Sistemas Lineales

Tema 4. Soluciones Numéricas de la Hoja de Problemas[1]

1. (a) Dentro del periodo $0 \leq k \leq 7$:
$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-j3\pi/4}, & k=1 \\ \frac{1}{2}e^{j3\pi/4}, & k=7 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$
a_k periódico con periodo $N = 8$.

(b) Dentro del periodo $0 \leq k \leq 20$:
$$a_k = \begin{cases} -\frac{1}{2}j, & k=3 \\ \frac{1}{2}, & k=7 \\ \frac{1}{2}, & k=14 \\ \frac{1}{2}j & k=18 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$
a_k periódico con periodo $N = 21$.

(c) Dentro del periodo $0 \leq k \leq 7$:
$$a_k = \begin{cases} \frac{e^{-j\pi/3}}{2}, & k=3 \\ \frac{e^{j\pi/3}}{2}, & k=5 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$
a_k periódico con periodo $N = 8$.

(d) $a_k = \frac{21}{32}\frac{e^{jk2\pi/3}}{1-\frac{1}{2}e^{-jk\pi/3}}$
a_k periódico con periodo $N = 6$.

(e) Dentro del periodo $0 \leq k \leq 11$:
$$a_k = \begin{cases} -\frac{1}{4}j, & k=1 \\ \frac{1}{4}j, & k=5 \\ -\frac{1}{4}j, & k=7 \\ \frac{1}{4}j, & k=11 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$
a_k periódico con periodo $N = 12$.

(f) $a_k = \frac{1}{4}[1 + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})[(-j)^k + j^k]]$
a_k periódico con periodo $N = 4$.
La expresión para a_k puede ponerse, de manera alternativa, de una manera muy distinta en apariencia y sin embargo equivalente:
Dentro de un periodo $0 \leq k \leq 3$:
$a_0 = \frac{8-5\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}}$,
$a_k = -\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{(-j)^k}{1+(-1)^k-\sqrt{2}(-j)^k}$, $k = 1, 2, 3$.

(g) Dentro de un periodo $0 \leq k \leq 11$:
$a_0 = \frac{24-13\sqrt{2}}{24-12\sqrt{2}}$

[1] Muchas soluciones discretas se pueden escribir de maneras muy distintas y sin embargo ser la misma función.

$a_k = \frac{-\sqrt{2}}{12} \frac{e^{-jk\pi/6}}{1-\sqrt{2}e^{-jk\pi/6}+e^{-jk\pi/3}}$, $1 \leq k \leq 11$
a_k periódico con periodo $N = 12$.

(h) Dentro de un periodo $0 \leq k \leq 6$:
$a_0 = \frac{5}{7}$
$a_k = \frac{1}{7e^{jk4\pi/7}}[1 + 2\cos(\frac{4\pi}{7}k) + 2\cos(\frac{2\pi}{7}k)]$, $k \neq 0$.
La expresión para a_k puede ponerse, de manera alternativa, de una manera muy distinta en apariencia y sin embargo equivalente:
$a_k = \frac{1}{7e^{jk4\pi/7}} \frac{\sin(\frac{5\pi}{7}k)}{\sin(\frac{\pi}{7}k)}$, $k \neq 0$.
a_k periódico con periodo $N = 7$.

(i) Dentro de un periodo $0 \leq k \leq 5$:
$a_0 = \frac{2}{3}$
$a_k = \frac{1}{6}[1 + e^{-jk\pi/3} + e^{-jk2\pi/3} + e^{-jk\pi}]$, $k \neq 0$.
a_k periódico con periodo $N = 6$.

(j) $a_k = \frac{1}{6}[1+2e^{-jk\pi/3} - e^{-jk2\pi/3} - e^{-j4\pi/3} + 2e^{jk5\pi/3}] = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\cos(\frac{\pi}{3}k) - \frac{1}{3}\cos(\frac{2\pi}{3}k)$
a_k periódico con periodo $N = 6$.

(k) $a_k = \frac{1}{5}[e^{-j2\pi/5} + 2e^{-jk4\pi/5} - 2e^{-jk6\pi/5} - e^{-jk8\pi/5}] = \frac{-2j}{5}\sin(\frac{2\pi}{5}k) - \frac{4j}{5}\sin(\frac{4\pi}{5}k)$
a_k periódico con periodo $N = 5$.

