Ingeniería de Telecomunicación
Sistemas Lineales

Tema 1. Soluciones Numéricas de la Hoja de Problemas

1. (a) $\frac{1}{2}e^{j\pi} = -\frac{1}{2}$
   (b) $\frac{1}{2}e^{-j\pi} = -\frac{1}{2}$
   (c) $e^{j\pi/2} = j$
   (d) $e^{-j\pi/2} = -j$
   (e) $e^{j5\pi/2} = j$
   (f) $\sqrt{2}e^{j\pi/4} = 1 + j$
   (g) $\sqrt{2}e^{j9\pi/4} = 1 + j$
   (h) $\sqrt{2}e^{-j9\pi/4} = 1 - j$
   (i) $\sqrt{2}e^{-j\pi/4} = 1 - j$

2. (a) $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$. $P_\infty = 0$, $E_\infty = \frac{1}{4}$.
   (b) $x_2(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$. $P_\infty = 1$, $E_\infty = \infty$.
   (c) $x_3(t) = \cos(t)$. $P_\infty = \frac{1}{2}$, $E_\infty = \infty$.
   (d) $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$. $P_\infty = 0$, $E_\infty = \frac{4}{3}$.
   (e) $x_2[n] = e^{j(\pi/2n+\pi/8)}$. $P_\infty = 1$, $E_\infty = \infty$.
   (f) $x_3[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n)$. $P_\infty = \frac{1}{2}$, $E_\infty = \infty$

3. (a) $x[n-3] = 0$ para $n < 1$ y $n > 7$.
   (b) $x[n+4] = 0$ para $n < -6$ y $n > 0$.
   (c) $x[-n] = 0$ para $n < -4$ y $n > 2$.
   (d) $x[-n+2] = 0$ para $n < -2$ y $n > 4$.

4. (a) $x(1-t) = 0$ para $t > -2$.
   (b) $x(1-t) + x(2-t) = 0$ para $t > -1$.
   (c) $x(1-t)x(2-t) = 0$ para $t > -2$.
   (d) $x(3t) = 0$ para $t < 1$.
   (e) $x(t/3) = 0$ para $t < 9$.

5. (a) $x(t) = 2e^{j(t+\pi/4)}u(t)$ no periódica.
   (b) $x[n] = u[n] + u[-n]$ no periódica.
   (c) $x(t) = 2\cos(3t + \pi/4)$ periódica, $T_0 = \frac{2\pi}{3}$.
   (d) $x(t) = e^{j(\pi t-1)}$ periódica, $T_0 = 2$.
   (e) $x[n] = \cos(8\pi n/7 + 2)$ periódica, $N_0 = 7$.
   (f) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta[n-4k] - \delta[n-1-4k]\}$ periódica, $N_0 = 4$.
   (g) $x(t) = \left[\cos(2t - \frac{\pi}{3})\right]^2$ periódica, $T_0 = \frac{\pi}{2}$.
   (h) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ periódica, $N_0 = 8$.

(i) $x(t) = \mathcal{E}v\{cos(4\pi t)u(t)\}$ es periódica de período, $T_0 = \frac{1}{2}$, si se define $u(t)$ así:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(j) $x(t) = \mathcal{O}d\{cos(4\pi t)u(t)\}$ no periódica.

(k) $x[n] = \mathcal{E}v\{\cos(\pi n/4)u[n]\}$ no periódica.

(l) $x[n] = \mathcal{O}d\{\text{sen}(n/4)u[n]\}$ no periódica.

(m) $x(t) = \mathcal{O}d\{\text{sen}(t/4)u(t)\}$ periódica, $T_0 = 8\pi$.

(n) $x[n] = \cos\left(\frac{11\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right) e^{j\frac{2\pi}{3}n}$ periódica, $N_0 = 12$.

6. (a) $x(t) = je^{j10t}$ periódica, $T_0 = \frac{\pi}{5}$.

   (b) $x(t) = e^{(-1+j)t}$ no periódica.

   (c) $x[n] = e^{j7\pi n}$ periódica, $N_0 = 2$.

