| Señal | Transformada de Fourier | Coef. serie de Fourier (si es periódica) |
|---|---|---|
| $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ | $2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_o)$ | $a_k$ |
| $e^{j\omega_0 t}$ | $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ | $a_1 = 1$<br>$a_k = 0 \quad k \neq 1$ |
| $\cos\omega_0 t$ | $\pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]$ | $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$<br>$a_k = 0,$ con otro valor |
| $\sin\omega_0 t$ | $\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right]$ | $a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$<br>$a_k = 0,$ con otro valor |
| $1$ | $2\pi\delta(\omega)$ | $a_0 = 1$<br>$a_k = 0 \quad k \neq 0$ |
| Onda cuadrada periódica<br>$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert \leq \frac{T}{2} \end{cases}$<br>$x(t+T) = x(t)$ | $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k}\delta(\omega - k\omega_0)$ | $\frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} = \frac{\omega_0 T_1}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right)$ |
| $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ | $\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$ | $a_k = \frac{1}{T}$ para todo $k$ |
| $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$ | $\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$ | - |
| $\frac{\sin Wt}{\pi t}$ | $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 0, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$ | - |
| $\delta(t)$ | $1$ | - |
| $u(t)$ | $\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$ | - |
| $\delta(t - t_0)$ | $e^{-j\omega t_0}$ | - |
| $e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$ | $\frac{1}{a + j\omega}$ | - |
| $te^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$ | $\frac{1}{(a + j\omega)^2}$ | - |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$ | $\frac{1}{(a + j\omega)^n}$ | - |

Tabla 1: Pares Básicos de Transformadas de Fourier



| Propiedad | Señal Aperiódica | Transformada de Fourier |
|---|---|---|
| Linealidad | $ax(t) + by(t)$ | $aX(\omega) + bY(\omega)$ |
| Desplazamiento temporal | $x(t - t_0)$ | $e^{-j\omega t_0}X(\omega)$ |
| Desplazamiento en frecuencia | $e^{j\omega_0 t}x(t)$ | $X(\omega - \omega_0)$ |
| Conjugación | $x^*(t)$ | $X^*(-\omega)$ |
| Inversión temporal | $x(-t)$ | $X(-\omega)$ |
| Escalado | $x(at)$ | $\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$ |
| Convolución | $x(t) * y(t)$ | $X(\omega)Y(\omega)$ |
| Multiplicación | $x(t)y(t)$ | $\frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)$ |
| Diferenciación en tiempo | $\frac{d}{dt}x(t)$ | $j\omega X(\omega)$ |
| Integración | $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ | $\frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$ |
| Diferenciación en frecuencia | $tx(t)$ | $j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$ |

Relación de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2 d\omega$$

Tabla 2: Propiedades de la Transformada de Fourier

| Propiedad | Señal periódica | Coef. Serie de Fourier |
|---|---|---|
| | $x(t)$, $y(t)$ Periodo $T$ $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$ | $a_k$<br>$b_k$ |
| Linealidad | $Ax(t) + By(t)$ | $Aa_k + Bb_k$ |
| Desplazamiento temporal | $x(t - t_0)$ | $a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$ |
| Desplazamiento en frecuencia | $e^{jM\omega_0 t}x(t)$ | $a_{k-M}$ |
| Conjugación | $x^*(t)$ | $a^*_{-k}$ |
| Escalado temporal | $x(\alpha t)$, $\alpha > 0$<br>Periódica con periodo $T/\alpha$ | $a_k$ |
| Convolución Periódica | $\int_T x(\tau)y(t - \tau)d\tau$ | $Ta_k b_k$ |
| Multiplicación | $x(t)y(t)$ | $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$ |
| Diferenciación | $\frac{d}{dt}x(t)$ | $jk\omega_0 a_k$ |
| Integración | $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ (Finita y periódica sólo si $a_0 = 0$) | $\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k$ |
| Simetría Conjugada | $x(t)$ real | $a_k = a^*_{-k}$ |

Relación de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_T \lvert x(t)\rvert^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lvert a_k\rvert^2$$

