Sistemas Lineales

Tema 3. Soluciones Numéricas de la Hoja de Problemas

1. La salida no se puede escribir $y(t) = Ax(t)$, siendo A un valor que no depende de t.

2. (a) Sí, (b) No, (c) No.

3. (a) $a_1 = 1$, $a_k = 0, k \neq 1$.

   (b) $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j), & k = 1 \\ \frac{1}{2}e^{j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j), & k = -1 \\ 0, & |k| \neq 1 \end{cases}$

   (c) $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 1 \\ \frac{1}{2}, & k = -1 \\ \frac{-1}{2}j, & k = 2 \\ \frac{1}{2}j, & k = -2 \\ 0, & |k| \neq 1, 2 \end{cases}$

   (d) $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 2 \\ \frac{1}{2}, & k = -2 \\ \frac{-1}{2}j, & k = 3 \\ \frac{1}{2}j, & k = -3 \\ 0, & |k| \neq 2, 3 \end{cases}$

   (e) $a_k = \frac{e^{(1+jk\pi)} - e^{-(1+jk\pi)}}{2(1+jk\pi)} = \left(e - e^{-1}\right) \frac{(-1)^k}{2(1+jk\pi)}$

   (f) $a_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{j(-1)^k}{k\pi}, & k \neq 0 \end{cases}$

   (g) $a_k = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{j\pi/4}, & k = 4 \\ \frac{1}{4}e^{-j\pi/4}, & k = -4 \\ \frac{1}{2}e^{j\pi/4}, & k = 5 \\ \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}, & k = -5 \\ \frac{1}{4}e^{j\pi/4}, & k = 6 \\ \frac{1}{4}e^{-j\pi/4}, & k = -6 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

   (h) $a_k = \begin{cases} \frac{3}{4}, & k = 0 \\ -\frac{2\pi+1}{4\pi}j, & k = 2 \\ \frac{2\pi+1}{4\pi}j, & k = -2 \\ \frac{1-(-1)^k}{2(k\pi)^2} + \frac{(-1)^{k+1}}{2k\pi}j = \begin{cases} -\frac{1}{2k\pi}j, & k \text{ par} \\ \frac{1}{(k\pi)^2} + \frac{1}{2k\pi}j, & k \text{ impar} \end{cases}, & k \neq 0, \pm 2 \end{cases}$

   (i) $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ \frac{3(\cos(k\pi/3) - \cos(2k\pi/3))}{(k\pi)^2} = \begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \frac{6\,\text{sen}(k\pi/2)\,\text{sen}(k\pi/6)}{(k\pi)^2}, & k \text{ impar} \end{cases}, & k \neq 0 \end{cases}$

   (j) $a_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{3j}{2(k\pi)^2}\left[-e^{j2k\pi/3}\,\text{sen}(2k\pi/3) + 2e^{-jk\pi/3}\,\text{sen}(k\pi/3)\right], & k \neq 0 \end{cases}$

(k) $a_k = \begin{cases} 0, & k=0 \\ \frac{-1}{4}j, & k=2 \\ \frac{1}{4}j, & k=-2 \\ \frac{(-1)^k-1}{\pi(k^2-4)} = \begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \frac{-2}{\pi(k^2-4)}, & k \text{ impar} \end{cases}, & k \neq 0, \pm 2 \end{cases}$

(l) $a_k = \frac{1}{2} - (-1)^k = \begin{cases} \frac{-1}{2}, & k \text{ par} \\ \frac{3}{2}, & k \text{ impar} \end{cases}$

(m) $a_k = \begin{cases} 0, & k=0 \\ \frac{\cos(k\pi/3)-\cos(2k\pi/3)}{k\pi}j = \begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \frac{2}{k\pi}\operatorname{sen}(k\pi/2)\operatorname{sen}(k\pi/6)j, & k \text{ impar} \end{cases}, & k \neq 0 \end{cases}$

4. Expresaremos la salida $y(t)$ mediante su representación en serie de Fourier, $y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$:

(a) $b_k = \begin{cases} \frac{1}{8+j4\pi}, & k=1 \\ \frac{1}{8-j4\pi}, & k=-1 \\ 0, & |k| \neq 1 \end{cases}$

(b) $b_k = \begin{cases} \frac{1}{8j-8\pi}, & k=2 \\ \frac{1}{-8j-8\pi}, & k=-2 \\ \frac{e^{j\pi/4}}{8+j12\pi}, & k=3 \\ \frac{e^{-j\pi/4}}{8-j12\pi}, & k=-3 \\ 0, & |k| \neq 2,3 \end{cases}$

(c) $b_k = \frac{1}{4+jk2\pi}$

(d) $b_k = \frac{1-(-1)^k}{8+jk2\pi}$

5. (a) $\Re\{X(\omega)\} = 0$. Esto es equivalente a que $X(\omega)$ sea imaginaria pura. Según la propiedad de conjugación y simetría, si una señal $x(t)$ es real e impar, entonces su transformada de Fourier $X(\omega)$ es imaginaria pura.
• Cumplen esta condición las señales (a) y (d).

