INTRODUCCIÓN

- Las señales aleatorias son otro tipo muy común de señales
- Ejemplos de señales aleatorias:
  - Señales de información
  - Señales interferentes
  - Señales ruidosas
- Las señales en los sistemas tendrán varias componentes aleatorias
- Una señal aleatoria:
  - No se puede describir con expresiones matemáticas
  - Se van a caracterizar por sus propiedades estadísticas
- La disciplina que trata sobre medidas estadísticas se denomina:
  - Teoría de la probabilidad

DEFINICIÓN (I)

- La regularidad estadística nos acerca a la noción de probabilidad
- Se debe proceder como sigue:
  - Definir el experimento básico
  - Especificar los posibles resultados del experimento
  - Repetir el experimento un número elevado de veces, n
- Considerando la ocurrencia del evento A:
  - La probabilidad de ocurrencia del evento A

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n_A}{n} \right)$$

n_A es el número de veces que ocurre A en las n repeticiones

- Evento cierto Ω, aquel que se cumple en cada repetición, $n_\Omega = n$
  - Su probabilidad es igual a la unidad, $P(\Omega) = 1$
- Evento imposible $\{0\}$, aquel que nunca se cumple, $n_{\{0\}} = 0$
  - Su probabilidad es nula, $P(\{0\}) = 0$

DEFINICIÓN (II)

- Para cualquier evento se cumple

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Supongamos un experimento con N resultados posibles

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k,\ \ldots,\ A_N$$

  - Son partición si son mutuamente excluyentes y la unión es el total

$$A_i \cap A_j = \{0\} \qquad\qquad \bigcup_{k=1}^{N} A_k = \Omega$$

  - Se cumple

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \sum_{k=1}^{N} P(A_k) = 1 \qquad\qquad P(A_i \cap A_j) = 0$$

- Para cualquiera dos eventos A y B no excluyentes

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

PROBABILIDAD CONDICIONADA (I)

- La probabilidad del evento A condicionado al evento B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- También se puede definir la probabilidad del evento B condicionado a A

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- De las dos expresiones anteriores se deduce

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

- La probabilidad condicionada define un nuevo espacio de probabilidad
- Cumple las propiedades de probabilidad

$$0 \leq P(A|B) \leq 1 \qquad P(\Omega|B) = 1$$

$$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) \qquad A_1 \cap A_2 = \{0\}$$

PROBABILIDAD CONDICIONADA (II)

- Para A contenido en B

$$P(B|A) = 1 \qquad P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

- En particular se tiene que

$$P(A|A) = 1 \qquad P(A|\Omega) = P(A)$$

- Si los eventos A y B son mutuamente excluyentes

$$P(A|B) = P(B|A) = 0$$

- Para una partición $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, A_N$ del espacio Ω original

  – Se cumple el teorema de probabilidad total

$$P(B) = \sum_{k=1}^{N} P(B|A_k)P(A_k)$$

  siendo B cualquier otro evento contenido en Ω

PROBABILIDAD CONDICIONADA (III)

- De la expresión

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

  – Se deduce el teorema de Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- Se dice que dos sucesos A y B son independientes si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Entonces se cumple que

$$P(B|A) = P(B) \qquad\qquad P(A|B) = P(A)$$

- Por ejemplo cualquier suceso A es independiente de Ω

$$P(\Omega \cap A) = P(\Omega)P(A) = P(A) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} P(A|\Omega) = P(A) \\ P(\Omega|A) = P(\Omega) = 1 \end{cases}$$

PROBABILIDAD CONJUNTA (I)

- Muchas veces se consideran varios experimentos de forma conjunta
- Vamos a considerar los espacios de probabilidad Ω_1 y Ω_2
- Suponemos que el evento A está en el espacio Ω_1 y el evento B en Ω_2
- Repetimos los experimentos un número elevado de veces n
- La probabilidad conjunta vendría dada por

$$P(A, B) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n_{AB}}{n} \right)$$

n_{AB} es el número de veces que obtenemos el evento conjunto (A, B)

