminación del disco con luz estroboscópica. Así, la iluminación puede representarse mediante un tren de impulsos

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

donde $1/T$ es la frecuencia del estroboscopio en Hz. La señal muestreada resultante es el producto $r(t) = v(t)i(t)$.

(a) Dibuje $V(\omega)$, indicando claramente el efecto de los parámetros ϕ y ω_0.

(b) Dibuje $I(\omega)$, indicando el efecto de T.

(c) De acuerdo con el teorema del muestreo, hay un valor máximo de T en términos de ω_0 tal que $v(t)$ se pueda recuperar a partir de $r(t)$ mediante el uso de un filtro pasobajo. Trace $R(\omega)$ cuando T es ligeramente menor que ese valor.

Si el periodo de muestreo T se hace mayor que el valor determinado en la parte (c), se presenta el efecto de *aliasing* o solapamiento en el espectro. Como resultado de dicho solapamiento, percibimos una senoide de frecuencia más baja.

(d) Suponga que $2\pi/T = \omega_0 + 20\pi$. Trace $R(\omega)$ para $|\omega| < 40\pi$. Denote mediante $v_a(t)$ la posición aparente de la línea tal y como la percibimos. Suponiendo que el ojo se comporta como un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte a 20 Hz y ganancia unitaria, exprese $v_a(t)$ de la forma

$$v_a(t) = A_a \cos(\omega_a + \phi_a)$$

donde A_a es la amplitud aparente, ω_a es la frecuencia aparente y ϕ_a la fase aparente de $v_a(t)$.

(e) Repita el apartado (d) para $2\pi/T = \omega_0 - 20\pi$.

10. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales reales de ancho de banda limitado, tal y como se muestran en la figura

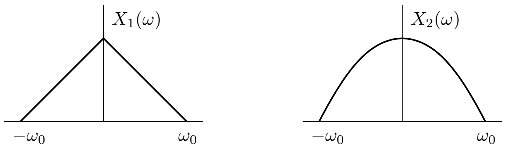


Figura 6:

$$X_1(\omega) = X_2(\omega) = 0 \ |\omega| > \omega_0$$

Considérese el esquema

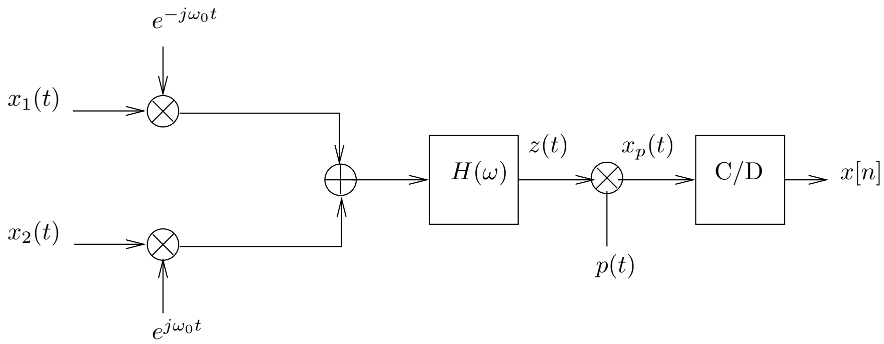


Figura 7:

$H(\omega)$ es un filtro pasobajo ideal de ganancia 1 y frecuencia de corte ω_0, y $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$, con $T = \pi/\omega_0$.

(a) Dibuje $H(\omega)$, $Z(\omega)$ y $X_p(\omega)$.

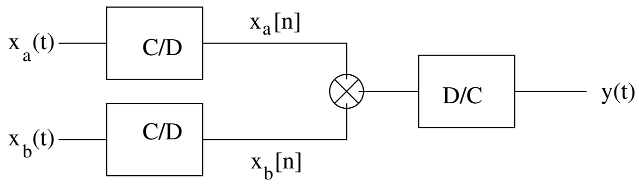
(b) Proponga un esquema para recuperar $x_1(t)$ y $x_2(t)$ a partir de $x_p(t)$. (Represente el esquema en el dominio temporal).