(b) $\Im\{X(\omega)\} = 0$. Esto es equivalente a que $X(\omega)$ sea real. Según la propiedad de conjugación y simetría, si una señal $x(t)$ es real y par, entonces su transformada de Fourier $X(\omega)$ es real.
• Cumplen esta condición las señales (e) y (f).

(c) $\exists \alpha \in \mathcal{R}$ tal que $e^{j\alpha\omega}X(\omega) \in \mathcal{R}$. Entonces, ha de ser $X(\omega) = Ke^{-j\alpha\omega}, K \in \mathcal{R}$. Para ello, $x(t)$ ha de ser una señal real y par (cuya transformada de Fourier es real), desplazada un valor $t_0 = \alpha$, puesto que un desplazamiento de t_0 en el tiempo se traduce en multiplicar un término $e^{-jt_0\omega}$.
• Cumplen esta condición las señales (a) ($\alpha = \pm 1, \pm 3 \ldots$), (b) ($\alpha = 1$), (e) ($\alpha = 0$) y (f) ($\alpha = 0$).

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega = 0$. A partir de la ecuación de síntesis $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$, si tomamos $t = 0$, queda $x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega$. Entonces, para cumplir la condición ha de ser $x(0) = 0$.
• Cumplen esta condición las señales (a), (b), (c), (d), (f).

(e) $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(\omega)d\omega = 0$. Utilizando la propiedad de derivación:
$x(t) \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X(\omega)$

$\frac{dx(t)}{dt} \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} j\omega X(\omega)$
Entonces, aplicando esto a la ecuación de síntesis:
$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$
$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$
Para $t = 0$:
$\frac{dx(t)}{dt}|_{t=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega)d\omega$
Entonces, para cumplir la condición ha de ser $\frac{dx(t)}{dt}|_{t=0} = 0$
• Cumplen esta condición las señales (b), (c), (e) y (f).

(f) $X(\omega)$ es periódica. $X(\omega)$ se debe poder poner como una serie de Fourier en frecuencia: $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkT_0\omega}$, con lo que por dualidad, en el tiempo debe corresponder a una serie de deltas.
• Cumple esta condición la señal (b).

6. (a) $X(\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega}$
   (b) $X(\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{2-j\omega} + \frac{e^{-j\omega}}{2+j\omega} = \frac{4e^{-j\omega}}{\omega^2+4}$
   (c) $X(\omega) = 2\cos(\omega)$
   (d) $X(\omega) = -2j\,\mathrm{sen}(2\omega)$

7. (a) $X(\omega) = \pi e^{-j\pi/4}\delta(\omega-2\pi) + \pi e^{j\pi/4}\delta(\omega+2\pi)$
   (b) $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi e^{j\pi/8}\delta(\omega-6\pi) + \pi e^{-j\pi/8}\delta(\omega+6\pi)$
   (c) $X(\omega) = \pi\delta(\omega+2\pi) + \pi\delta(\omega-2\pi) + \pi j\delta(\omega+3\pi) - \pi j\delta(\omega-3\pi)$

