Sistemas Lineales

Problemas de Muestreo (V2.0)

1. Una señal continua $x(t)$ se obtiene a la salida de un filtro pasobajo ideal con frecuencia de corte $\omega_c = 1000\pi$. Si el muestreo con tren de impulsos se realiza sobre $x(t)$, ¿cuál de los siguientes periodos de muestreo garantiza que $x(t)$ se pueda recuperar a partir de su versión muestreada usando un filtro paso bajo adecuado?

   a) $T = 0{,}5 \times 10^{-3}$
   b) $T = 2 \times 10^{-3}$
   c) $T = 10^{-4}$

2. Sea $x(t)$ una señal con frecuencia de Nyquist ω_0. Determine la frecuencia de Nyquist de cada una de las siguientes señales:

   a) $x(t) + x(t-1)$
   b) $\frac{\mathrm{d}x(t)}{dt}$
   c) $x^2(t)$
   d) $x(t)\cos\omega_0 t$

3. Estudie si es posible muestrear las siguientes señales con un tren de deltas equiespaciadas sin cometer *aliasing*. En caso afirmativo, calcule el máximo periodo de muestreo.

   a) $x_1(t)$ tal que $X_1(\omega) = 0\ |\omega| > 2\pi\ 10^3$.
   b) $x_2(t) = e^{-2t}u(t)$.
   c) $x_3(t) = x_2(t) * h_3(t)$, con $h_3(t)$ un filtro pasobajo ideal de ganancia 1 y frecuencia de corte 3π.
   d) $x_4(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$.
   e) $x_5(t) = \cos(5\pi t)$.
   f) $x_6(t) = \sin(9\pi t)$.
   g) $x_7(t) = e^{j\omega_0 t}$.
   h) $x_8(t) = \cos(5\pi t)\sin(\pi/4\ t)$.
   i) $x_9(t) = \cos(\pi t)\cos(3\pi t)$.
   j) $x_{10}(t)$ una señal periódica de periodo $T = 10$ con $c_k = 0$ si $|k| > 5$.

4. Para las siguientes señales, se realiza un muestreo con un tren de deltas equiespaciadas. Escoja una frecuencia de muestreo que evite el aliasing. En todos los casos dibuje $p(t)$, $x_p(t)$, $x[n]$ y sus transformadas de Fourier.

   a) $x(t) = x_1(t) * h_1(t)$, con $x_1(t) = e^{-|t|}$ y $h_1(t)$ un filtro pasobajo ideal de ganancia 1 y frecuencia de corte 3π.
   b) $x(t) = \cos(5\pi t)$.
   c) $x(t) = \sin(9\pi t)$.

d) $x(t) = \cos(5\pi t)\sin(\pi/4\ t)$.

e) $x(t) = \cos(\pi t)\cos(3\pi t)$.

f) $x(t) = \left[\frac{\operatorname{sen} Wt}{\pi t}\right]^2$

5. Se dispone de una serie de señales que se pueden muestrear sin aliasing a la frecuencia $\omega_s = 2\pi 10^3$. Se quiere diseñar un esquema que permita utilizar un sistema discreto que realice un procesado equivalente a un sistema continuo con respuesta al impulso $h_c(t)$. Diseñe el esquema para las siguientes respuestas al impulso continuas:

   a) Derivador continuo con $H_c(\omega) = j\omega$.

   b) $h_c(t) = e^{-2t}u(t)$.

   c) $h_c(t) = e^{-|t|}$.

   d) $h_c(t) = \cos(2\pi 100t)$.

   e) $h_c(t) = \cos(2\pi 10^4 t)$.

   f) $h_c(t) = [e^{-\alpha t}\cos 2\pi 200t]u(t)$, $\alpha > 0$

   g) $h_c(t) = e^{-3|t|}\operatorname{sen}\pi 10^3 t$

   h) $h_c(t) = \begin{cases} 1 + \cos 100\pi t, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

   i) $h_c(t) = [te^{-2t}\operatorname{sen} 4t]u(t)$

   j) $h_c(t) = \left[\frac{\operatorname{sen}\pi\ 10^3 t}{\pi t}\right]^2$

   k) $h_c(t) = u(t)$.

