Sistemas Lineales

Tema 5. Resumen

Análisis de Fourier de Señales Discretas

1 Señales exponenciales. Autofunciones

- Las exponenciales son autosoluciones de los sistemas LTI discretos:

$$z^n * h[n] = H(z)z^n$$

con

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

- Concretamente para $z = e^{j\Omega}$

$$e^{j\Omega n} * h[n] = H(\Omega)e^{j\Omega n}$$

2 La serie discreta de Fourier

- Una señal periódica $x[n]$ de periodo N va a poderse escribir como una combinación lineal de N exponenciales complejas armónicamente relacionadas (Serie Discreta de Fourier):

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \text{ (Ecuación de análisis)}$$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \text{ (Ecuación de síntesis)}$$

3 La transformada de Fourier de tiempo discreto

- la transformada de Fourier permite la representación de la información de una señal discreta en el dominio de la frecuencia (continua). La definimos:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \text{ (Ecuación de análisis)}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega \text{ (Ecuación de síntesis)}$$

- La transformada de Fourier de tiempo discreto es una señal periódica de periodo 2π:

$$X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$$

- Es aplicable a señales de registro finito que cumplan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

- la transformada de Fourier de una señal periódica se hace a partir de su Serie de Fourier. La TF de una exponencial es:

$$e^{j\Omega_0 n} \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta_p(\Omega - \Omega_0)$$

  y la TF de una señal periódica será

$$X(\Omega) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta_p(\Omega - k\frac{2\pi}{N})$$

  siendo $\delta_p(\Omega) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$

- No hay que confundir la transformada de Fourier de tiempo discreto con la transformada discreta de Fourier (DCT).

4 Sistemas descritos mediante ecuaciones en diferencias

Dada una ecuación en diferencias con coeficientes constantes

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \; y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \; x[n-k]$$

que describe un sistema LTI, su transformada de Fourier es de la forma

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}\right) Y(\Omega) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}\right) X(\Omega)$$

y la respuesta al impulso puede calcularse

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}}$$