8. (a) $X(\omega) = \frac{1}{2[\alpha+j(\omega-\omega_0)]} + \frac{1}{2[\alpha+j(\omega+\omega_0)]}$
   (b) $X(\omega) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{3+2j-j\omega} - \frac{1}{3-2j-j\omega} + \frac{1}{3-2j+j\omega} - \frac{1}{3+2j+j\omega}\right] = 3j\left[\frac{1}{9+(\omega+2)^2} - \frac{1}{9+(\omega-2)^2}\right]$
   (c) $X(\omega) = \frac{2\,\mathrm{sen}(\omega)}{\omega} + \frac{\mathrm{sen}(\omega-\pi)}{\omega-\pi} + \frac{\mathrm{sen}(\omega+\pi)}{\omega+\pi} = \frac{2\,\mathrm{sen}(\omega)}{\omega} - \frac{\mathrm{sen}(\omega)}{\omega-\pi} - \frac{\mathrm{sen}(\omega)}{\omega+\pi}$
   (d) $X(\omega) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega T}}$
   (e) $X(\omega) = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{(2-4j+j\omega)^2} - \frac{1}{(2+4j+j\omega)^2}\right]$
   (f) $X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -3\pi \\ \frac{1+e^{-j\omega}}{j2\pi}, & -3\pi < \omega < -\pi \\ 0, & -\pi < \omega < \pi \\ \frac{-1-e^{-j\omega}}{j2\pi}, & pi < \omega < 3\pi \\ 0, & \omega > 3\pi \end{cases}$
   (g) $X(\omega) = \frac{1}{j\omega} - \frac{2e^{-j\omega}}{\omega^2} - 2\frac{e^{-j\omega}-1}{j\omega^3}$
   (h) $X(\omega) = \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1(k\pi)\delta(\omega-k\pi)$
   $X_1(\omega) = \frac{1}{1-e^{-2}}[\frac{1-e^{-2(1+j\omega)}}{1+j\omega} + \frac{e^{-2}(e^{2(1-j\omega)}-1)}{1-j\omega}]$
   (i) $X(\omega) = \frac{2\cos(2\omega)}{\omega}j - \frac{2\,\mathrm{sen}(\omega)}{\omega^2}j$
   (j) $X(\omega) = \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[2+(-1)^k\right]\delta(\omega-k\pi)$

9. (a) $x(t) = \begin{cases} e^{j2\pi t}, & |t| < 3 \\ 0, & |t| > 3 \end{cases}$
   (b) $x(t) = \frac{e^{j\pi/3}}{2}\delta(t+4) + \frac{e^{-j\pi/3}}{2}\delta(t-4)$

(c) $x(t) = \frac{1}{\pi}[\frac{\text{sen}(t-3)}{t-3} + \frac{\cos(t-3)-1}{(t-3)^2}]$

(d) $x(t) = \frac{-\cos(3t)}{\pi t}j + \frac{\text{sen}(2t)-\text{sen}(t)}{\pi t^2}j$

(e) $x(t) = \frac{2j}{\pi}\,\text{sen}(t) + \frac{3}{\pi}\cos(2\pi t)$

10. (a) $y(t) = \frac{1}{4}e^{-4t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}te^{-2t}u(t)$
    (b) $y(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{4}te^{-2t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-4t}u(t) + \frac{1}{4}te^{-4t}u(t)$
    (c) $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{t}u(-t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$

11. $y(t) = \left[1 - e^{-(t-1)}\right]u(t-1) - \left[1 - e^{-(t-5)}\right]u(t-5) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} Y(\omega) = e^{-j3\omega}\frac{2\,\text{sen}(2\omega)}{\omega(1+j\omega)}$

    $X(\omega) = e^{-j\omega 2}\frac{1}{1+j\omega}$, $H(\omega) = e^{-j\omega}\frac{2\,\text{sen}(2\omega)}{\omega} \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = e^{-j3\omega}\frac{2\,\text{sen}(2\omega)}{\omega(1+j\omega)}$

12. (a) Periódica.
    $X_1(\omega) = \pi\delta(\omega + 9\omega_0) + \pi\delta(\omega + 6\omega_0) + \pi\delta(\omega - 6\omega_0) + \pi\delta(\omega - 9\omega_0)$
    (b) No periódica ($\nexists$ frecuencia fundamental de la que todas sean múltiplo).

$$X_2(\omega) = \frac{\pi}{2}\left[\delta\left(\omega + \omega_0(\sqrt{2}+1)\right) - \delta\left(\omega + \omega_0(\sqrt{2}-1)\right) + \delta\left(\omega - \omega_0(\sqrt{2}-1)\right) - \delta\left(\omega - \omega_0(\sqrt{2}+1)\right)\right]$$

    (c) Periódica.
    $X_3(\omega) = j\pi\left[\delta\left(\omega + \omega_0(\sqrt{2}+1)\right) - \delta\left(\omega - \omega_0(\sqrt{2}+1)\right)\right]$
    (d) No periódica.

$$X_4(\omega) = j\pi\sum_{n=1}^{5}\left[\delta(\omega + \sqrt{n}\omega_0) - \delta(\omega - \sqrt{n}\omega_0)\right]$$

    (e) Periódica.

$$X_5(\omega) = j\pi\left[\delta(\omega + \pi/2) - \delta(\omega - \pi/2)\right] + \pi\left[\delta(\omega + \pi/3) + \delta(\omega - \pi/3)\right]$$