   l) Un sistema LTI causal cuya entrada y la salida están relacionadas por la siguiente ecuación diferencial

   $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

6. Sea una señal temporal definida como

   $$x(t) = \begin{cases} 3\cos(3t) & |t| \leq \frac{\pi}{3} \\ 0 & |t| > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

   a) Dibuje la señal $x(t)$ y su transformada de Fourier $X(\omega)$.

   b) La señal se muestrea con un tren de deltas equiespaciadas con periodo de muestreo $T_s = \pi/10$. Argumente si se podrá o no recuperar la señal original a partir de la muestreada utilizando un filtro pasobajo.

   c) Dibuje la señal muestreada continua $x_p(t)$ y la señal discreta $x[n]$.

   d) Calcule una expresión analítica para $X(\Omega)$.

7. La señal

   $$x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\cdot\cos(\pi t)$$

   se muestrea con un tren de deltas equiespaciadas $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t - kT)$ a la frecuencia de Nyquist, de tal forma que $x_p(t) = x(t)\cdot p(t)$. Posteriormente, la señal se reconstruye utilizando para ello el filtro de reconstrucción genérico para esa frecuencia de muestreo, dando lugar a $x_a(t)$.

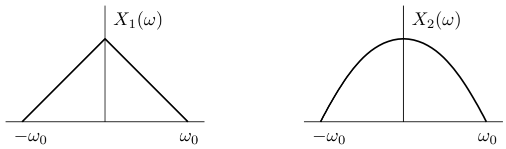
a) Dibuje las transformadas de Fourier de las señales $x(t)$, $p(t)$ y $x_p(t)$.

b) La señal $x_p(t)$ pasa por un conversor C/D dando lugar a la señal discreta $x_d[n]$, de tal modo que $x_d[n] = x(nT)$. Dibuje la transformada de Fourier de $x_d[n]$.

c) Calcule la señal reconstruida $x_a(t)$ y dibuje su transformada de Fourier.

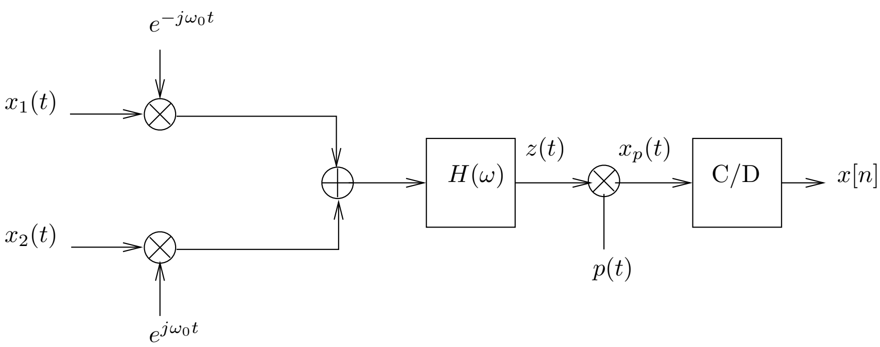
d) Se quiere realizar un procesado continuo de la señal $x(t)$ empleando para ello un sistema LTI discreto. Diseñe el sistema completo que permita realizar este procesado, si el sistema continuo tiene una respuesta al impulso $h_c(t) = e^{-2|t|}$. Indique el periodo de muestreo elegido y la respuesta al impulso del sistema discreto equivalente $h_d[n]$ (puede darse en el dominio de la frecuencia). Dibuje $H_d(\Omega)$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

8. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales reales de ancho de banda limitado, tal y como se muestran en la figura



$$X_1(\omega) = X_2(\omega) = 0 \ |\omega| > \omega_0$$

Considérese el esquema



$H(\omega)$ es un filtro pasobajo ideal de ganancia 1 y frecuencia de corte ω_0, y $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$, con $T = \pi/\omega_0$.

a) Dibuje $H(\omega)$, $Z(\omega)$ y $X_p(\omega)$.