Tabla 3: Propiedades de la Serie Continua de Fourier

| Señal | Transformada de Fourier | Coef. serie de Fourier (si es periódica) |
|---|---|---|
| $\sum\limits_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ | $2\pi \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{2\pi}{N}k)$ | $a_k$ |
| $e^{j\Omega_0 n}$ | $2\pi\delta_p(\Omega - \Omega_0)$ | (a) $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$<br>$a_k = \begin{cases} 1, & k = m \pm lN, \quad l = 0, 1, ... \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$<br>(b) $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ la señal es aperiódica |
| $\cos \Omega_0 n$ | $\pi \left[\delta_p(\Omega - \Omega_0) + \delta_p(\Omega + \Omega_0)\right]$ | (a) $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$<br>$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm m \pm lN, \quad l = 0, 1, ... \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$<br>(b) $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ la señal es aperiódica |
| $\sin \Omega_0 n$ | $\frac{\pi}{j} \left[\delta_p(\Omega - \Omega_0) - \delta_p(\Omega + \Omega_0)\right]$ | (a) $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$<br>$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = m \pm lN, \quad l = 0, 1, ... \\ -\frac{1}{2j}, & k = -m \pm lN, \quad l = 0, 1, ... \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$<br>(b) $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ la señal es aperiódica |
| 1 | $2\pi\delta_p(\Omega)$ | $a_k = \begin{cases} 1 & k = 0, \pm N, \pm 2N, ... \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$ |
| Onda cuadrada periódica<br>$x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \leq N_1 \\ 0, & N_1 < \lvert n\rvert \leq \frac{N}{2} \end{cases}$<br>$x[n+N] = x[n]$ | $2\pi \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})$ | $a_k = \frac{\sin[(2\pi k/N)(N_1+1/2)]}{N \sin[2\pi k/2N]}, \quad k \neq 0, \pm N, ...$<br>$a_k = \frac{2N_1+1}{N}, \quad k = 0, \pm N, \pm 2n, ...$ |
| $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$ | $\frac{2\pi}{N} \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$ | $a_k = \frac{1}{N}$ para todo $k$ |
| $a^n u[n]$, $\lvert a\rvert < 1$ | $\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$ | - |
| $x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \leq N_1 \\ 0, & \lvert n\rvert > N_1 \end{cases}$ | $\frac{\sin[\Omega(N_1+1/2)]}{\sin(\Omega/2)}$ | - |
| $\frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$<br>$0 < W < \pi$ | $X(\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \lvert\Omega\rvert \leq W \\ 0, & W < \lvert\Omega\rvert \leq \pi \end{cases}$<br>$X(\Omega)$ periódica con periodo $2\pi$ | - |
| $\delta[n]$ | 1 | - |
| $u[n]$ | $\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta_p(\Omega)$ | - |
| $\delta[n - n_0]$ | $e^{-j\Omega n_0}$ | - |
| $(n+1)a^n u[n]$, $\lvert a\rvert < 1$ | $\frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}$ | - |
| $\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n]$, $\lvert a\rvert < 1$ | $\frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^r}$ | - |

Tabla 4: Pares Básicos de Transformadas de Fourier de Tiempo Discreto



| Propiedad | Señal Aperiódica | Transformada de Fourier |
|---|---|---|
| Linealidad | $ax[n] + by[n]$ | $aX(\Omega) + bY(\Omega)$ |
| Desplazamiento temporal | $x[n - n_0]$ | $e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$ |
| Desplazamiento en frecuencia | $e^{j\Omega_0 n} x[n]$ | $X(\Omega - \Omega_0)$ |
| Conjugación | $x^*[n]$ | $X^*(-\Omega)$ |
| Inversión temporal | $x[-n]$ | $X(-\Omega)$ |
| Expansión en tiempo | $x_{(k)}[n]$ | $X(k\Omega)$ |
| Convolución | $x[n] * y[n]$ | $X(\Omega)Y(\Omega)$ |
| Multiplicación | $x[n]y[n]$ | $X(\Omega) \circledast Y(\Omega)$ |
| Diferenciación en tiempo | $x[n] - x[n-1]$ | $(1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$ |
| Acumulación | $\sum\limits_{k=-\infty}^{n} x[k]$ | $\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} X(\Omega) + \pi X(0)\delta_p(\Omega)$ |
| Diferenciación en frecuencia | $nx[n]$ | $j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$ |