13. Utilizando los a_k y ω_0 obtenidos en el ejercicio 3-(e):

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\frac{(-1)^k(e - e^{-1})}{1 + jk\pi}\delta(\omega - k\pi)$$

14. (a) $h(t) = (e^{-2t} - e^{-4t})u(t)$
    (b) $y(t) = (t^2/2 - t/2 + 1/4)e^{-2t}u(t) - (1/4)e^{-4t}u(t)$
    (c) $h(t) = 2\delta(t) - \sqrt{2}(1-j)e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)t}u(t) - \sqrt{2}(1+j)e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)t}u(t)$

15. (Examen Feb. 2008, ejercicio 1b)
    $P_\infty = 0$, $E_\infty = \frac{1}{3}$.

16. (Examen Feb. 2008, ejercicio 3)

$$X(\omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{a\left[1 - (-1)^k e^{-a}\right]}{a^2 + k^2\pi^2}\delta(\omega - k\pi)$$

17. (Examen Feb. 2007, ejercicio 3)

   (a) Demostración similar al teorema de Parseval.

   (b) $X(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & -\omega_0 - B < \omega < -\omega_0 + B, \\ e^{j\omega t_0}, & \omega_0 - B < \omega < \omega_0 + B, \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$

   (c) $Y(\omega) = 2\pi e^{-a|\omega|}$

   (d) $< x(t), y(t) >= \frac{2}{a^\star - jt_0}\left[e^{-(a^\star - jt_0)(\omega_0 - B)} - e^{-(a^\star - jt_0)(\omega_0 + B)}\right]$

   (e) $Z(\omega) = 2\pi e^{-a\omega)} u(\omega) - 2\pi e^{a\omega)} u(-\omega)$,
   $< x(t), z(t) >= 0$

18. (Examen Sep. 2006, ejercicio 5)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\pi} + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(k\pi/2)}{\pi(1-k^2)} \cos(kt) + \frac{1}{2}\cos(t) \\ &= \frac{1}{\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(1-4k^2)} \cos(2kt) + \frac{1}{2}\cos(t) \end{aligned}$$

19. (Examen Feb. 2006, ejercicio 3)
   $\omega_0 = 2\pi k,\ k \in \mathcal{Z},\ k \neq 0$

20. (Examen Sep. 2005, ejercicio 1)
   $\omega_{\max} = 4\pi\omega_0, \quad Y(0) = \frac{2}{3\omega_0}$

21. (Examen Sep. 2005, ejercicio 2)

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{8k}{j(4k^2-1)} \delta(\omega - 2\pi k).$$

   La parte de la transformada de Fourier dentro del intervalo $[-5\pi, 5\pi]$ es:

$$\frac{16}{15} j\delta(\omega + 4\pi) + \frac{8}{3} j\delta(\omega + 2\pi) - \frac{8}{3} j\delta(\omega - 2\pi) - \frac{16}{15} j\delta(\omega - 4\pi)$$

22. Problemas de ampliación:

   3.1. $x(t) = 4\cos(\pi t/4) + 8\cos(3\pi t/4 + \pi/2)$

   3.3. $\omega_0 = \pi/3$,

$$a_k = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ \frac{1}{2}, & k = 2 \\ \frac{1}{2}, & k = -2 \\ -2j, & k = 5 \\ 2j, & k = -5 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

   3.4. $a_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ 3\frac{e^{-jk\pi/2}\,\mathrm{sen}(k\pi/2)}{k\pi} = 3\frac{(-1)^k - 1}{2k\pi} j = \begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \frac{-3}{k\pi} j, & k \text{ impar} \end{cases}, & k \neq 0 \end{cases}$

3.13. Los coeficientes de la serie de Fourier que corresponden a $x(t)$ son:

$$a_k = \begin{cases} 0, & k=0 \\ 2\frac{e^{-jk\pi/2}\,\mathrm{sen}(k\pi/2)}{k\pi} = \frac{(-1)^k-1}{k\pi}j = \begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \frac{-2}{k\pi}j, & k \text{ impar} \end{cases}, & k \neq 0 \end{cases}$$

$b_k = a_k H(k\pi/4) = 0, \forall k,$

$y(t) = 0.$

3.23. (a) $x(t) = \begin{cases} 3/4, & -3/2 < t < -1/2 \\ -1/4, & -1/2 < t < 5/2 \end{cases}$

(b) $x(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 7/4 \\ 1/2, & 7/4 < t < 9/4 \\ 0, & 9/4 < t < 4 \end{cases}$