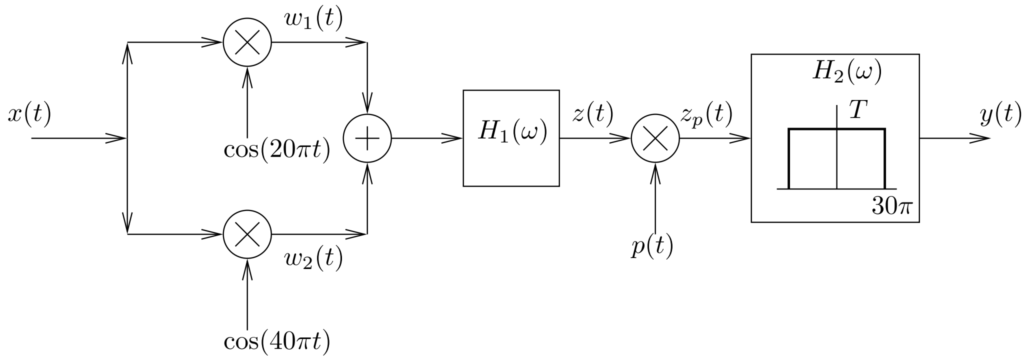
b) Proponga un esquema para recuperar $x_1(t)$ y $x_2(t)$ a partir de $x_p(t)$. (Represente el esquema en el dominio temporal).

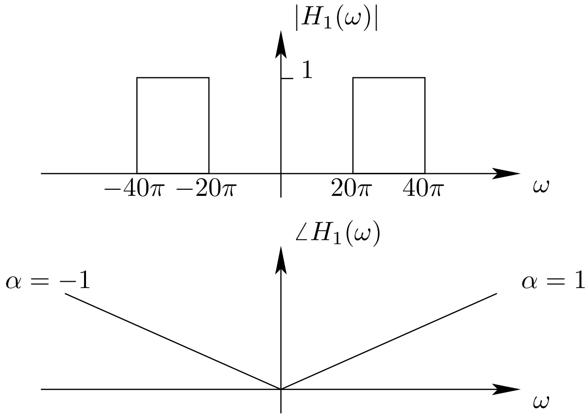
9. La señal analógica

$$x(t) = 0{,}1e^{j2000\pi t} + 2e^{j(10000\pi t + \pi/2)}$$

se muestrea con un tren de impulsos a una frecuencia de 8 KHz. La señal muestreada se pasa por el filtro paso-bajo de reconstrucción genérico para señales muestreadas a 8 KHz. Determine la señal a la salida.

10. Considere el siguiente sistema sistema



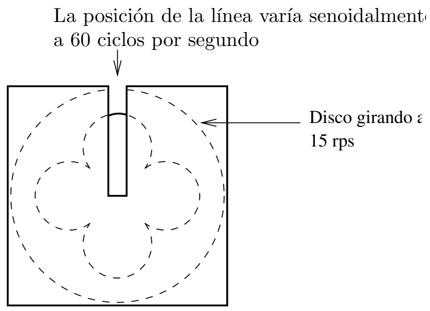


donde $x(t) = \frac{\sin(10\pi t)}{\pi t}$ y $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$, siendo la frecuencia de muestreo $\omega_s = 60\pi$.

a) Dibuje las transformadas de Fourier siguientes: $X(\omega)$, $W_1(\omega)$, $W_2(\omega)$, $Z(\omega)$, $P(\omega)$, $Z_p(\omega)$ e $Y(\omega)$.

b) Obtenga la señal de salida, $y(t)$.

