SISTEMAS LINEALES

TEMA 4. RESUMEN

ANÁLISIS DE FOURIER DE SEÑALES CONTINUAS

1 Señales exponenciales. Autofunciones

- Las exponenciales son autosoluciones de los sistemas LTI:

$$e^{st} * h(t) = H(s)e^{st}$$

con

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

2 Representación de señales periódicas. La serie de Fourier

- Dos señales periódicas están **armónicamente relacionadas** cuando tienen un periodo común:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in Q$$

- Una señal periódica $x(t)$ de periodo T va a poderse escribir como una combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas: Serie de Fourier:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt \text{ (Ecuación de análisis)}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t} \text{ (Ecuación de síntesis)}$$

- Si la señal $x(t)$ es real, los coeficientes cumplen la siguiente relación

$$c_k = c_k^*$$

y la serie se puede escribir como una suma de senos y cosenos ($c_k = a_k + jb_k$):

$$x(t) = c_0 + 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\frac{2\pi}{T}t) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\frac{2\pi}{T}t)\right)$$

o como una suma de cosenos ($c_k = r_k e^{j\theta_k}$):

$$x(t) = c_0 + 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} r_k \cos(k\frac{2\pi}{T}t + \theta_k)\right)$$

- Una serie de Fourier converge si $|x(t)|^2$ es integrable en un periodo. De manera más general, aplicaremos las condiciones de Dirichlet.

3 La transformada de Fourier

- la transformada de Fourier permite la representación de la información de una señal en el dominio de la frecuencia. La definimos:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \text{ (Ecuación de análisis)}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \text{ (Ecuación de síntesis)}$$

- La transformada de Fourier converge si $|x(t)|^2$ es integrable (energía finita). De manera más general, aplicaremos las condiciones de Dirichlet.

- la transformada de Fourier de una señal periódica se hace a partir de su Serie de Fourier. La TF de una exponencial es:

$$e^{j\omega_0 t} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

  y la TF de una señal periódica será

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 X_c(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

  siendo $X_c(\omega)$ la TF de la señal aperiódica.

4 Sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales

Dada una ecuación diferencial

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^{k)} y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^{k)} x(t)}{dt^k}$$

que describe un sistema LTI, su transformada de Fourier es de la forma

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k \right) Y(\omega) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k \right) X(\omega)$$

y la respuesta al impulso puede calcularse

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k} = H_1(\omega) H_2(\omega) \cdots H_p(\omega)$$