2. $x[n] = \sum_{k=-2}^{2} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}n} = \ldots = 1 + 4\cos(\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{3}) + 2\cos(\frac{4\pi}{5}n + \frac{\pi}{4}) =$
$= 1 + 4\sin(\frac{2\pi}{5}n + \frac{\pi}{6}) + 2\sin(\frac{4\pi}{5}n + \frac{3\pi}{4})$

3. (a) $X(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega}}{1-\frac{e^{-j\Omega}}{2}}$

(b) $X(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega}}{1-\frac{e^{-j\Omega}}{2}} + \frac{1/2}{1-\frac{e^{j\Omega}}{2}}$

(c) $X(\Omega) = 2\cos(\Omega)$

(d) $X(\Omega) = 2j\sin(2\Omega)$

4. (a) $X(\Omega) = e^{-j2\Omega} + e^{-j3\Omega} + e^{-j4\Omega} + e^{-j5\Omega} = e^{-j2\Omega}\frac{1-e^{-j4\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} = e^{-j\frac{7}{2}\Omega}\frac{\text{sen}(2\Omega)}{\text{sen}(\Omega/2)}$

(b) $X(\Omega) = \frac{\frac{e^{j\Omega}}{2}}{1-\frac{e^{j\Omega}}{2}}$

(c) $X(\Omega) = \frac{1}{1-\frac{e^{j\Omega}}{3}} - \frac{e^{j\Omega}}{3} - 1 = \frac{e^{j2\Omega}}{9}\frac{1}{1-\frac{e^{j\Omega}}{3}}$

(d) $X(\Omega) = \frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j(\Omega-\pi/4)}} - \frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j(\Omega+\pi/4)}}$

(e) $X(\Omega) = \frac{1}{4}[\frac{e^{j(\Omega-\pi/4)}}{1-\frac{1}{2}e^{j(\Omega-\pi/8)}} + \frac{e^{j(\Omega+\pi/4)}}{1-\frac{1}{2}e^{j(\Omega+\pi/8)}}] + \frac{1}{2}[\frac{e^{-j\pi/8}}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\Omega-\pi/8)}} + \frac{e^{j\pi/8)}}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\Omega+\pi/8)}}]$

(f) $X(\Omega) = -6j\sin(3\Omega) - 4j\sin(2\Omega) - 2j\sin(\Omega)$

(g) $X(\Omega) = \frac{\pi}{j}\sum_{l=-\infty}^{\infty}[\delta(\Omega - 5\pi/3 - 2\pi l) - \delta(\Omega + 5\pi/3 - 2\pi l)]+$
$+\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}[\delta(\Omega - 7\pi/3 - 2\pi l) + \delta(\Omega + 7\pi/3 - 2\pi l)]$

(h) $X(\Omega) = \frac{-12\sin(\Omega)}{(5-3\cos(\Omega))^2}j - \frac{4}{5-3\cos(\Omega)}$

(i) $X(\Omega) = \begin{cases} 0 & 0 < |\Omega| < 3\pi/10 \\ 1 & 3\pi/10 < |\Omega| < 7\pi/10 \\ 0 & 7\pi/10 < |\Omega| < \pi \end{cases}$
$X(\Omega)$ periódica con periodo 2π.

5. (a) $x[n] = 2\cos(\frac{\pi}{2}n)\frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n} = \frac{1}{\pi n}[\sin(\frac{3\pi}{4}n) - \sin(\frac{\pi}{4}n)]$
   (b) $x[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 4\delta[n-3] + \delta[n-10]$
   (c) $x[n] = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi(n-1/2)}$
   (d) $x[n] = \delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n+2] + \frac{1}{4}\delta[n-2] - \frac{1}{4}\delta[n+6] + \frac{1}{4}\delta[n-6]$
   (e) $x[n] = \frac{1}{2\pi}[1 - e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{j\pi n} - e^{j\frac{3\pi}{2}n}]$
   (f) $x[n] = -5\delta[n] + \frac{24}{5}(\frac{1}{5})^n u[n]$
   (g) $x[n] = \frac{2}{9}(\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{7}{9}(-\frac{1}{4})^n u[n]$
   (h) $x[n] = (\frac{1}{3})^5\delta[n-5] + (\frac{1}{3})^4\delta[n-4] + (\frac{1}{3})^3\delta[n-3] + (\frac{1}{3})^2\delta[n-2] + (\frac{1}{3})\delta[n-1] + \delta[n]$