11. Considere un disco en el cual están pintados cuatro ciclos de una senoide. El disco gira a 15 revoluciones por segundo, de manera que la senoide tiene una frecuencia de 60 Hz cuando se ve a través de una rendija estrecha, tal y como se muestra en la figura:



Sea $v(t)$ la posición de la línea vista a través de la rendija. Entonces

$$v(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi), \;\; \omega_0 = 120\pi$$

Para facilitar la notación se normalizará la señal, de modo que $A = 1$. A 60 Hz, el ojo no es capaz de seguir $v(t)$, y supondremos que este efecto puede explicarse modelando el ojo como un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte a 20 Hz.

El muestreo de la senoide se puede realizar mediante la iluminación del disco con luz estroboscópica. Así, la iluminación puede representarse mediante un tren de impulsos

$$i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

donde $1/T$ es la frecuencia del estroboscopio en Hz. La señal muestreada resultante es el producto $r(t) = v(t)i(t)$.

a) Dibuje $V(\omega)$, indicando claramente el efecto de los parámetros ϕ y ω_0.

b) Dibuje $I(\omega)$, indicando el efecto de T.

c) De acuerdo con el teorema del muestreo, hay un valor máximo de T en términos de ω_0 tal que $v(t)$ se pueda recuperar a partir de $r(t)$ mediante el uso de un filtro pasobajo. Trace $R(\omega)$ cuando T es ligeramente menor que ese valor.

Si el periodo de muestreo T se hace mayor que el valor determinado en la parte (c), se presenta el efecto de *aliasing* o solapamiento en el espectro. Como resultado de dicho solapamiento, percibimos una senoide de frecuencia más baja.

d) Suponga que $2\pi/T = \omega_0 + 20\pi$. Trace $R(\omega)$ para $|\omega| < 40\pi$. Denote mediante $v_a(t)$ la posición aparente de la línea tal y como la percibimos. Suponiendo que el ojo se comporta como un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte a 20 Hz y ganancia unitaria, exprese $v_a(t)$ de la forma

$$v_a(t) = A_a \cos(\omega_a + \phi_a)$$

donde A_a es la amplitud aparente, ω_a es la frecuencia aparente y ϕ_a la fase aparente de $v_a(t)$.

e) Repita el apartado (d) para $2\pi/T = \omega_0 - 20\pi$.

12. Sea $x(t)$ una señal con frecuencia de Nyquist ω_0. También

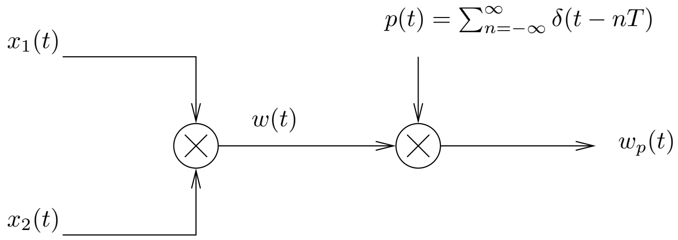
$$y(t) = x(t)p(t-1)$$

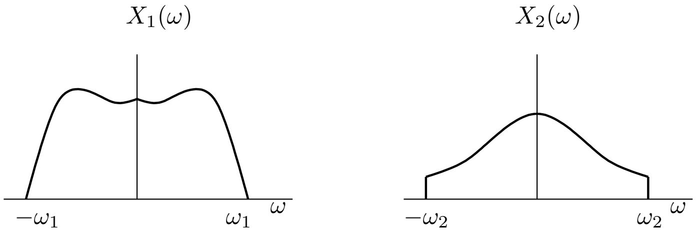
donde

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \text{ siendo } T < \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Especifique las restricciones de magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del filtro que proporciona $x(t)$ como su salida cuando $y(t)$ es la entrada.