Relación de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Tabla 5: Propiedades de la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

| Propiedad | Señal periódica | Coef. Serie de Fourier |
|---|---|---|
| | $\left.\begin{matrix} x[n] \\ y[n] \end{matrix}\right\}$ Periodo $N$ $(\Omega_0 = \frac{2\pi}{N})$ | $\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\}$ Periodo $N$ |
| Linealidad | $Ax[n] + By[n]$ | $Aa_k + Bb_k$ |
| Desplazamiento temporal | $x[n - n_0]$ | $a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$ |
| Desplazamiento en frecuencia | $e^{jM(2\pi/N)n} x[n]$ | $a_{k-M}$ |
| Conjugación | $x^*[n]$ | $a^*_{-k}$ |
| Inversión de tiempo | $x[-n]$ | $a_{-k}$ |
| Escalado temporal | $x_{(m)}[n]$<br>(Periódica de periodo $mN$) | $\frac{1}{m} a_k$ |
| Convolución Periódica | $\sum\limits_{r=<N>} x[r]y[n-r]$ | $N a_k b_k$ |
| Multiplicación | $x[n]y[n]$ | $\sum\limits_{l=<N>} a_l b_{k-l}$ |
| Diferenciación | $x[n] - x[n-1]$ | $(1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k$ |
| Acumulación | $\sum\limits_{k=-\infty}^{n} x[k]$<br>(Finita y periódica sólo si $a_0 = 0$) | $\left(\frac{1}{(1-e^{-jk(2\pi/N)})}\right) a_k$ |
| Simetría Conjugada | $x[n]$ real | $a_k = a^*_{-k}$ |

Relación de Parseval

$$\frac{1}{N} \sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = \sum_{k=<N>} |a_k|^2$$

Tabla 6: Propiedades de la Serie Discreta de Fourier

| Señal | Transformada | ROC |
|---|---|---|
| $\delta[n]$ | $1$ | $z$ |
| $u[n]$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ | $\|z\| > 1$ |
| $-u[-n-1]$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ | $\|z\| < 1$ |
| $\delta[n-m]$ | $z^{-m}$ | $\begin{cases} z - \{0\} & \text{si } m > 0 \\ z - \{\infty\} & \text{si } m < 0 \end{cases}$ |
| $\alpha^n u[n]$ | $\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$ | $\|z\| > \|\alpha\|$ |
| $-\alpha^n u[-n-1]$ | $\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$ | $\|z\| < \|\alpha\|$ |
| $n\alpha^n u[n]$ | $\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$ | $\|z\| > \|\alpha\|$ |
| $-n\alpha^n u[-n-1]$ | $\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$ | $\|z\| < \|\alpha\|$ |
| $(\cos \Omega_0 n)u[n]$ | $\frac{1-(\cos \Omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos \Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$ | $\|z\| > 1$ |
| $(\sin \Omega_0 n)u[n]$ | $\frac{(\sin \Omega_0)z^{-1}}{1-(2\cos \Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$ | $\|z\| > 1$ |
| $(r^n \cos \Omega_0 n)u[n]$ | $\frac{1-(r\cos \Omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos \Omega_0)z^{-1}+r^2 z^{-2}}$ | $\|z\| > r$ |
| $(r^n \sin \Omega_0 n)u[n]$ | $\frac{(r\sin \Omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos \Omega_0)z^{-1}+r^2 z^{-2}}$ | $\|z\| > r$ |

Tabla 7: Pares Básicos de Transformada Z

| Propiedad | Señal | Transformada Z | ROC |
|---|---|---|---|
| | $x[n]$ | $X(z)$ | $R$ |
| | $x_1[n]$ | $X_1(z)$ | $R_1$ |
| | $x_2[n]$ | $X_2(z)$ | $R_2$ |
| Linealidad | $ax_1[n] + bx_2[n]$ | $aX_1(z) + bX_2(z)$ | Al menos $R_1 \cap R_2$ |
| Desplazamiento en el tiempo | $x[n-n_0]$ | $z^{-n_0}X(z)$ | $R \pm \{0\}$ |
| Escalado en $z$ | $e^{j\Omega_0 n}x[n]$ | $X(e^{-j\Omega_0 n}z)$ | $R$ |
| | $z_0^n x[n]$ | $X\left(\frac{z}{z_0}\right)$ | $z_0 R$ |
| | $a^n x[n]$ | $X(a^{-1}z)$ | $\|a\|R$ (El conjunto de puntos $\{\|a\|z\}$ para $z$ en $R$) |
| Inversión en el tiempo | $x[-n]$ | $X(z^{-1})$ | $R^{-1}$ (el conjunto de puntos $z^{-1}$ donde $z$ está en $R$) |
| Expansión en el tiempo | $x_{(k)}[n]$ | $X(z^k)$ | $R^{1/k}$ (el conjunto de puntos $z^{1/k}$ donde $z$ está en $R$) |
| Conjugación | $x^*[n]$ | $X^*(z^*)$ | $R$ |
| Convolución | $x_1[n] * x_2[n]$ | $X_1(z)X_2(z)$ | Al menos $R_1 \cap R_2$ |
| Primera diferencia | $x[n] - x[n-1]$ | $(1-z^{-1})X(z)$ | Al menos $R \cap (\|z\| > 0)$ |
| Acumulación | $\sum_{k=infty}^{n} x[k]$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$ | Al menos $R \cap (\|z\| > 1)$ |
| Diferenciación en $z$ | $nx[n]$ | $-z\frac{dX(z)}{dz}$ | $R$ |