11. Sean $x_a(t)$ y $x_b(t)$ dos señales limitadas en banda tales que

$$|X_a(\omega)| = |X_b(\omega)| = 0 \ \ |\omega| > B$$

Se desea realizar un multiplicador de señales continuas mediante un multiplicador discreto, de acuerdo con la figura siguiente

siendo $x_a[n] = x_a(nT)$ y $x_b[n] = x_b(nT)$. Calcular el mayor valor de T que garantice que $y(t) = x_a(t)x_b(t)$.



12. (De Examen Feb. 2008) Determine si cada uno de los siguientes sistemas es invertible. Si alguno lo es, contruya el sistema inverso. En caso contrario, encuentre un contrajemplo que lo demuestre.

    (a) $y[n] = x(nT)$.

    (b) $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\text{sen}[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$.

13. (De Examen Feb. 2007) En la figura 8(a), se muestra el esquema de muestreo "de tiempo finito", en el que la señal de muestreo, $p(t)$, es la mostrada en la figura 8(b). A dicho sistema se le introduce una señal $x(t)$, como la mostrada en la figura 8(c), cuyo espectro supongamos que es el de la figura 8(d).

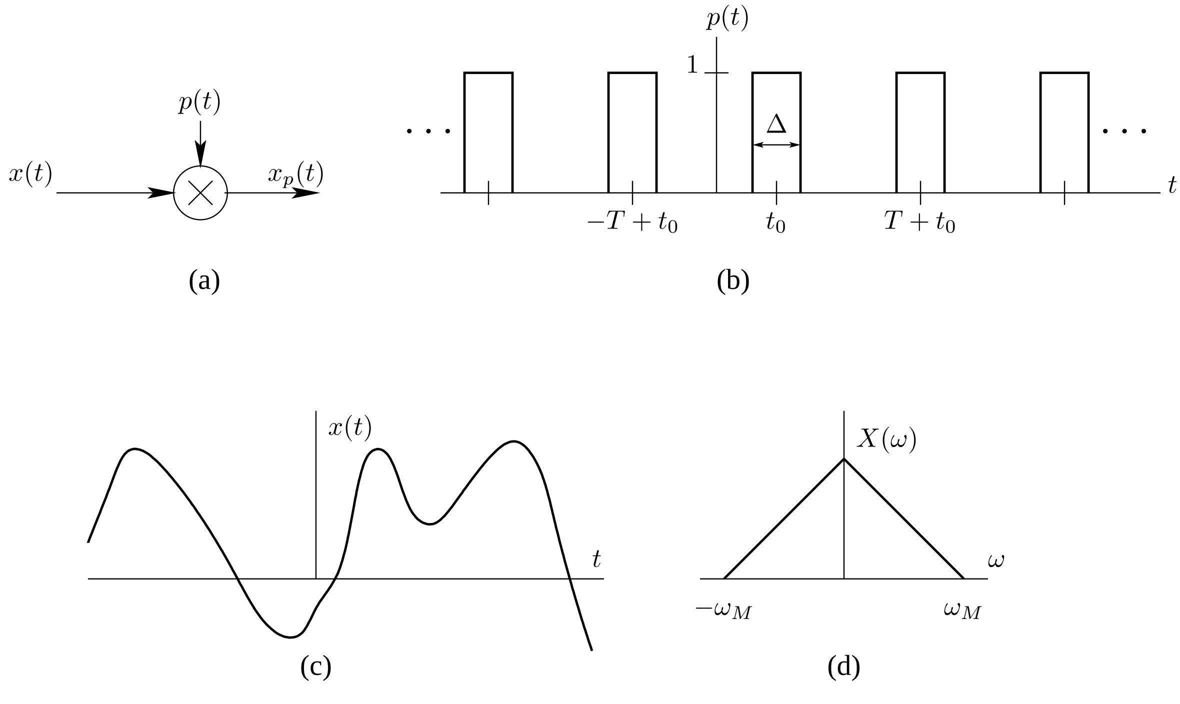


Figura 8:

(a) Represente la señal $x_p(t)$.

