Sistemas Lineales

Tema 7. Resumen

Muestreo

1 Muestreo y teorema del muestreo

1.1 Proceso en el dominio del tiempo

- Para muestrear una señal continua $x(t)$ la multiplicamos por un tren de impulsos $p(t)$.

$$\begin{aligned} x_p(t) &= x(t)p(t) \\ &= x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t-kT_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-kT_s) \end{aligned}$$

  siendo T_s el periodo de muestreo.

- Posteriormente pasamos la señal por un conversor C/D que convierte las deltas continuas en deltas discretas.

- En frecuencia es equivalente a

$$\begin{aligned} X_p(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * P(\omega)\right] \\ &= \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega-k\omega_s) \end{aligned}$$

  con $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$. (La señal se duplica en múltiplos enteros de la frecuancia de muestreo).

- **Teorema del Muestreo (de Nyquist):** Dada una señal $x(t)$ de banda limitada ($X(\omega) = 0 \ \forall\omega > \omega_M$) la señal podrá ser reconstruida tras ser muestreada si $\omega_s > 2\omega_M$.

2 Interpolación

- Para recuperar la señal continua filtramos la señal muestreada con un filtro pasobajo de ganancia T_s y frecuencia de corte $\omega_s/2$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h(t-kT_s)$$

  El filtro en el dominio temporal será:

$$h(t) = \mathrm{sinc}(t/T_s)$$

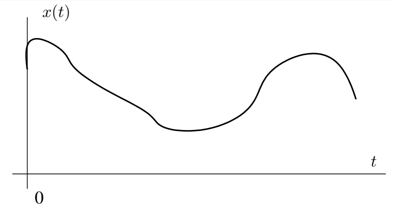
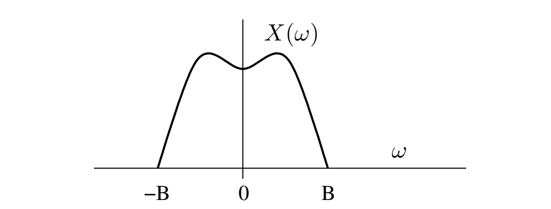
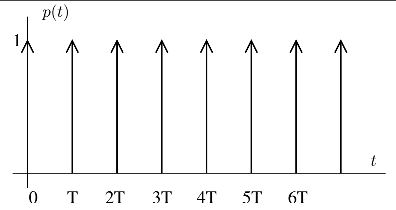
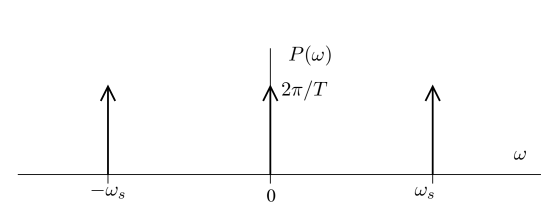
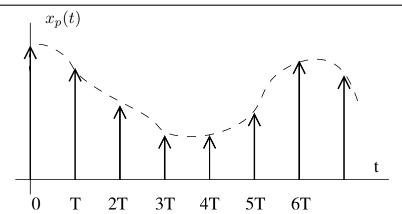
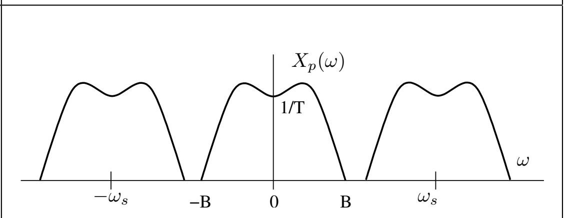
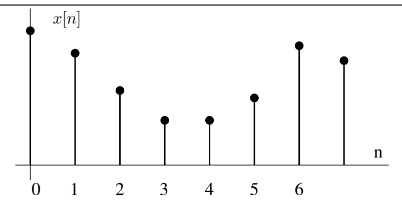
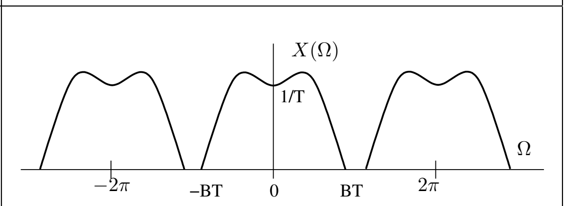
Señal	Dominio temporal	Dominio frecuencial
$x(t)$		
$p(t)$		
$x_p(t)$		
$x[n]$		

Table 1: Resumen de un proceso de muestreo en tiempo y frecuencia

3 Procesado Discreto de Señales Continuas

- Relación de Transformadas de Fourier:

$$x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$$

$$x_p(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X_p(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_k X(\omega - k\omega_s)$$

$$x_d[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X_d(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_k X\left(\frac{\Omega - k2\pi}{T_s}\right)$$

- Procesado discreto de señales continuas: Relación entre respuestas al impulso:

$$H_c(\omega) = \begin{cases} H(\omega T) & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0 & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases}$$

o visto de otro modo $H(\Omega) = H_c(\Omega/T)$entre $-\pi$ y π.