Teorema del valor inicial

Si $x[n] = 0$ para $n < 0$ entonces $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$

Tabla 8: Propiedades de la Transformada Z



| Señal | Transformada | ROC |
|---|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ | $s$ |
| $u(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $\Re\{s\} > 0$ |
| $-u(-t)$ | $\frac{1}{s}$ | $\Re\{s\} < 0$ |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$ | $\frac{1}{s^n}$ | $\Re\{s\} > 0$ |
| $-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$ | $\frac{1}{s^n}$ | $\Re\{s\} < 0$ |
| $e^{-\alpha t}u(t)$ | $\frac{1}{s+\alpha}$ | $\Re\{s\} > -\alpha$ |
| $-e^{-\alpha t}u(-t)$ | $\frac{1}{s+\alpha}$ | $\Re\{s\} < -\alpha$ |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$ | $\frac{1}{(s+\alpha)^n}$ | $\Re\{s\} > -\alpha$ |
| $-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$ | $\frac{1}{(s+\alpha)^n}$ | $\Re\{s\} < -\alpha$ |
| $\delta(t-T)$ | $e^{-sT}$ | $s$ |
| $\cos(\omega_0 t)u(t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$ | $\Re\{s\} > 0$ |
| $\sin(\omega_0 t)u(t)$ | $\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$ | $\Re\{s\} > 0$ |
| $e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t)$ | $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$ | $\Re\{s\} > -\alpha$ |
| $e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)u(t)$ | $\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$ | $\Re\{s\} > -\alpha$ |
| $u_n(t) = \frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$ | $s^n$ | $s$ |
| $u_{-n}(t) = \underbrace{u(t) * \cdots * u(t)}_{n \text{ veces}}$ | $\frac{1}{s^n}$ | $\Re\{s\} > 0$ |

Tabla 9: Transformada de Laplace de Funciones Elementales

| Propiedad | Señal | T. de Laplace | ROC |
|---|---|---|---|
| | $x(t)$ | $X(s)$ | $R$ |
| | $x_1(t)$ | $X_1(s)$ | $R_1$ |
| | $x_2(t)$ | $X_2(s)$ | $R_2$ |
| Linealidad | $ax_1(t) + bx_2(t)$ | $aX_1(s) + bX_2(s)$ | Al menos $R_1 \cap R_2$ |
| Desplazamiento en tiempo | $x(t-t_0)$ | $e^{-st_0}X(s)$ | $R$ |
| Desplazemiento en $s$ | $e^{s_0 t}x(t)$ | $X(s-s_0)$ | $R$ desplazada ($s$ en ROC si $s - s_0$ en $R$) |
| Escalado en tiempo | $x(at)$ | $\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{s}{a}\right)$ | $R$ escalada ($s$ en ROC si $s/a$ en $R$) |
| Conjugación | $x^*(t)$ | $X^*(s^*)$ | $R$ |
| Convolución | $x_1(t) * x_2(t)$ | $X_1(s)X_2(s)$ | Al menos $R_1 \cap R_2$ |
| Diferenciación en tiempo | $\frac{d}{dt}x(t)$ | $sX(s)$ | Al menos $R$ |
| Diferenciación en $s$ | $-tx(t)$ | $\frac{d}{ds}X(s)$ | $R$ |
| Integración en tiempo | $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ | $\frac{1}{s}X(s)$ | Al menos $R \cap \{\Re\{s\} > 0\}$ |

Teoremas del valor inicial y final

Si $x(t) = 0$ para $t < 0$ y x(t) no contiene impulsos o funciones singulares de orden superior en $t = 0$, entonces

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Tabla 10: Propiedades de la Transformada de Laplace