6. (a) $X(\Omega) = \pi\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{j}\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{3}\right) - \pi\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{j}\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{3}\right)$
   (b) $X(\Omega) = 4\pi\delta(\Omega) + \pi\left[e^{j\frac{\pi}{8}}\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{6}\right) + e^{-j\frac{\pi}{8}}\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{6}\right)\right]$

7. (a) $X_1(\Omega) = 2\cos(\Omega)X(-\Omega)$
   (b) $X_2(\Omega) = \Re\{X(\Omega)\}$
   (c) $X_3(\Omega) = -\frac{\mathrm{d}^2 X(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega^2} - 2j\frac{\mathrm{d}X(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega} + X(\Omega)$

8. $H(\Omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{6}e^{-j\Omega}-\frac{1}{6}e^{-j2\Omega}} = \frac{3/5}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{2/5}{1+\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$
   $\updownarrow \mathfrak{F}^{-1}$
   $h[n] = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{2}{5}\left(\frac{-1}{3}\right)^n u[n]$

9. (a) $y[n] = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
   (b) $y[n] = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
   (c) $y[n] = \frac{2}{3}x[n] = \frac{2}{3}(-1)^n$

10. $h[n] = -\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] + 2n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] = -2\delta[n] + (2-4n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n]$
    $H_i(\Omega) = H(\Omega)^{-1}$, entonces $h_i[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$
    Es no causal, ya que $h[n] \neq 0, n = -1$.
    Sería causal si retrasamos $h_i[n]$ una muestra, es decir, $g[n] = h_i[n-1]$.

11. (a) $N = 12$.
    Dentro de un periodo $0 \leq k \leq 11$:
    $$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}, & k = 1 \\ \frac{1}{2}e^{j\pi/4}, & k = 7 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$
    a_k periódico con periodo $N = 12$.
    (b) $E_\infty = \infty, \quad P_\infty = \frac{1}{2}$.

12. $E_\infty = \infty, \quad P_\infty = 3$.

13. (a) $y[n] = -2\delta[n+3] - 5\delta[n+2] - 4\delta[n+1] + 4\delta[n-1] + 5\delta[n-2] + 2\delta[n-3]$
    (b) $z[n] = -4\delta[n+6] - 10\delta[n+5] - 10\delta[n+4] - 5\delta[n+3] + 4\delta[n+2] + 10\delta[n+1] + 8\delta[n] + 5\delta[n-1] + 2\delta[n-2]$

14. (Examen Sep. 2008, ejercicio 2)

(a) $X(\Omega)e^{-j\Omega r_0} \overset{\mathfrak{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x[n] * \text{sinc}(n - r_0)$

(b) $x[n] * \text{sinc}(n - n_0) = x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$

15. (Examen Sep. 2008, ejercicio 3)
Sistema con memoria, no causal, no invertible, lineal, estable, e invariante en el tiempo.

16. (Examen Ene. 2005, ejercicio 2)

$$x[n] = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[B_k \cos\left(k\frac{2\pi}{N}n\right) - C_k \operatorname{sen}\left(k\frac{2\pi}{N}n\right)\right],$$

siendo B_k y C_k las partes real e imaginaria de los coeficientes, a_k, de la serie de Fourier, respectivamente.

17. Problemas de ampliación:

5.13. $h_2[n] = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

5.18. $a_k = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$

5.24. (a) $\Re\{X(\Omega)\} = 0$.
Esto es equivalente a que $X(\Omega)$ sea imaginaria pura. Según la propiedad de conjugación y simetría, si una señal $x[n]$ es real e impar, entonces su transformada de Fourier, $X(\Omega)$, es imaginaria pura.
• Cumple esta condición la señal (b).

(b) $\Im\{X(\omega)\} = 0$.
Esto es equivalente a que $X(\Omega)$ sea real. Según la propiedad de conjugación y simetría, si una señal $x[n]$ es real y par, entonces su transformada de Fourier, $X(\omega)$, es real.
• Cumplen esta condición las señales (d), (h) e (i).

(c) $\exists\ \alpha \in \mathcal{R}\ /\ e^{j\alpha\omega}X(\omega) \in \mathcal{R}$.
Según la propiedad de desplazamiento en el tiempo (multiplicar por $e^{j\alpha\omega}$ en frecuencia equivale a desplazar la señal, $x[n+\alpha]$), y por lo dicho en el punto anterior, esto es equivalente a decir que $\exists\ \alpha \in \mathcal{R}\ /\ x[n+\alpha]$ es real y par.
• Cumplen esta condición las señales (a) ($\alpha = 2$), (b) ($\alpha = 1$), (d) ($\alpha = 0$), (f) ($\alpha = -1$), (h) ($\alpha = 0$) e (i) ($\alpha = 0$).