(b) Obtenga la transformada de Fourier de la señal $p(t)$.

Para $\Delta = \frac{T}{8}$ y $t_0 = \frac{T}{4}$,

(c) Obtenga y represente $P(\omega)$ y $X_p(\omega)$.

(d) Indique el máximo periodo de muestreo, T, para que la señal $x(t)$ se pueda recuperar a partir de la señal muestreada $X_p(t)$. Si $x(t)$ es real y par, indique cómo se podría aumentar el periodo de muestreo, y en tal caso, cual es el nuevo periodo máximo de muestreo.

(e) Diseñe un sistema que permita, mediante el uso de muestreo de tiempo finito, sumar varias señales de espectro limitado en banda, y reconstruir de forma exacta cada señal a partir de dicha suma.

14. (De Examen Feb 2008) Considere la señal $x(t) = \cos(\frac{9\pi}{2}t)\sin(\frac{3\pi}{2}t)$, y el esquema mostrado en la figura 9.

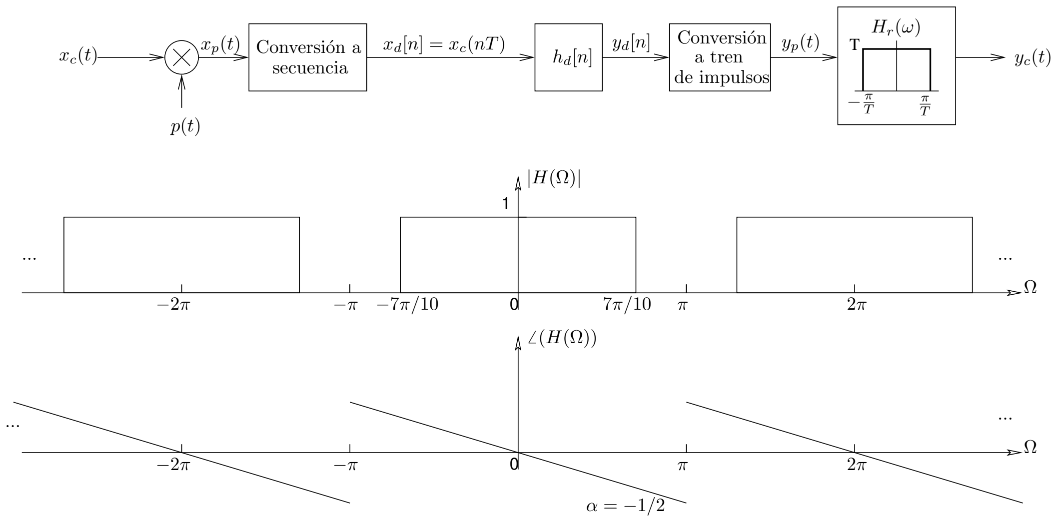


Figura 9:

Para $T = \frac{1}{5}s.$ y $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$:

(a) Obtenga y represente las siguientes señales en el dominio de la frecuencia: $X_c(\omega), P(\omega), X_p(\omega), X_d(\Omega), Y_d(\Omega), Y_p(\omega), Y_c(\omega)$.

(b) Calcule $y_c(t)$.

(c) Obtenga la respuesta al impulso, en tiempo y en frecuencia, del sistema LTI continuo equivalente al procesado discreto de la señal continua mostrado en la figura, en el caso de que no haya *aliasing* en el muestreo. Represente su respuesta en frecuencia.

15. (De Examen Sept 2007) Considere el sistema mostrado en la figura (A), donde el bloque intermedio tiene una relación entrada-salida $s[n] = r_{(3)}[n]$, es decir, una expansión en el tiempo.

