Sistemas Lineales

Tema 9. Esquema

La Transformada de Laplace

1 La transformada de Laplace

- Señales exponenciales de la forma e^{st} con $s = \sigma + j\omega$ son autosoluciones de los sistemas LTI. Para una entrada $x(t) = e^{st}$ la salida será

  $$y(t) = e^{st}H(s)$$

  Siendo $H(s)$ la transformada de Laplace de $h(t)$ evaluada en el punto s.

- Transformada de Laplace:

  $$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- Relación con transformada de Fourier

  $$X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$$

  $$X(s) = \mathfrak{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

2 Regiones de convergencia

- Convergencia depende de σ:

  $$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t}dt < \infty$$

- Propiedades de la ROC:

  1. Bandas paralelas en plano s.
  2. No contiene polos.
  3. Si $x(t)$ es de duración finita: converge en todo el plano.
  4. Si $x(t)$ es derecha converge hacia la derecha.
  5. Si $x(t)$ es izquierda converge hacia la izquierda.
  6. Si $x(t)$ es bilateral converge hacia en una banda.

  (Cuidado con los puntos $-\infty$ e $+\infty$).

3 La transformada inversa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

4 Propiedades de la Transformada de Laplace

Propiedad	**Señal**	**T. de Laplace**	**ROC**
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linealidad	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(s)+bX_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Desplazamiento en tiempo	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
Desplazemiento en s	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s-s_0)$	R desplazada
			(s en ROC si $s-s_0$ en R)
Escalado en tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{\vert a\vert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	R escalada
			(s en ROC si s/a en R)
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
Convolución	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
Diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	Al menos R
Diferenciación en s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
Integración en tiempo	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	Al menos $R \cap \{\Re\{s\}>0\}$

Teoremas del valor inicial y final

Si $x(t)=0$ para $t<0$ y x(t) no contiene impulsos o funciones singulares de orden superior en $t=0$, entonces

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

5 Análisis y caracterización de sistemas LTI usando la Transformada de Laplace

- En los puntos en que $\sigma = 0$ se cumple que $X(s)$=$X(\omega)$.
- Si el eje $j\omega$ está en la ROC el sistema es estable (y $h(t)$ tiene transformada de Fourier).
- Si $h(t)$ es causal: ROC hacia la derecha.
- Si $h(t)$ es anticausal: ROC hacia la izquierda.
- Sistemas descritos mediante ecuaciones diferenciales:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^{i)}y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{M} b_i \frac{d^{i)}x(t)}{dt^i} \stackrel{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \left(\sum_{i=0}^{N} a_i s^i\right) Y(s) = \left(\sum_{i=0}^{M} b_i s^i\right) X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{M} b_i s^i}{\sum\limits_{i=0}^{N} a_i s^i}$$