13. En el sistema mostrado en la figura





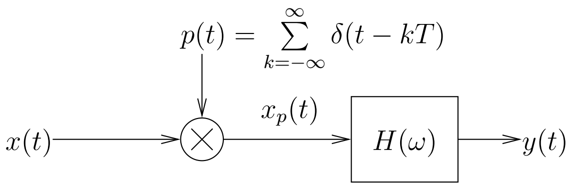
se multiplican dos funciones de tiempo $x_1(t)$ y $x_2(t)$, y el producto $w(t)$ se muestrea con un tren de impulsos. la función $x_1(t)$ es de banda limitada a ω_1 y $x_2(t)$ es de banda limitada a ω_2; esto es

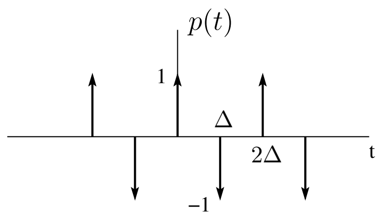
$$X_1(\omega) = 0, \;\; |\omega| \geq \omega_1$$

$$X_2(\omega) = 0, \;\; |\omega| \geq \omega_2$$

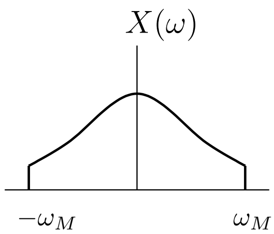
Determine el máximo intervalo de muestreo T tal que $w(t)$ se pueda recuperar a partir de $w_p(t)$ mediante el uso de un filtro pasobajo ideal.

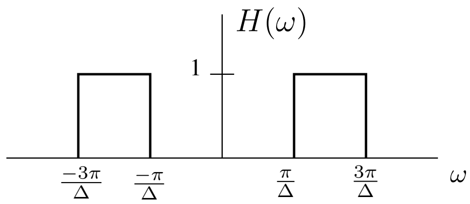
14. En la siguiente figura se muestra un sistema en el cual la señal de muestreo es un tren de impulsos con signo alternado:





La transformada de Fourier de la señal de entrada y del filtro $H(\omega)$ son como se muestran a continuación:





a) Para $\Delta < \pi/(2\omega_M)$, dibuje la transformada de Fourier de $x_p(t)$ e $y(t)$.

b) Para $\Delta < \pi/(2\omega_M)$, determine un sistema con el cual se pueda recuperar $x(t)$ a partir de $x_p(t)$.

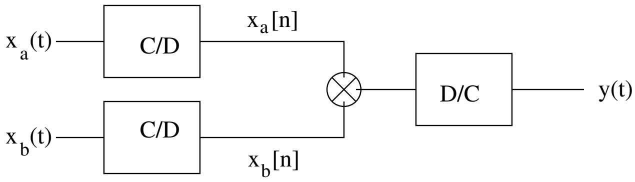
c) Para $\Delta < \pi/(2\omega_M)$, determine un sistema con el cual se pueda recuperar $x(t)$ a partir de $y(t)$.

d) ¿Cuál es el valor máximo de Δ en relación a ω_M para la cual $x(t)$ puede recuperarse a partir de $x_p(t)$ o de $y(t)$.

15. Sean $x_a(t)$ y $x_b(t)$ dos señales limitadas en banda tales que

$$|X_a(\omega)| = |X_b(\omega)| = 0 \;\; |\omega| > B$$

Se desea realizar un multiplicador de señales continuas mediante un multiplicador discreto, de acuerdo con la figura siguiente



siendo $x_a[n] = x_a(nT)$ y $x_b[n] = x_b(nT)$. Calcular el mayor valor de T que garantice que $y(t) = x_a(t)x_b(t)$.

16. Determine si cada uno de los siguientes sistemas es invertible. Si alguno lo es, contruya el sistema inverso. En caso contrario, encuentre un contrajemplo que lo demuestre.

a) $y[n] = x(nT)$.

b) $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{\text{sen}[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$.

17. En el siguiente problema se estudiará el efecto de una falta de sincronización en la frecuencia de muestreo al reproducir una señal de audio digital. Para ello, se parte de una señal sonora $x_s(t)$. Para evitar un posible aliasing, la señal se pasa por un filtro pasobajo $h(t)$ con frecuencia de corte $w_c = 2\pi \times 2\ 10^4$ (es decir, 20kHz). La señal resultante $x_f(t)$ es muestreada con un tren de impulsos a la frecuencia de Nyquist $\omega_s = \omega_N$, obteniendo así la señal $x[n]$, que es almacenada en un dispositivo electrónico.