(a) Para $T_1 = 1/3000$ $s.$, obtenga y represente $R(\Omega)$, $S(\Omega)$ e $Y(\Omega)$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

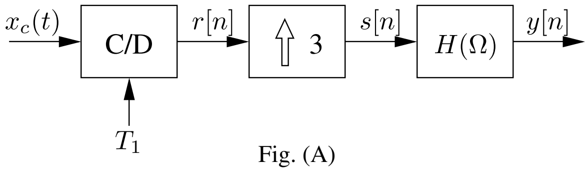
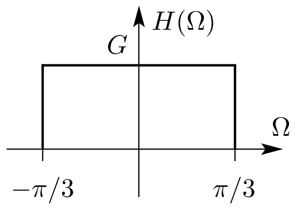
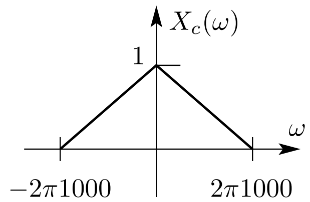


Fig. (A)





(b) Considere ahora el sistema mostrado en figura (B) y obtenga los valores de T_2 y G, distintos de cero, tales que

$$z[n] = y[n].$$

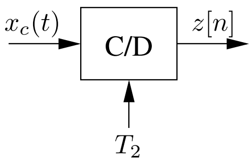
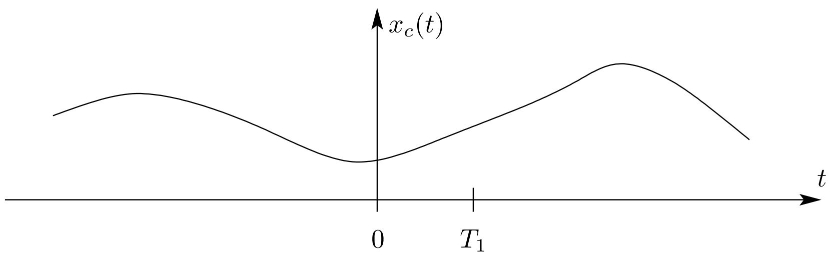


Fig. (B)

(c) Obtenga las relaciones entrada-salida en el tiempo para cada uno de los tres subsistemas mostrados en la figura (A), es decir, $r[n]$ en función de $x_c(t)$, $s[n]$ en función de $r[n]$ e $y[n]$ en función de $s[n]$.

(d) Represente $r[n]$, $s[n]$ e $y[n]$ para la siguiente señal de entrada



16. (De Examen Sept 2008) En el siguiente problema se estudiará el efecto de una falta de sincronización en la frecuencia de muestreo al reproducir una señal de audio digital. Para ello, se parte de una señal sonora $x_s(t)$. Para evitar un posible aliasing, la señal se pasa por un filtro pasobajo $h(t)$ con frecuencia de corte $w_c = 2\pi \times 2\ 10^4$ (es decir, 20kHz). La señal resultante $x_f(t)$ es muestreada con un tren de impulsos a la frecuencia de Nyquist $\omega_s = \omega_N$, obteniendo así la señal $x[n]$, que es almacenada en un dispositivo electrónico.

(a) Dibuje la transformada de Fourier de las señales $x_s(t)$, $x_f(t)$ y $x[n]$. (Etiquete correctamente los ejes).

A la hora de reproducir la señal $x[n]$ almacenada, por un error de sincronización se asume una frecuencia de muestreo $\omega_{s_2} = \omega_s/2$. Esta frecuencia se usará para todo el proceso de interpolación. La señal $x[n]$ se pasa por un conversor de deltas discretas a continuas (usando ω_{s_2}), dando lugar a la señal $x_{p_2}(t)$. A partir de esta señal, mediante un proceso de interpolación, se reconstruye la señal continua $x_{f_2}(t)$.

(b) Dibuje la transformada de Fourier de la señal muestreada continua $x_{p_2}(t)$ y de la señal reconstruida $x_{f_2}(t)$.

(c) ¿Qué relación existe entre $x_{f_2}(t)$ y $x_f(t)$?