- La probabilidad conjunta cumple las propiedades de probabilidad en el espacio producto $\Omega_1 \times \Omega_2$

$$0 \leq P(A, B) \leq 1 \qquad\qquad P(\Omega_1, \Omega_2) = 1$$

- Para sucesos mutuamente excluyentes

$$P(A_1 \cup A_2, B) = P(A_1, B) + P(A_2, B)$$

$$P(A, B_1 \cup B_2) = P(A, B_1) + P(A, B_2)$$

PROBABILIDAD CONJUNTA (II)

- Tenemos dos probabilidades marginales

$$P(A) = P(A, \Omega_2) \qquad\qquad P(B) = P(\Omega_1, B)$$

- Se pueden definir probabilidades condicionadas en el otro espacio

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \qquad\qquad P(B|A) = \frac{P(A,B)}{P(A)}$$

- La probabilidad conjunta es entonces

$$P(A,B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

- Suponiendo una partición $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k,\ \ldots,\ A_N$ del espacio Ω_1
  - Se cumple el teorema de probabilidad total para B contenido en Ω_2

$$P(B) = \sum_{k=1}^{N} P(B|A_k)P(A_k)$$

PROBABILIDAD CONJUNTA (III)

- De la expresión

$$P(A,B) = P(A\ B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

se deduce el teorema de Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

- Se dice que los experimentos son independientes si
  - La probabilidad conjunta es igual al producto de las marginales

$$P(A,B) = P(A)P(B)$$

- Entonces se deduce que

$$P(B|A) = P(B) \qquad\qquad P(A|B) = P(A)$$

UNA VARIABLE ALEATORIA (I)

- Podemos asociar a un experimento un **espacio muestra** S
- Para cada resultado del experimento se tiene un **punto muestra** $\{s\}$
- Un evento es un conjunto de puntos del espacio muestra
- El resultado del experimento se denomina **variable aleatoria**
  - Puede tomar cualquier valor en S
  - Es una función que asigna un número real a cada $\{s\}$
  - Se va a denotar por $X(s)$ o simplemente por X
- Una variable aleatoria puede ser
  - **Continua**, cuando puede tomar cualquier valor real
  - **Discreta**, toma sólo un número contable de números reales
- Podemos definir probabilidades sobre los valores que toma la variable
- En particular se definen probabilidades sobre intervalos del eje real

UNA VARIABLE ALEATORIA (II)

- Considerando el evento $X \leq x$ podemos definir la probabilidad

$$P(X \leq x)$$

- Para cada valor x esta probabilidad define la **función de distribución**

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

- Es una función determinística de la variable x, extremo del intervalo
- Depende de la variable X considerada y se indica como subíndice
- La función de distribución contiene **toda** la información sobre X
- La función $F_X(x)$ expresa una probabilidad y cumple que:
  - Está acotada entre 0 y 1 por ser probabilidad
  - Es una función no decreciente en x, para $x_1 < x_2$

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

- Se tiene entonces que $F_X(-\infty) = 0$ y que $F_X(\infty) = 1$

UNA VARIABLE ALEATORIA (III)

- Otra función alternativa es la **función de densidad de probabilidad**
- Se puede calcular a partir de la de distribución mediante

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- Integrando se obtiene que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)d\xi$$

- El nombre de densidad de probabilidad viene del hecho que

$$P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F_X(x_1) - F_X(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(\xi)d\xi$$

- La función de densidad cumple que:
  - Es siempre una función positiva $f_X(x) \geq 0$
  - Tiene área unidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\xi)d\xi = 1$$

UNA VARIABLE ALEATORIA (IV)

- Una variable aleatoria puede sufrir una transformación $Y = g(X)$
- Interesa poder determinar la función de densidad de Y conocida la de X
- Se puede aplicar el **teorema fundamental de la probabilidad**

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

donde x_i son las raíces de la ecuación

$$y = g(x_1) = \ldots g(x_n)$$