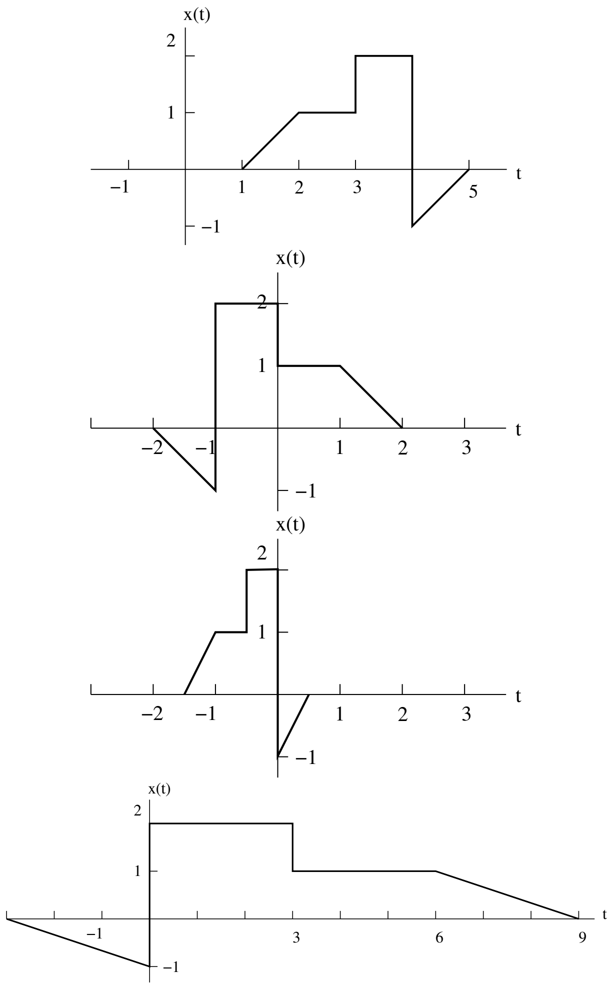
   (d) $x[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5}$ periódica, $N_0 = 10$.

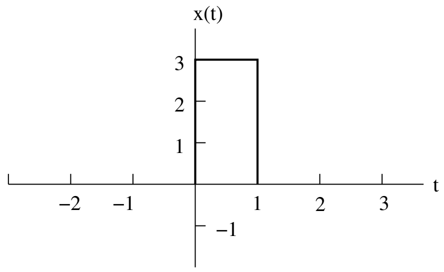
   (e) $x[n] = 3e^{j3/5(n+1/2)}$ no periódica.

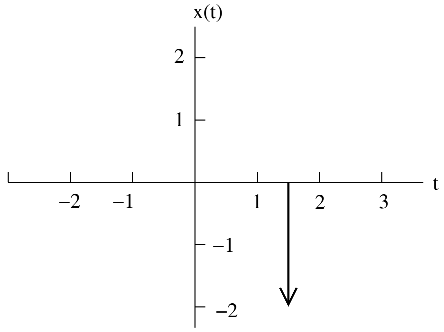
7. (a) $x(t) = 2\cos(10t + 1) - \sin(4t - 1)$. $T_0 = \pi$.

   (b) $x[n] = 1 + e^{j4\pi n/7} - e^{j2\pi n/5}$. $N_0 = 35$.

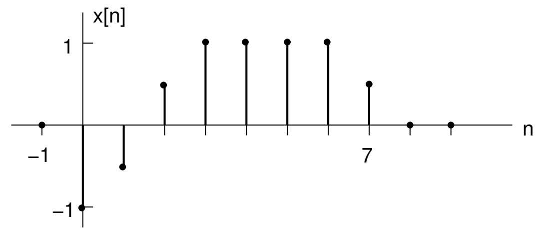
8.