(c) $x(t) = -2\,\mathrm{sen}(\pi t/2) - 4\,\mathrm{sen}(\pi t)$

(d) $x(t) = 6\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\delta(t-4k) - 2\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\delta(t-2-4k)$

3.24. (a) $a_0 = 1/2$

(b) $a_k = \begin{cases} 0, & k=0 \\ \frac{(-1)^k-1}{k\pi}j = \begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \frac{-2}{k\pi}j, & k \text{ impar} \end{cases}, & k \neq 0 \end{cases}$

(c) $a_k = \begin{cases} 1/2, & k=0 \\ \frac{(-1)^k-1}{(k\pi)^2} = \begin{cases} 0, & k \text{ par} \\ \frac{-2}{(k\pi)^2}, & k \text{ impar} \end{cases}, & k \neq 0 \end{cases}$

4.5. $x(t) = \frac{-2\,\mathrm{sen}\left[3\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]}{\pi\left(t-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{6}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left[3\left(t-\frac{3}{2}\right)/\pi\right]$

Valores de $t/x(t)=0$: $t = \frac{k\pi}{3} + \frac{3}{2}$, $k = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

4.6. (a) $X_1(\omega) = \left(e^{-j\omega} + e^{j\omega}\right)X(-\omega) = 2\cos(\omega)X(-\omega)$

(b) $X_2(\omega) = \frac{1}{3}e^{-j2\omega}X\left(\frac{\omega}{3}\right)$

(c) $X_3(\omega) = -\omega^2 e^{-j\omega}X(\omega)$

4.8. (a) $X(\omega) = \frac{2\,\mathrm{sen}(\omega/2)}{j\omega^2} + \pi\delta(\omega)$

(b) $G(\omega) = X(\omega) - \pi\delta(\omega) = \frac{2\,\mathrm{sen}(\omega/2)}{j\omega^2}$

4.9. (a) $X(\omega) = \frac{\mathrm{sen}(\omega)}{j\omega^2} - \frac{e^{-j\omega}}{j\omega}$

(b) $\Re\{X(\omega)\} = \frac{\mathrm{sen}(\omega)}{\omega} \stackrel{\mathfrak{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x(t) = \begin{cases} 1/2, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$

(c) $\mathfrak{F}\{x_0(t)\} = -\frac{\mathrm{sen}\,\omega}{\omega^2}j + \frac{\cos\omega}{\omega}j$. Es imaginario puro e impar.

4.12. (a) $te^{-|t|} \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{-4\omega}{(1+\omega^2)^2}j$

(b) $\frac{4t}{(1+t^2)^2} \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} -2\pi\omega e^{-|\omega|}j$

4.23. $X_0(\omega) = \frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}$

(a) $X_1(\omega) = \frac{2+2\omega e^{-1}\,\mathrm{sen}\,\omega - 2e^{-1}\cos\omega}{1+\omega^2}$

(b) $X_2(\omega) = \frac{-2\omega+2e^{-1}\,\mathrm{sen}\,\omega+2\omega e^{-1}\cos\omega}{1+\omega^2}j$

(c) $X_3(\omega) = \frac{1+e^{j\omega}-e^{-1}\left(1+e^{-j\omega}\right)}{1+j\omega}$

(d) $X_4(\omega) = \frac{1-(2+j\omega)e^{-(1+j\omega)}}{(1+j\omega)^2}$

4.31. (a) $Y_1(\omega) = Y_2(\omega) = Y_3(\omega) = \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)\right]$
$\updownarrow \mathfrak{F}^{-1}$
$y_1(t) = y_2(t) = y_3(t) = \operatorname{sen} t$

(b) Cualquier combinación lineal de $h_1(t)$, $h_2(t)$ y $h_3(t)$, produce la misma respuesta a $x(t) = \cos t$. Por ejemplo:

$$h_4(t) = \frac{1}{2}\left[h_1(t) + h_2(t)\right] = \frac{1}{2}u(t) - \delta(t) + \frac{5}{2}e^{-2t}u(t)$$

Este problema ilustra el hecho de que la respuesta a $\cos t$ no caracteriza un sistema LTI.

4.34. (a) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 4x(t)$
(b) $h(t) = 2e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$
(c) $y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-4t}u(t)$

4.36. (a) $H(\omega) = \frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}$
(b) $h(t) = \frac{3}{2}\left[e^{-2t} + e^{-4t}\right]u(t)$
(c) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt} + 9x(t)$