17. (De Examen Sept 2006 técnicas) Considere el sistema mostrado en la Figura 10:

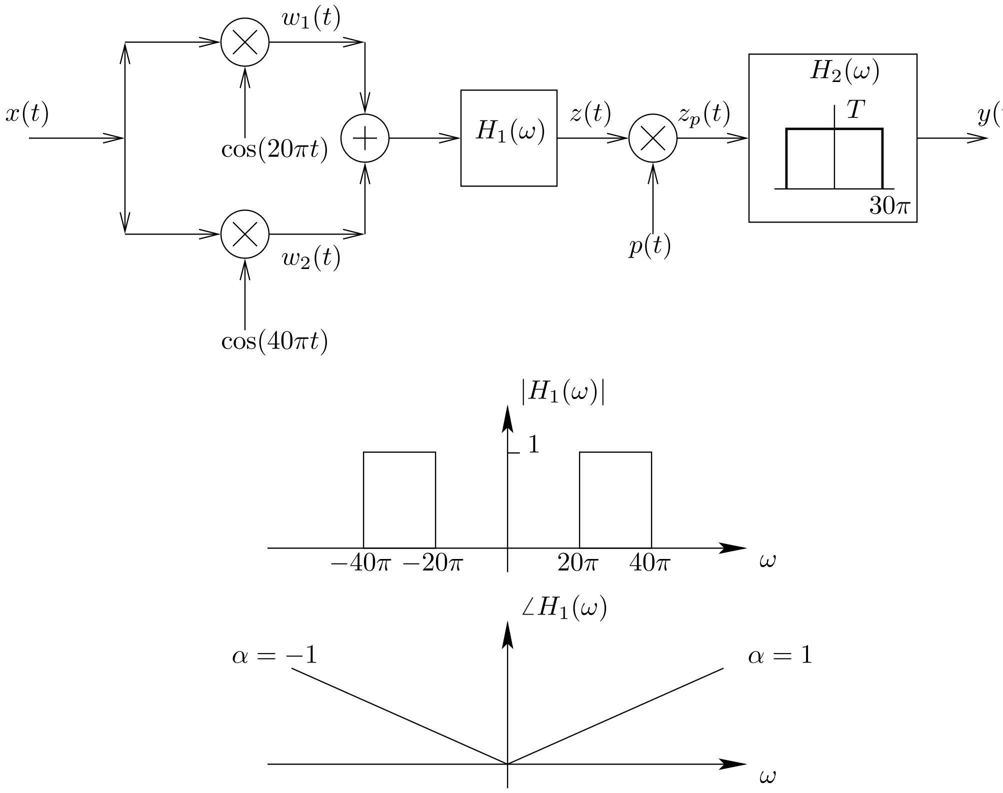


Figura 10:

donde $x(t) = \frac{\sin(10\pi t)}{\pi t}$ y $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$, siendo la frecuencia de muestreo $\omega_s = 60\pi$.

(a) Dibuje las transformadas de Fourier siguientes: $X(\omega)$, $W_1(\omega)$, $W_2(\omega)$, $Z(\omega)$, $P(\omega)$, $Z_p(\omega)$ e $Y(\omega)$.

(b) Obtenga la señal de salida, $y(t)$.

18. (De Examen Sept 2005) La señal analógica

$$x(t) = 0.1e^{j2000\pi t} + 2e^{j(10000\pi t + \pi/2)}$$

se muestrea con un tren de impulsos a una frecuencia de 8 KHz. La señal muestreada se pasa por el filtro paso-bajo de reconstrucción genérico para señales muestreadas a 8 KHz. Determine la señal a la salida.

19. (De Examen Sept 2006) Sea x(t) una señal limitada en tiempo, de tal modo que $x(t) = 0,\ |t| > T_0$. Su transformada de Fourier se multiplica por un tren de deltas equiestapaciadas una distancia W. Estudie analíticamente el efecto que tiene esta operación en el dominio temporal. Ilustre el resultado con un ejemplo gráfico.

20. Problemas de Ampliación. Oppenheim (segunda ed.) tema 7, problemas: 7.3, 7.10, 7.11, 7.21, ejemplo 7.2 (pag 542), ejemplo 7.3 (pag 544)