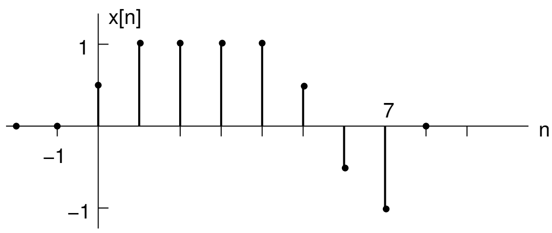


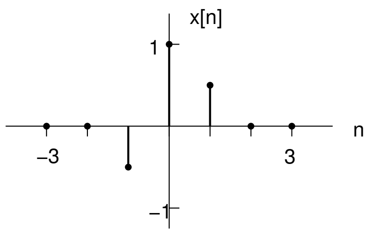

x(t)
3
2
1
−1
−2
−1
1
2
3
t

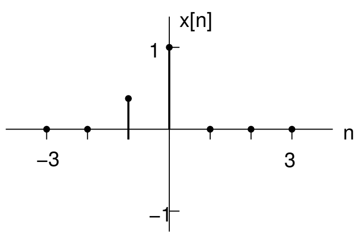

x(t)
2
1
−1
−2
−2
−1
1
2
3
t

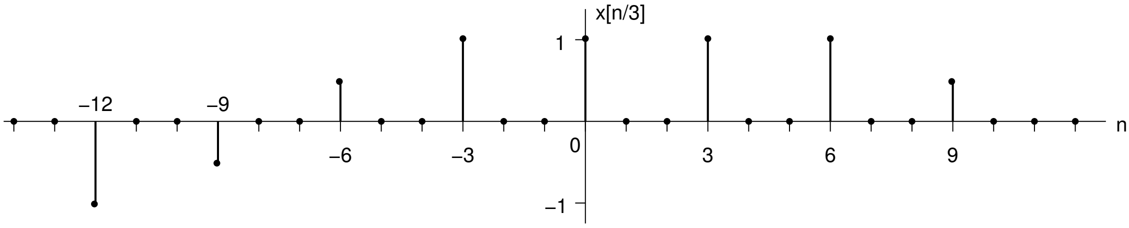
9.

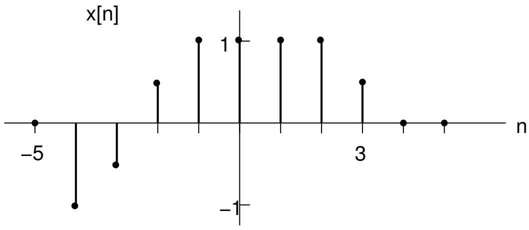

x[n]
1
−1
−1
7
n

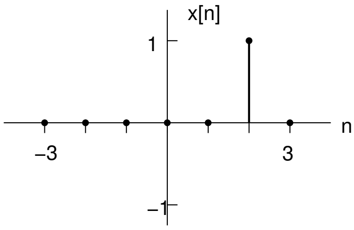

x[n]
1
−1
−1
7
n

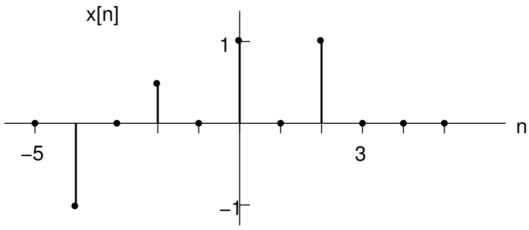

x[n]
1
−1
−3
3
n


x[n]
1
−1
−3
3
n









10. (a) Si $x[n]$ es una señal impar, entonces

$$x[n] = -x[-n]$$

y además, $x[0] = 0$. Siendo así, podemos afirmar

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty}(x[n] + x[-n]) = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty}(x[n] - x[n]) = x[0] = 0$$

como queríamos demostrar.

(b) Si $x_1[n]$ es impar entonces

$$x_1[n] = -x_1[-n]$$

y si $x_2[n]$ es par entonces

$$x_2[n] = x_2[-n]$$

El producto de ambas señales será:

$$x_1[n]x_2[n] = (-x_1[-n])(x_2[-n]) = -(x_1[-n]x_2[-n])$$

de forma que queda demostrado que $x_1[n]x_2[n]$ es impar.

(c) Si $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_e[n] + x_o[n])^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_e^2[n] + x_o^2[n] + 2x_e[n]x_o[n]) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2x_e[n]x_o[n]$$

Sucede que $2x_e[n]x_o[n]$ es impar (apartado (b)), así que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2x_e[n]x_o[n] = 0$ (apartado (a)). Queda entonces que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n]$$

11. (a) Si $x(t)$ es una señal impar, entonces

$$x(t) = -x(-t)$$

y además $x(0) = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{0} x(t)dt + \int_{0}^{\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{0} -x(-t)dt + \int_{0}^{\infty} x(t)dt =$$

$$= -\int_{0}^{\infty} x(t)dt + \int_{0}^{\infty} x(t)dt = 0$$

(b) Si $x_1(t)$ es par y $x_2(t)$ es impar, entonces el producto de ambas

$$x(t) = x_1(t)x_2(t) = -x_1(-t)x_2(-t) = -x(-t)$$

es impar.