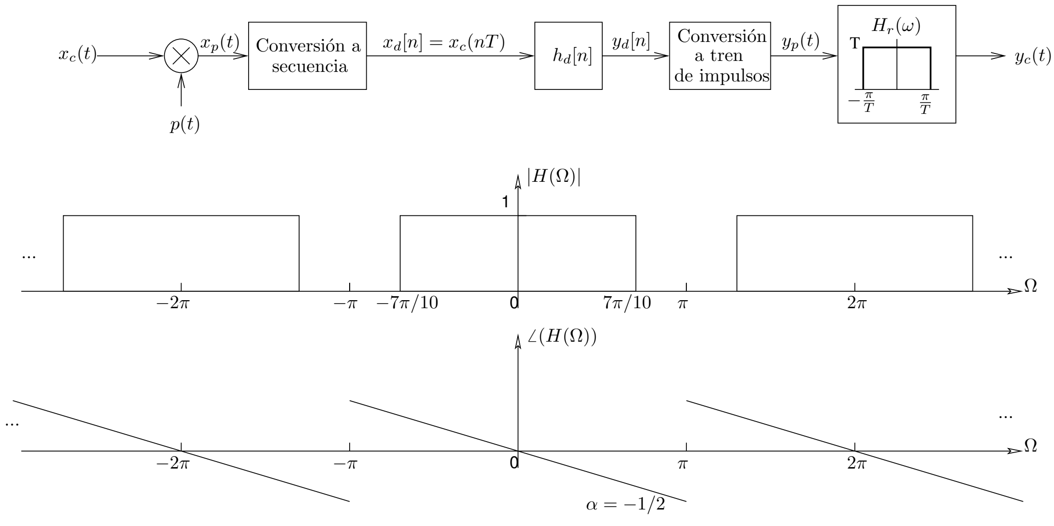
a) Dibuje la transformada de Fourier de las señales $x_s(t)$, $x_f(t)$ y $x[n]$. (Etiquete correctamente los ejes).

A la hora de reproducir la señal $x[n]$ almacenada, por un error de sincronización se asume una frecuencia de muestreo $\omega_{s_2} = \omega_s/2$. Esta frecuencia se usará para todo el proceso de interpolación. La señal $x[n]$ se pasa por un conversor de deltas discretas a continuas (usando ω_{s_2}), dando lugar a la señal $x_{p_2}(t)$. A partir de esta señal, mediante un proceso de interpolación, se reconstruye la señal continua $x_{f_2}(t)$.

(b) Dibuje la transformada de Fourier de la señal muestreada continua $x_{p_2}(t)$ y de la señal reconstruida $x_{f_2}(t)$.

(c) ¿Qué relación existe entre $x_{f_2}(t)$ y $x_f(t)$?

18. Considere la señal $x(t) = \cos(\frac{9\pi}{2}t)\sin(\frac{3\pi}{2}t)$, y el esquema mostrado en la figura



Para $T = \frac{1}{5}s.$ y $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$:

a) Obtenga y represente las siguientes señales en el dominio de la frecuencia: $X_c(\omega), P(\omega), X_p(\omega), X_d(\Omega), Y_d(\Omega), Y_p(\omega), Y_c(\omega)$.

b) Calcule $y_c(t)$.

c) Obtenga la respuesta al impulso, en tiempo y en frecuencia, del sistema LTI continuo equivalente al procesado discreto de la señal continua mostrado en la figura, en el caso de que no haya *aliasing* en el muestreo. Represente su respuesta en frecuencia.

19. Sea x(t) una señal limitada en tiempo, de tal modo que $x(t) = 0,\ |t| > T_0$. Su transformada de Fourier se multiplica por un tren de deltas equiestapaciadas una distancia W. Estudie analíticamente el efecto que tiene esta operación en el dominio temporal. Ilustre el resultado con un ejemplo gráfico.