Sistemas Lineales

Tema 3. Resumen

Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo

1 Caracterización de los sistemas LTI discretos

- Cualquier señal discreta $x[n]$ puede escribirse en términos de impulsos

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Si un sistema es LTI la respuesta a una entrada $x[n]$ puede escribirse

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

  donde $h[n]$ es la respuesta al impulso del sistema. A esta operación se le conoce como **convolución discreta**.

- La convolución es conmutativa, asociativa y distributiva, y su elemento neutro es la función $\delta[n]$.

2 Caracterización de los sistemas LTI continuos

- Cualquier señal continua $x(t)$ puede escribirse en términos de impulsos

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau$$

  donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac, que cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

- Si un sistema es LTI su respuesta a una entrada $x(t)$ puede escribirse

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

  donde $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema. A esta operación se le conoce como **convolución continua**.

- Un sistema LTI también puede caracterizarse mediante la respuesta al escalón $s(t)$:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

3 Propiedades de los sistemas LTI

Memoria: Si $h(t) = K\delta(t)$ el sistema es sin memoria.

Causalidad: Si $h(t) = 0\ \forall t < 0$ el sistema es causal. Si $h(t) = 0\ \forall t \geq 0$ el sistema es anticausal.

Invertibilidad: Se define la respuesta al impulso del sistema inverso $h_i(t)$ como $h(t) * h_i(t) = \delta(t)$.

Estabilidad: Si $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\ d\tau < \infty$ el sistema es estable.

4 Sistemas descritos mediante ecuaciones en diferencias y diferenciales

- Un sistema discreto descrito mediante una ecuación en diferencias con coeficientes constantes
$$\sum_{i=0}^{N} a_i\ y[n-i] = \sum_{k=0}^{M} b_k\ x[n-k]$$
es un sistema LTI si imponemos como condiciones iniciales causalidad (o reposo inicial: $y[n] = 0\ \forall n < 0$).

- Un sistema continuo puede definirse mediante una ecuación diferencial con coeficientes constantes:
$$\sum_{i=0}^{N} a_i\ \frac{d^{i)}y(t)}{dt^i} = \sum_{k=0}^{M} b_k\ \frac{d^{k)}x(t)}{dt^k}$$

5 Propiedades de la función $\delta(t)$ (resumen)

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ dt = 1$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\ dt = f(t_0)$
3. $\delta(t-t_0) * x(t) = x(t-t_0)$
4. $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$
5. $a\delta(t) + b\delta(t) = (a+b)\delta(t)$
6. $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$
7. $\delta(-t) = \delta(t)$
8. $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\ d\tau = u(t)$
9. $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$