(c) si $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x_e(t)^2 + x_o^2(t) + x_e(t)x_o(t))dt$$

Como $x_e(t)x_o(t)$ es impar (demostrado en el apartado anterior) y la integral de una función impar es cero (demostrado en el primer apartado), entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)dt$$

12. Ver la tabla mostrada a continuación de la definición de los sistemas.

(a) $y(t) = e^{x(t)}$

(b) $y[n] = x[n]x[n-1]$

(c) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

(d) $y[n] = x[-n]$

(e) $y[n] = x[n-2] - 2x[n-17]$

(f) $y(t) = x(t-1) - x(1-t)$

(g) $y(t) = [\sin(6t)]x(t)$

(h) $y[n] = \sum\limits_{k=n-2}^{n+4} x[k]$

(i) $y[n] = nx[n]$

(j) $y(t) = \int_{-\infty}^{3} x(\tau) d\tau$

(k) $y(t) = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-100) & x(t) \geq 0 \end{cases}$

(l) $y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ x(t) + x(t-100) & t \geq 0 \end{cases}$

(m) $y[n] = \begin{cases} x[n] & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x[n+1] & n \leq -1 \end{cases}$

(n) $y[n] = \begin{cases} x[n] & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$

(o) $y(t) = x(t/2)$

(p) $y[n] = x[2n]$

(q) $y(t) = u(x(t))$, donde $u(t)$ es la función escalón (Septiembre 2006, problema 3)

(r) $y(t) = \sin(x(2t))$

(s) $y[n] = \begin{cases} x]n/2], & n \text{ par}, \\ 1, & n \text{ impar}. \end{cases}$

	MEMORIA	INVARIANZA TEMPORAL	LINEALIDAD	CAUSALIDAD	ESTABILIDAD	INVERTIBILIDAD
(a)	NO	SÍ	NO	SÍ	SÍ	SÍ
(b)	SÍ	SÍ	NO	SÍ	SÍ	NO
(c)	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ*	NO	NO
(d)	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	SÍ
(e)	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO*
(f)	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
(g)	NO	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO
(h)	SÍ	SÍ	SÍ	NO	SÍ	NO
(i)	NO	NO	SÍ	SÍ	NO	NO
(j)	SÍ	NO	SÍ	NO	NO	NO
(k)	SÍ	SÍ	NO	SÍ	SÍ	NO
(l)	SÍ	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO
(m)	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	SÍ
(n)	NO	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO
(o)	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	SÍ
(p)	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
(q)	NO	SI	NO	SI	SÍ	NO
(r)	SÍ	NO	NO	NO	SÍ	NO
(s)	SÍ	NO	NO	NO	SÍ	SÍ

13. No puede ser lineal e invariante en el tiempo a la vez.

14. Oppenheim 1.13. $E_\infty = 4$

15. Oppenheim 1.15.

   (a) $y[n] = 2x[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4]$

   (b) $y[n] = 2x[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4]$

16. Oppenheim 1.30.

   (a) Invertible. Sistema inverso $y(t) = x(t+4)$

   (b) No Invertible. Las señales $x_1(t)$ y $x_2(t) + 2\pi$ dan la misma salida.

   (c) No Invertible. Las señales $x_1[n] = \delta[n], x_2[n] = 2\delta[n]$ ambas dan $y[n] = 0$.

   (d) Invertible. Sistema inverso $y(t) = dx(t)/dt$

   (e) Invertible. Sistema inverso $y[n] = \begin{cases} x[n+1] & n \geq 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$

   (f) No invertible. $x_1[n]$ y $x_2[n] = x_1[-n]$

   (g) Invertible. Sistema inverso $y[n] = x[1-n]$

   (h) Invertible. Sistema inverso $y(t) = x(t) + dx(t)/dt$

   (i) Invertible. Sistema inverso $y[n] = x[n] - (1/2)x[n-1]$

   (j) Invertible. Si $x(t)$ es cualquier cte, entonces $y(t) = 0$.

   (k) No invertible. $x_1[n] = \delta[n]$, $x_2[n] = 2\delta[n]$, ambas dan $y[n] = 0$.

   (l) Invertible. Sistema inverso $y(t) = x(t/2)$

   (m) No invertible. $x_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$, $x_2[n] = \delta[n]$, ambas dan $y[n] = \delta[n]$.

   (n) Invertible. Sistema inverso $y[n] = x[2n]$

17. Oppenheim 1.38.

   (a) Sabemos que $2\delta_\Delta(2t) = \delta_\Delta(t)$, entonces
   $\lim\limits_{\Delta\to 0} 2\delta_\Delta(2t) = \lim\limits_{\Delta\to 0} \delta_\Delta(t) \Rightarrow \delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$

18. Oppenheim 1.41.

   (a) $y[n] = 2x[n]$, luego el sistena es invariante en el tiempo.

   (b) $y[n] = (2n-1)x[n]$ luego el sistena no es invariante en el tiempo.

   (c) $y[n] = x[n](1 + (-1)^n + 1 + (-1)^{n-1}) = 2x[n]$, luego el sistena es invariante en el tiempo.