Sistemas Lineales

Tema 5. Problemas

1. Determine la restricción que debe haber en $r = |z|$ para que cada una de las siguientes sumas converja:

   (a) $\sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^{-n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1} z^{n}$

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right) z^{-n}$

   (d) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \cos(\frac{\pi}{4}n) z^{-n}$

2. Determine la transformada Z de las siguientes secuencias.Dibuje el diagrama de polos y ceros e indique la región de convergencia. Indique si existe o no transformada de Fourier de la secuencia.

   (a) $x[n] = \delta[n]$

   (b) $x[n] = \delta[n+5]$

   (c) $x[n] = \delta[n-5]$

   (d) $x[n] = (-1)^n u[n]$

   (e) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+3]$

   (f) $x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n} u[-n-2]$

   (g) $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[3-n]$

   (h) $x[n] = 2^n u[-n] + \left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[n-1]$

   (i) $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} u[n-2]$

   (j) $x[n] = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\} u[n]$

   (k) $x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{7}\right)^{n} & 0 \leq n \leq 8, \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

   (l) $x[n] = \begin{cases} 7^n & 0 \leq n \leq 8, \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

   (m) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \{u[n] - u[n-10]\}$

   (n) $x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & 0 \leq n \leq 9 \\ 0, & 9 < n \end{cases}$

3. Sea
$$x[n] = (-1)^n u[n] + \alpha^n u[-n-n_0]$$
Determine las restricciones en el número complejo α y en el entero n_0, dado que la ROC de $X(z)$ es
$$1 < |z| < 2$$

4. Calcule la transformada inversa de

   (a) $X(z) = \frac{3z^4+5z^2+3z-5}{z^2}$

   (b) $X(z) = \frac{z+1}{z^2-2.5z+1}$, $|z| > 2$

5. Determine la transformada Z inversa de

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})} \qquad |z| > 2$$

   sabiendo que

$$a^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

6. La transformada z de la señal $x[n]$ es de la forma

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

   (a) Suponiendo que la ROC es $|z| > 1/3$, use la división larga para determinar los valores de $x[0]$, $x[1]$ y $x[2]$.

   (b) Suponiendo que la ROC es $|z| < 1/3$, use la división larga para determinar los valores de $x[0]$, $x[-1]$ y $x[-2]$.

7. Un sistema de fase mínima se define como aquel que es causal y estable, y en el que el inverso es también causal y estable. Determine las restricciones necesarias para la localización en el plano z de los polos y los ceros de la función de transferencia de un sistema de fase mínima.

8. La secuencia de autocorrelación $\phi_{xx}[n]$ de una secuencia $x[n]$ se define como

$$\phi_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n+k]$$

   Determine la transformada z de $\phi_{xx}[n]$ en términos de la transformada z de $x[n]$.

9. Un sistema LTI causal está descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$$

   (a) Encuentre la función de transferencia $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ para este sistema. Dibuje los polos y ceros de $H(z)$ e indique la región de convergencia.

   (b) Encuentre la respuesta al impulso de este sistema.

   (c) El sistema así determinado es inestable. Encuentre una respuesta al impulso estable (no causal) que satisfaga la ecuación en diferencias.

10. Se sabe lo siguiente acerca de un sistema LTI discreto con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$:

    - Si $x[n] = (-2)^n$ para todo n, entonces $y[n] = 0$ para todo n.

- Si $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ para todo n, entonces $y[n]$ para todo n es de la forma

$$y[n] = \delta[n] + a\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

donde a es una constante.

(a) Determine el valor de la constante a.

(b) Determine la respuesta $y[n]$ si la entrada $x[n]$ es $x[n] = 1$ para todo n.

11. Se conocen los siguientes datos de un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ y transformada Z $H(z)$:

    (a) $h[n]$ es real.

    (b) $h[n]$ es derecha.

    (c) $\lim\limits_{z\to\infty} H(z) = 1$

    (d) $H(z)$ tiene dos ceros.

    (e) $H(z)$ tiene uno de sus polos en una ubicación no real en el círculo definido por $|z| = 3/4$.

    Determine si es sistema es causal y/o estable.

12. Calcule la transformada inversa de las siguientes señales. Emplee expansión en fracciones simples o el método de serie de Taylor.

    (a) $X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$, $|z| > \frac{1}{2}$

    (b) $X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$, $|z| < \frac{1}{2}$

    (c) $X(z) = \frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, $|z| > \frac{1}{2}$

    (d) $X(z) = \frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, $|z| < \frac{1}{2}$

    (e) $X(z) = \frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}$, $|z| > \frac{1}{2}$

    (f) $X(z) = \frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}$, $|z| < \frac{1}{2}$

13. Usando el método indicado, determine la secuencia asociada con cada una de las siguientes transformadas Z:

    (a) Expansión en fracciones simples:

    $$X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} \qquad \text{y } x[n] \text{ absolutamente sumable}$$

    (b) Por división larga

    $$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad \text{y } x[n] \text{ derecha}$$

(c) Por fracciones simples

$$X(z) = \frac{3}{z - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z^{-1}} \qquad \text{y } x[n] \text{ absolutamente sumable}$$

14. Considere una secuencia real $x[n]$ con transformada Z racional $X(z)$.

    (a) A partir de la definición de la transformada Z demuestre que

    $$X(z) = X^*(z^*)$$

    (b) A partir del resultado anterior demuestre que si un polo (cero) de $X(z)$ ocurre en $z = z_0$, entonces un polo (cero) debe ocurrir también en $z = z_0^*$.

    (c) Verifique el resultado del apartado (b) para cada una de las siguientes secuencias:

    i. $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

    ii. $x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$

15. (De examen de Feb. de 2007) Para un cierto sistema LTI, la entrada $x[n] = a^n u[n]$ produce la salida $y[n] = b^n u[n]$. Razone si dicho sistema cumple las propiedades de memoria, causalidad, invertibilidad, estabilidad, linealidad e invarianza en el tiempo, en función de a y b.

16. (De examen de Sept 06) Calcule la salida del sistema estable descrito mediante la función de transferencia

    $$H(z) = \frac{4z}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{1}$$

    para la entrada $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

17. (De examen de Feb. de 2006) Sea $h[n]$ la respuesta al impulso de un sistema LTI obtenida a partir de la solución de una ecuación en diferencias de coeficientes constantes suponiendo reposo inicial.

    (a) Demuestre que para cualquier entrada causal $f[n]$ la salida del sistema se puede escribir como

    $$y[n] = \sum_{k=0}^{n} f[k]h[n-k] \ \forall n \geq 0 \tag{2}$$

    (b) Explique y justifique qué forma tendrá la región de convergencia de la transformada Z de $y[n]$.

    (c) Explique qué características adicionales tiene que tener $h[n]$ para que el sistema sea causal y estable.

18. (De examen de Sept. de 2005) Considere el sistema LTI representado por la siguiente respuesta al impulso:

    $$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}} \tag{3}$$

    (a) Escriba la ecuación en diferencias que da lugar a esta respuesta al impulso.

(b) Represente el diagrama de bloques de dicho sistema (formas directas I y II).

(c) Calcule dos sistemas $h_1[n]$ y $h_2[n]$ que cumplan que

$$h[n] * h_1[n] = h[n] * h_2[n] = \delta[n] \quad (4)$$

19. Problemas de ampliación: Oppenheim (2a. edición): 10.4, 10.5, 10.6, 10.8, 10.11, 10.13, 10.14, 10.25, 10.26, 10.31, 10.32, 10.43, 10.46, 10.56