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)\mathrm{d}\Omega = 0$.
A partir de la ecuación de síntesis, $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}\mathrm{d}\Omega$, si tomamos $n = 0$, queda $x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\mathrm{d}\Omega$. Entonces, para cumplir la condición ha de ser $x[0] = 0$.
• Cumplen esta condición las señales (b), (e), (f), (h) e (i).

(e) $X(\Omega)$ es periódica.
$X(\Omega)$ Siempre es periódica, de periodo 2π.
• Cumplen esta condición todas las señales discretas.

(f) $X(0) = 0$.
A partir de la ecuación de análisis, $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$, si tomamos $\Omega = 0$, queda $X(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$. Entonces, para cumplir la condición

ha de ser $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 0$; es decir, su valor medio, o de continua nulo.
• Cumplen esta condición las señales (b) y (g).

5.25. $y[n] = x_e[n+1] - jx_o[n]$, se muestra en la figura 1:

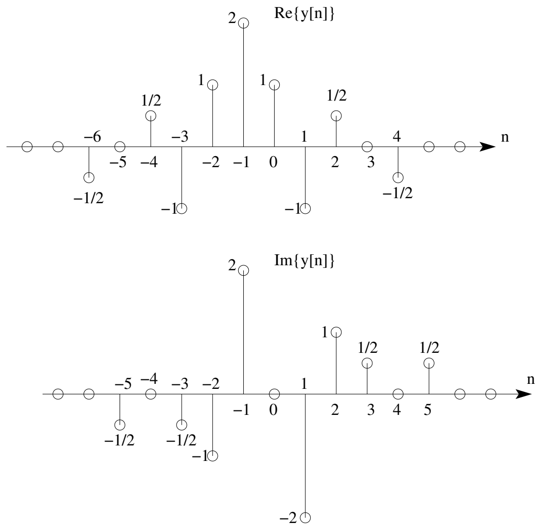

Figure 1: Resultado del problema 5.25.

5.29. (a) Ejercicio 9.

(b) $H(\Omega) = \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\Omega-\frac{\pi}{2})}} + \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\Omega+\frac{\pi}{2})}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}$

i. $y[n] = \frac{-1+j}{4}\left(\frac{j}{2}\right)^n u[n] + \frac{1+j}{4}\left(\frac{-j}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n]$

ii. $y[n] = \frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

(c) $y[n] = \begin{array}{l} 3\delta[n+5] + \delta[n+4] - \delta[n+3] - 3\delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] + \\ 6\delta[n-1] - 2\delta[n-3] + 4\delta[n-5] \end{array}$

5.33. (a) $H(\Omega) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$

(b) i. $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n] - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} u[n]$

ii. $y[n] = (n+1)\left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n]$

iii. $y[n] = \delta[n]$

iv. $y[n] = -\delta[n] + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n]$

(c) i. $y[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} u[n] + \frac{3}{2}(n+1)\left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n]$

ii. $y[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

iii. $\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{2}{9}\left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n] + \frac{2}{3}(n+1)\left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n] \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{2}{9}(4+3n)\left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n] \end{aligned}$

iv. $y[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-3} u[n-3]$

5.34. (a) $y[n] + \frac{1}{8}y[n-3] = 2x[n] - x[n-1]$

(b) $h[n] = \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1-\sqrt{3}j}{3}\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^n u[n] + \frac{1+\sqrt{3}j}{3}\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)^n u[n]$

5.35. (a) $b = -a$

(b) $H(\Omega) = \frac{-a+e^{-j\Omega}}{1-ae^{-j\Omega}} = \frac{-1+\cos\Omega - j\operatorname{sen}\Omega}{1-a\cos\Omega+ja\operatorname{sen}\Omega} = \frac{-2a+\cos\Omega(1+a^2)+j\operatorname{sen}\Omega(a^2-1)}{1+a^2-2a\cos\Omega}$

$\angle H(\Omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(\omega)(a^2-1)}{-2a+\cos(\Omega)(1+a^2)}\right)$

Para $a = \frac{1}{2}$, $\angle H(\Omega) = -\arctan\left(\frac{3\operatorname{sen}\Omega}{5\cos\Omega-4}\right)$

(c) Para $a = \frac{-1}{2}$, $\angle H(\Omega) = -\arctan\left(\frac{3\operatorname{sen}\Omega}{5\cos\Omega+4}\right)$